T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Ramazan KARATAŞ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2007

T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

RAMAZAN KARATAŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 23 / 07/ 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

(Başkan)

Prof. Dr. Eşref HATIR

(Üye)

Doç. Dr. Kazım İLARSLAN

(Üye)

Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

(Danışman)

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

(Üye)

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Doktora tez konusunu bana teklif eden, çalışmalarım boyunca karşılaştığım zor durumlarda yardımlarını esirgemeyen, katkılarıyla beni yönlendiren ve tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR'a teşekkür eder ve saygılarımı sunarım. Doktora tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA ve Dr. Dağıstan ŞİMŞEK' e teşekkür ederim.

Ramazan KARATAŞ

Konya, 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ, PERİYODİKLİĞİ VE SALINIMLILIĞI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Ramazan KARATAŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

2007, 60 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Eşref HATIR

Doç. Dr. Kazım İLARSLAN

Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Bu çalışma, üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fark denklemlerinin çözümleri ve periyodikliği ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde ise, $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$, $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-(2k+2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{n-i}}$ ve $x_{n+1} = \dfrac{(-1)^n x_{n-2k}}{1+(-1)^n \prod_{i=0}^{2k} x_{n-i}}$ fark denklemlerinin çözümleri ve periyodikliği incelendi. Ayrıca $x_{n+1} = \dfrac{(-1)^n x_{n-2k}}{1+(-1)^n \prod_{i=0}^{2k} x_{n-i}}$ fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemi, Çözümler, Periyodiklik, Salınımlılık

ABSTRACT

PhD Thesis

A STUDY ON SOLUATIONS, PERIODICITY AND OSCILLATION OF SOME DIFFERENCE EQUATIONS

Ramazan KARATAŞ

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

2007, 60 Pages

Jury : Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Eşref HATIR

Assoc. Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ

This study consists of three sections. In the first section, information about some difference equations' solutions and perodicity studied before is given

In the second section, general definitions and theorems about difference equations are given.

In the third section, the solutions and periodicity of the difference equations $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$, $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-(2k+2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{n-i}}$ and $x_{n+1} = \dfrac{(-1)^n x_{n-2k}}{1 + (-1)^n \prod_{i=0}^{2k} x_{n-i}}$ are investigated. Also oscillation of solutions of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{(-1)^n x_{n-2k}}{1 + (-1)^n \prod_{i=0}^{2k} x_{n-i}}$ is investigated.

Key Words : Difference Equation, Solutions, Periodicity, Oscillation.

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Bu çalışmada, tarafımızdan tanımlanan üç yeni rasyonel fark denkleminin çözümleri ve periyodikliği ele alınmıştır.

İlk olarak $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$, $n = 0,1,2,...$ rasyonel fark denkleminin $a \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $x_{-(2k+1)}, x_{-2k},..., x_0$ reel başlangıç şartları altında çözümleri elde edilmiş ve bu çözümlerin özellikleri incelenmiştir.

İkinci olarak $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-(2k+2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{n-i}}$, $n = 0,1,2,...$ rasyonel fark denkleminin $a \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $x_{-(2k+2)}, x_{-(2k+1)},..., x_0$ reel başlangıç şartları olmak üzere çözümlerine ulaşılmış ve bu çözümlerin özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü ve son olarak $x_{n+1} = \dfrac{(-1)^n x_{n-2k}}{1 + (-1)^n \prod_{i=0}^{2k} x_{n-i}}$, $n = 0,1,2,...$ rasyonel fark denkleminin $x_{-2k}, x_{-(2k-1)},..., x_0$ reel başlangıç şartları altında çözümleri elde edilmiş ve çözümlerinin salınımlığı incelenmiştir.

Rasyonel Fark Denklemlerinin Çözümleri ve Periyodikliği İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Devault ve arkadaşları (1998) yaptıkları çalışmada; $x_{-2}, x_{-1}, x_0, A > 0$ başlangıç şartları için $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n} + \dfrac{1}{x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Valicenti (1999) yaptığı doktora tezinde; $x_{n+1}=\dfrac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Camouzis ve Devault (2001) yaptıkları çalışmada; $x_0,\ x_{-1},\ p>0$ pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1}=p+\dfrac{x_{n-1}}{x_n},\quad n=0,1,2,...$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Patula ve Voulov (2002) yaptıkları çalışmada; $x_{n+1}=1+\dfrac{x_{n-2}}{x_{n-3}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Stevic (2002) yaptığı çalışmada; $x_{n+1}=\dfrac{Bx_{n-1}}{B+x_n}$ fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve

$$x_{2n}=x_0\left(1-x_1\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2j-1}\frac{1}{1+x_i}\right),\ x_{2n+1}=x_{-1}\left(1-\frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_i}\right)$$

çözümlerini ortaya koymuştur.

Abu-Saris ve Devault (2003) yaptıkları çalışmada; $y_{n+1}=A+\dfrac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denkleminin çözümlerini $y_{-k},\ y_{-(k-1)},...,\ y_0,\ A>0,\ k\in\{2,3,4,...\}$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerekli olan şartları elde etmişlerdir.

Mestel (2003) yaptığı çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1}=\dfrac{f(x_n)}{x_{n-1}}$ denkleminin periyodikliğini incelemiştir.

Çinar (2004) yaptığı çalışmada; $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{1+x_n x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve

$$x_n=\begin{cases} x_{-1}\dfrac{\prod\limits_{i=0}^{[(n+1)/2]-1}\left(2x_{-1}x_0 i+1\right)}{\prod\limits_{i=0}^{[(n+1)/2]-1}\left(2i+1\right)x_{-1}x_0+1}, & n \text{ tek ise} \\ x_0\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n/2}\left(\left(2i-1\right)x_{-1}x_0+1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n/2}\left(2ix_{-1}x_0+1\right)}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitliğini vermiştir.

Çinar (2004) yaptığı iki çalışmadan birincisinde; $x_0,\ x_{-1},\ a,\ b>0$ başlangıç şartları altında $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-1}}{1+bx_{n-1}x_n}$ fark denkleminin, ikincisinde ise $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{1+ax_{n-1}x_n}$ fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004) yaptıkları çalışmada; $\alpha\in[1,\infty)$, $k=0,\,1,\,2,...$ için ve pozitif reel sayılar olan başlangıç şartları altında $x_{n+1}=\alpha+\dfrac{x_{n-k}}{x_n}$, $n=0,\,1,\,2,...$ için denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik karakterli ve bu çözümlerin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Stevic (2004) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{p + x_{n-(2s-1)}}{x_n + (2l + s) + 1}$ fark denkleminin çözümlerinin, $p > 1$, $s, l \in N$ başlangıç şartları altında $2s$ periyotlu olduğunu göstermiştir.

Abu-Saris ve Al-Jubouri (2004) yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Stevic (2005) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$ fark denkleminin çözümlerinin $s, l \in N$ başlangıç şartları altında asimptotikliğini, periyodikliğini, salınımlılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Taixiang (2005) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = p + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin $p,\ x_0,\ x_{-1} > 0$ başlangıç şartları altında sınırlılığını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2005) yaptıkları çalışmada; k çift bir sayı olmak üzere, $x_{n+1} = p_n + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin $k+1$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Saleh ve Aloqeili (2005) yaptıkları çalışmada; $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denkleminin $y_{-k},\ y_{-(k+1)}, \ldots,\ y_0,\ A > 0$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Berenhaut ve Stevic (2005) yaptıkları çalışmada; $x_{-4},\ x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0 > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n-3} x_{n-4}}$ fark denkleminin çözümlerinin 3 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Yan ve arkadaşları (2005) yaptıkları çalışmada; $\alpha,\ x_{-1},\ x_0$ başlangıç şartlarını reel sayı alarak $x_{n+1} = \alpha - \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ fark denkleminin bütün pozitif ve negatif çözümlerinin asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Abu Saris (2006) yaptığı çalışmada; $w_{-2},\ w_{-1},\ w_0 > 0$ başlangıç şartları altında $w_{n+1} = \dfrac{w_n + w_{n-2}}{w_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerinin 4 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermiştir.

Karataş ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada; $x_{-i} \in (0,\infty)$, $(i = 0,1,2,3,4,5)$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-5}}{1 + x_{n-2} x_{n-5}}$ fark denkleminin pozitif çözümlerini incelemişlerdir.

Şimşek ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada; $x_{-i} \in (0,\infty)$, $(i = 0,1,2,3,4,5)$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1} x_{n-3}}$ fark denkleminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Şimşek ve arkadaşları (2007) yaptıkları çalışmada $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(5k+9)}}{1 + x_{n-4} x_{n-9} \ldots x_{n-(5k+9)}}$ fark denkleminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Berenhaut ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada; $y_{-4},\ y_{-3},\ y_{-2},$ $y_{-1},\ y_0 > 0$ başlangıç şartları altında $y_n = \dfrac{y_{n-3} + y_{n-4}}{y_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Aloqeili (2006) yaptığı çalışma; $x_{-1},\ x_0 \in R,\ a > 0$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{a - x_{n-1}x_n}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve çözümleri için

$$x_n = \begin{cases} x_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{a^{2i-1}\left(1-a\right)-\left(1-a^{2i-1}\right)x_{-1}x_0}{a^{2i}\left(1-a\right)-\left(1-a^{2i}\right)x_{-1}x_0}, & n \text{ çift ise} \\ x_{-1} \displaystyle\prod_{i=0}^{\frac{n+1}{2}} \frac{a^{2i-1}\left(1-a\right)-\left(1-a^{2i}\right)x_{-1}x_0}{a^{2i+1}\left(1-a\right)-\left(1-a^{2i+1}\right)x_{-1}x_0}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliğini vermiştir.

Aloqeili (2006) yaptığı çalışmada; $x_{-k},\ x_{-(k-1)},...,\ x_0 > 0,\ A > 0$ ve k herhangi pozitif bir tamsayı olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-k}}{a + x_{n-k}x_n}$ fark denkleminin çözümlerini ve kararlılığını incelemiştir.

2. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan ve çalışmamızda kullanılan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin sonlu farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir.

Birinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir. Denklemin mertebesi, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartının sayısını belirtir (Türker).

Örnek 2.1. $x_{n+1} - x_n = 3$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklem ardışık iki terim arasındaki farkın 3 e eşit olduğunu ortaya koymaktadır. Basit iterasyon işlemiyle $x_1 = 3 + x_0$, $x_2 = 3 + x_1 = 3 + 3 + x_0$, $x_3 = 3 + x_2 = 3 + 3 + 3 + x_0$, ... olduğu görülür. Buradan çözüm $x_n = 3n + x_0$ şeklinde bulunur.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her x_{-k}, $x_{-(k-1)}$,..., $x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \quad n = 0,1,2,... \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir(Grove 2005).

Tanım 2.2. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır(Grove 2005).

Tanım 2.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır(Grove 2005).

Örnek 2.2. x_{-1} ve x_0 sıfırdan farklı reel başlangıç şartları olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n-1}}$ rasyonel fark denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümleri $x_1 = \dfrac{1}{x_{-1}}$, $x_2 = \dfrac{1}{x_0}$, $x_3 = x_{-1}$, $x_4 = x_0$, $x_5 = \dfrac{1}{x_{-1}}$, $x_6 = \dfrac{1}{x_0}$, $x_7 = x_{-1}$, $x_8 = x_0$,..., şeklinde olup 4 periyotludur.

Tanım 2.4. (2.1) denkleminde $\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x})$ şartını sağlayan $\overline{x}$ noktasına (2.1) denkleminin denge noktası denir(Aloqeili 2006).

Tanım 2.5. $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(a) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \overline{x}\right| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için $\left|x_n - \overline{x}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $\lim_{n \to \infty} x_n = \overline{x}$ olacak şekilde, $\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \overline{x}\right| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $\lim_{n \to \infty} x_n = \overline{x}$ ise, $\overline{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(d) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\overline{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \overline{x}\right| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $\left|x_N - \overline{x}\right| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktasına repeller denir(Grove 2005).

Tanım 2.6. (2.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\overline{x}, ..., \overline{x}) y_{n-i} \tag{2.2}$$

denkleme, $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x},...,\bar{x})\lambda^{k-i} = 0 \qquad (2.3)$$

dir(Grove 2005).

Teorem 2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (2.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır(Aloqeili 2006).

Tanım 2.7. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\bar{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise, bu çözümlere $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 2.8. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1},..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-k} < \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1},..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1},..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-k} \geq \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \geq \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1},..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir(Grove 2005).

3. BÖLÜM

3.1. $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-(2k+1)}}{-a+x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$ Fark Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda a sıfırdan farklı herhangi bir reel sayı, k herhangi bir pozitif tam sayı, $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, x_{-(2k-1)},..., x_0$ reel başlangıç şartları altında ve $x_0x_{-(k+1)}\neq a$, $x_{-1}x_{-(k+2)}\neq a,\ x_{-2}x_{-(k+3)}\neq a,...,\ x_{-k}x_{-(2k+1)}\neq a$ olmak üzere;

$$x_{n+1}=\frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a+x_{n-k}x_{n-(2k+1)}},\ n=0,1,2,... \tag{3.1.1}$$

rasyonel fark denklemi tanımladık ve çözümleri inceledik.

Teorem 3.1.1. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $x_0x_{-(k+1)}\neq a,\ x_{-1}x_{-(k+2)}\neq a,\ x_{-2}x_{-(k+3)}\neq a,...,\ x_{-k}x_{-(2k+1)}\neq a$ ise o zaman (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri

$$x_{2(k+1)n+1}=\frac{a^{n+1}x_{-(2k+1)}}{\left(-a+x_{-k}x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}}, \tag{3.1.2}$$

$$x_{2(k+1)n+2}=\frac{a^{n+1}x_{-(2k)}}{\left(-a+x_{-(k-1)}x_{-(2k)}\right)^{n+1}}, \tag{3.1.3}$$

$$x_{2(k+1)n+3}=\frac{a^{n+1}x_{-(2k-1)}}{\left(-a+x_{-(k-2)}x_{-(2k-1)}\right)^{n+1}}, \tag{3.1.4}$$

$$\vdots$$

$$x_{2(k+1)n+k+1}=\frac{a^{n+1}x_{-(k+1)}}{\left(-a+x_0x_{-(k+1)}\right)^{n+1}}, \tag{3.1.k+2}$$

$$x_{2(k+1)n+k+2}=\frac{1}{a^{n+1}}x_{-k}\left(-a+x_{-k}x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}, \tag{3.1.k+3}$$

$$x_{2(k+1)n+k+3}=\frac{1}{a^{n+1}}x_{-(k-1)}\left(-a+x_{-(k-1)}x_{-(2k)}\right)^{n+1}, \tag{3.1.k+4}$$

$$x_{2(k+1)n+k+4}=\frac{1}{a^{n+1}}x_{-(k-2)}\left(-a+x_{-(k-2)}x_{-(2k-1)}\right)^{n+1}, \tag{3.1.k+5}$$

$$\vdots$$

$$x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \frac{1}{a^{n+1}} x_0 \left(-a + x_0 x_{-(k+1)}\right)^{n+1}. \qquad (3.1.2k+3)$$

şeklindedir.

İspat. İspatımızı tümevarım metoduyla yapalım. Teoremdeki şartlar göz önüne alındığında, (3.1.1) denkleminde sırasıyla $n = 0,1,2,...,2k+1$ değerleri için

$$x_1 = \frac{ax_{-(2k+1)}}{-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}}$$

$$x_2 = \frac{ax_{-2k}}{-a + x_{-(k-1)} x_{-2k}}$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1} = \frac{ax_{-(k+1)}}{-a + x_0 x_{-(k+1)}}$$

$$x_{k+2} = \frac{1}{a} x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)$$

$$x_{k+3} = \frac{1}{a} x_{-(k-1)} \left(-a + x_{-(k-1)} x_{-2k}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{2(k+1)} = \frac{1}{a} x_0 \left(-a + x_0 x_{-(k+1)}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece iddiamızın $n = 0$ için doğru olduğu görülür. Şimdi iddiamızın *n*-1 için doğru kabul edelim. O zaman (3.1.2), (3.1.3),..., (3.1.2k+3) den

$$x_{2(k+1)n-(2k+1)} = \frac{a^n x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}, \qquad (3.1.2k+4)$$

$$x_{2(k+1)n-2k} = \frac{a^n x_{-(2k)}}{\left(-a + x_{-(k-1)} x_{-(2k)}\right)^n}, \qquad (3.1.2k+5)$$

$$x_{2(k+1)n-(2k-1)} = \frac{a^n x_{-(2k-1)}}{\left(-a + x_{-(k-2)} x_{-(2k-1)}\right)^n}, \tag{3.1.2k+6}$$

$$\vdots$$

$$x_{2(k+1)n-(k+1)} = \frac{a^n x_{-(k+1)}}{\left(-a + x_0 x_{-(k+1)}\right)^n}, \tag{3.1.2k+7}$$

$$x_{2(k+1)n-k} = \frac{1}{a^n} x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n, \tag{3.1.2k+8}$$

$$x_{2(k+1)n-(k-1)} = \frac{1}{a^n} x_{-(k-1)} \left(-a + x_{-(k-1)} x_{-(2k)}\right)^n, \tag{3.1.2k+9}$$

$$x_{2(k+1)n-(k-2)} = \frac{1}{a^n} x_{-(k-2)} \left(-a + x_{-(k-2)} x_{-(2k-1)}\right)^n, \tag{3.1.2k+10}$$

$$\vdots$$

$$x_{2(k+1)n} = \frac{1}{a^n} x_0 \left(-a + x_0 x_{-(k+1)}\right)^n \tag{3.1.2k+11}$$

eşitliklerini yazarız. Denklem (3.1.1) den, (3.1.2k+4) ve (3.1.2k+8) eşitliklerinden

$$x_{2(k+1)n+1} = \frac{a x_{2(k+1)n-(2k+1)}}{-a + x_{2(k+1)n-k} x_{2(k+1)n-(2k+1)}}$$

$$= \frac{a \dfrac{a^n x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}}{-a + \dfrac{1}{a^n} x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n \dfrac{a^n x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}}$$

$$= \frac{\dfrac{a^{n+1} x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}}{-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}}$$

$$= \frac{a^{n+1} x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}}$$

elde edilir. Buradan (3.1.2) eşitliğinin doğru olduğu görülür.

Yine (3.1.1) denkleminden

$$x_{2(k+1)n+k+2} = \frac{a x_{(2k+1)n-k}}{-a + x_{(2k+1)n+1} x_{(2k+1)n-k}}$$

denklemini yazabiliriz. O zaman bu denklemde (3.1.2) ve (3.1.2k+8) eşitlikleri yerine yazılacak olursa

$$x_{2(k+1)n+k+2} = \frac{a \frac{1}{a^n} x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}{-a + \frac{a^{n+1} x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}} \frac{1}{a^n} x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}$$

$$= \frac{\dfrac{a x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}{a^n}}{-a + \dfrac{a x_{-(2k+1)} x_{-k}}{-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}}}$$

$$= \frac{\dfrac{a x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^n}{a^n}}{\dfrac{a^2}{-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}}}$$

$$= \frac{1}{a^{n+1}} x_{-k} \left(-a + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}$$

elde edilir. Buradan (3.1.k+3) eşitliğinin doğru olduğu görülür. Benzer şekilde (3.1.3), (3.1.4),…,(3.1.k+2) ve (3.1.k+4), (3.1.k+5), …, (3.1.2k+3) denklemlerinin de doğru olduğu görülür.

Uyarı 3.1.1. $x_{n+1}=\dfrac{\alpha x_{n-(2k+1)}}{-\alpha+\beta x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$, rasyonel fark denklemi, α,β sıfırdan farklı reel sayılar ve $x_0x_{-(k+1)}\neq\dfrac{\alpha}{\beta}$, $x_{-1}x_{-(k+2)}\neq\dfrac{\alpha}{\beta}$,..., $x_{-k}x_{-(2k+1)}\neq\dfrac{\alpha}{\beta}$ olmak üzere, $x_n=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}y_n$ dönüşümü yapıldığında ve $a=1$ için (3.1.1) denklemine dönüşür.

Sonuç 3.1.1. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a>0$, $x_{-(2k+1)}, x_{-2k},...,x_0>0$ ve $x_0x_{-(k+1)}>a$, $x_{-1}x_{-(k+2)}>a$, $x_{-2}x_{-(k+3)}>a$,..., $x_{-k}x_{-(2k+1)}>a$ ise, o zaman (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri pozitiftir.

İspat. (3.1.2), (3.1.3),…, (3.1.2k+3) eşitliklerinden (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin pozitif olduğu görülür.

Sonuç 3.1.2. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a>0,\ x_{-(2k+1)}, x_{-2k},..., x_0<0$ ve $x_0x_{-(k+1)}>a,\ x_{-1}x_{-(k+2)}>a,..., x_{-k}x_{-(2k+1)}>a$ ise, o zaman (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri negatiftir.

İspat. (3.1.2), (3.1.3),…, (3.1.2k+3) eşitliklerinden (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin negatif olduğu görülür.

Sonuç 3.1.3. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a=1,\ x_{-(2k+1)}, x_{-2k},..., x_0>0$ ve $x_0x_{-(k+1)}>2,\ x_{-1}x_{-(k+2)}>2,..., x_{-k}x_{-(2k+1)}>2$ ise, o zaman

$$\lim_{n\to\infty}x_{2(k+1)n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}x_{2(k+1)n+2}=0,...,\ \lim_{n\to\infty}x_{2(k+1)n+k+1}=0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}x_{2(k+1)n+k+2}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}x_{2(k+1)n+k+3}=\infty,...,\ \lim_{n\to\infty}x_{2(k+1)n+2(k+1)}=\infty$$

olur.

İspat. Yukarıdaki kabulümüzden $x_0 x_{-(k+1)} - 1 > 1$, $x_{-1} x_{-(k+2)} - 1 > 1, \ldots,$ $x_{-k} x_{-(2k+1)} - 1 > 1$ alabiliriz. Yine $x_{-(2k+1)}, x_{-2k}, \ldots, x_0 > 0$ kabulümüz ve (3.1.2), (3.1.3), ..., (3.1.2k+3) eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-(2k+1)}}{\left(-1 + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-2k}}{\left(-1 + x_{-(k-1)} x_{-2k}\right)^{n+1}} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-(k+1)}}{\left(-1 + x_0 x_{-(k+1)}\right)^{n+1}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+2} = \lim_{n\to\infty} x_{-k} \left(-1 + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+3} = \lim_{n\to\infty} x_{-(k-1)} \left(-1 + x_{-(k-1)} x_{-2k}\right)^{n+1} = \infty,$$

$$\vdots$$

$$\prod_{n=0}^{s} x_{(2k+3)n+1} x_{(2k+3)n+2} \ldots x_{(2k+3)n+2k+3} = \left(\prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}\right)^{s+1}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.4. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a = 1$, $x_{-(2k+1)}, x_{-2k}, \ldots, x_0 > 0$ ve $1 < x_0 x_{-(k+1)} < 2$, $1 < x_{-1} x_{-(k+2)} < 2, \ldots,$ $1 < x_{-k} x_{-(2k+1)} < 2$ ise, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+1} = \infty,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2} = \infty, \ldots,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+1} = \infty$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+2} = 0,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+3} = 0, \ldots,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2(k+1)} = 0$$

olur.

İspat. $1 < x_0 x_{-(k+1)} < 2$, $1 < x_{-1} x_{-(k+2)} < 2$,..., $1 < x_{-k} x_{-(2k+1)} < 2$ olduğundan $0 < x_0 x_{-(k+1)} - 1 < 1,\ 0 < x_{-1} x_{-(k+2)} - 1 < 1, ...,\ 0 < x_{-k} x_{-(2k+1)} - 1 < 1$ yazılır. Buradan, $x_{-(2k+1)},\ x_{-2k}, ...,\ x_0 > 0$ kabulümüz ve (3.1.2), (3.1.3),..., (3.1.2k+3) eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-(2k+1)}}{\left(-1 + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-2k}}{\left(-1 + x_{-(k-1)} x_{-2k}\right)^{n+1}} = \infty,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-(k+1)}}{\left(-1 + x_0 x_{-(k+1)}\right)^{n+1}} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+2} = \lim_{n\to\infty} x_{-k} \left(-1 + x_{-k} x_{-(2k+1)}\right)^{n+1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+3} = \lim_{n\to\infty} x_{-(k-1)} \left(-1 + x_{-(k-1)} x_{-2k}\right)^{n+1} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \lim_{n\to\infty} x_0 \left(-1 + x_0 x_{-(k+1)}\right)^{n+1} = 0$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.5. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a = 1,\ x_{-(2k+1)}, x_{-2k}, ..., x_0 < 0$ ve $x_0 x_{-(k+1)} > 2,\ x_{-1} x_{-(k+2)} > 2, ...,\ x_{-k} x_{-(2k+1)} > 2$ ise, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+1} = 0,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2} = 0, ...,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+1} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+2} = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+3} = -\infty, ...,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2(k+1)} = -\infty$$

olur.

İspat. $x_0x_{-(k+1)}-1>1, x_{-1}x_{-(k+2)}-1>1,..., x_{-k}x_{-(2k+1)}-1>1$ yazabiliriz. $a=1$, $x_{-(2k+1)}$, x_{-2k},..., $x_0<0$ olduğundan ve (3.1.2), (3.1.3), ..., (3.1.2k+3) eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{-(2k+1)}}{\left(-1+x_{-k}x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{-2k}}{\left(-1+x_{-(k-1)}x_{-2k}\right)^{n+1}}=0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{-(k+1)}}{\left(-1+x_0x_{-(k+1)}\right)^{n+1}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+2}=\lim_{n\to\infty} x_{-k}\left(-1+x_{-k}x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}=-\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+3}=\lim_{n\to\infty} x_{-(k-1)}\left(-1+x_{-(k-1)}x_{-2k}\right)^{n+1}=-\infty,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2(k+1)}=\lim_{n\to\infty} x_0\left(-1+x_0x_{-(k+1)}\right)^{n+1}=-\infty$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.6. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$ (3.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a=1$, $x_{-(2k+1)}$, x_{-2k},..., $x_0<0$ ve $1<x_0x_{-(k+1)}<2$, $1<x_{-1}x_{-(k+2)}<2$, ..., $1<x_{-k}x_{-(2k+1)}<2$ ise, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+1}=-\infty,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2}=-\infty,...,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+1}=-\infty$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+2}=0,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+3}=0,...,\ \lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2(k+1)}=0$$

olur.

İspat. $1 < x_0 x_{-(k+1)} < 2,\ 1 < x_{-1}x_{-(k+2)} < 2, \ldots, 1 < x_{-k}x_{-(2k+1)} < 2$ olup, $0 < x_0 x_{-(k+1)} - 1 < 1,\ 0 < x_{-1}x_{-(k+2)} - 1 < 1, \ldots,\ 0 < x_{-k}x_{-(2k+1)} - 1 < 1$ yazarız. O zaman $a = 1,\ x_{-(2k+1)}, x_{-2k}, \ldots, x_0 < 0$ kabulümüz ve (3.1.2), (3.1.3),..., (3.1.2k+3) eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-(2k+1)}}{\left(-1 + x_{-k}x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}} = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-2k}}{\left(-1 + x_{-(k-1)}x_{-2k}\right)^{n+1}} = -\infty,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{-(k+1)}}{\left(-1 + x_0 x_{-(k+1)}\right)^{n+1}} = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+2} = \lim_{n\to\infty} x_{-k}\left(-1 + x_{-k}x_{-(2k+1)}\right)^{n+1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+k+3} = \lim_{n\to\infty} x_{-(k-1)}\left(-1 + x_{-(k-1)}x_{-2k}\right)^{n+1} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \lim_{n\to\infty} x_0\left(-1 + x_0 x_{-(k+1)}\right)^{n+1} = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. $s \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, (3.1.2), (3.1.3),..., (3.1.2k+3) eşitliklerinden

$$\prod_{n=0}^{s} x_{2(k+1)n+1}x_{2(k+1)n+2}\ldots x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \left(\prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i}\right)^{s+1}$$

eşitliğini yazarız.

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. Öncelikle $s = 0$ için doğru olduğunu gösterelim. (3.1.2), (3.1.3), ..., (3.1.2k+3) eşitliklerinden

$$x_1 = \frac{ax_{-(2k+1)}}{-a + x_{-k}x_{-(2k+1)}},\ x_2 = \frac{ax_{-2k}}{-a + x_{-(k-1)}x_{-2k}},\ \ldots,\ x_{k+1} = \frac{ax_{-(k+1)}}{-a + x_0 x_{-(k+1)}}$$

$$x_{k+2} = \frac{1}{a}x_{-k}\left(-a + x_{-k}x_{-(2k+1)}\right),\ x_{k+3} = \frac{1}{a}x_{-(k-1)}\left(-a + x_{-(k-1)}x_{-2k}\right),\ \ldots,$$

$$x_{2(k+1)} = \frac{1}{a}x_0\left(-a + x_0 x_{-(k+1)}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$x_1 x_2 \ldots x_{2(k+1)} = \prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i}$$

elde edilir. Yani, iddiamızın $s = 0$ için doğru olduğu görülür. Şimdi iddiamızı $s-1$ için doğru kabul edersek

$$\prod_{n=0}^{s-1} x_{2(k+1)n+1}x_{2(k+1)n+2}\ldots x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \left(\prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i}\right)^s \qquad (3.1.2k+12)$$

eşitliğini yazabiliriz. Yine (3.1.2), (3.1.3), ..., (3.1.2k+3) eşitliklerinden

$$x_{2(k+1)n+1}x_{2(k+1)n+2}\ldots x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i} \qquad (3.1.2k+13)$$

elde edilir. (3.1.2k+12) ve (3.1.2k+13) eşitliklerinden

$$\prod_{n=0}^{s} x_{2(k+1)n+1}x_{2(k+1)n+2}\ldots x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \left(\prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i}\right)^{s+1}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.7. i) Eğer $0 < \prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i} < 1$ ya da $-1 < \prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i} < 0$ ise, o zaman

$$\lim_{s \to \infty} \prod_{n=0}^{s} x_{2(k+1)n+1} x_{2(k+1)n+2} \dots x_{2(k+1)n+2(k+1)} = 0$$

dır.

ii) Eğer $\prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i} > 1$ ise, o zaman

$$\lim_{s \to \infty} \prod_{n=0}^{s} x_{2(k+1)n+1} x_{2(k+1)n+2} \dots x_{2(k+1)n+2(k+1)} = \infty$$

dır.

İspat. Teorem 3.1.2 den kolayca görülür.

Şimdi Teorem 3.1.1 in uygulaması olarak aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1.1 Denklem (3.1.1) $k = 1$ için x_0, x_{-1}, x_{-2} ve x_{-3} reel ve $x_{-1}x_{-3} \neq a$, $x_0 x_{-2} \neq a$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a x_{n-3}}{-a + x_{n-1} x_{n-3}} \tag{3.1.2k+14}$$

şekline dönüşür. Bu denklemin bütün çözümleri

$$x_{4n+1} = \frac{a^{n+1} x_{-3}}{\left(-a + x_{-1} x_{-3}\right)^{n+1}},$$

$$x_{4n+2} = \frac{a^{n+1} x_{-2}}{\left(-a + x_0 x_{-2}\right)^{n+1}},$$

$$x_{4n+3} = \frac{1}{a^{n+1}} x_{-1} \left(-a + x_{-1} x_{-3}\right)^{n+1},$$

$$x_{4n+4} = \frac{1}{a^{n+1}} x_0 \left(-a + x_0 x_{-2}\right)^{n+1}$$

şeklindedir.

Çözüm. İlk olarak iddiamızın $n=0$ için doğru olduğunu gösterelim. $x_{-1}x_{-3}\neq a$ ve $x_0x_{-2}\neq a$ olmak üzere, denklem (3.1.2k+14) de sırasıyla $n=0,1,2,3$ yazdığımızda

$$x_1=\frac{ax_{-3}}{-a+x_{-1}x_{-3}},$$

$$x_2=\frac{ax_{-2}}{-a+x_0x_{-2}},$$

$$x_3=\frac{ax_{-1}}{-a+x_1x_{-1}}=\frac{ax_{-1}}{-a+\dfrac{ax_{-3}}{-a+x_{-1}x_{-3}}x_{-1}}=\frac{1}{a}x_{-1}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right),$$

$$x_4=\frac{ax_0}{-a+x_2x_0}=\frac{ax_0}{-a+\dfrac{ax_{-2}}{-a+x_0x_{-2}}x_0}=\frac{1}{a}x_0\left(-a+x_0x_{-2}\right)$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu ise iddiamızın $n=0$ için doğru olduğunu gösterir. İddiamızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman

$$x_{4n-3}=\frac{a^nx_{-3}}{\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^n},$$

$$x_{4n-2}=\frac{a^nx_{-2}}{\left(-a+x_0x_{-2}\right)^n},$$

$$x_{4n-1}=\frac{1}{a^n}x_{-1}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^n,$$

$$x_{4n}=\frac{1}{a^n}x_0\left(-a+x_0x_{-2}\right)^n$$

eşitliklerini yazabiliriz. Denklem (3.1.2k+14) den

$$x_{4n+1}=\frac{ax_{4n-3}}{-a+x_{4n-1}x_{4n-3}}$$

eşitliğini elde ederiz. Bilinenleri yerine yazacak olursak

$$x_{4n+1}=\frac{a\dfrac{a^{n}x_{-3}}{\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}}}{-a+\dfrac{1}{a^{n}}x_{-1}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}\dfrac{a^{n}x_{-3}}{\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}}}$$

$$=\frac{\dfrac{a^{n+1}x_{-3}}{\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}}}{-a+x_{-1}x_{-3}}$$

$$=\frac{a^{n+1}x_{-3}}{\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n+1}}$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$x_{4n+3}=\frac{ax_{4n-1}}{-a+x_{4n+1}x_{4n-1}}$$

eşitliğini göz önüne alınırsa

$$x_{4n+3}=\frac{a\dfrac{1}{a^{n}}x_{-1}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}}{-a+\dfrac{a^{n+1}x_{-3}}{\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n+1}}\dfrac{1}{a^{n}}x_{-1}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}}$$

$$=\frac{\dfrac{x_{-1}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}}{a^{n-1}}}{-a+\dfrac{ax_{-1}x_{-3}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n}}{\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{a^{n+1}}x_{-1}\left(-a+x_{-1}x_{-3}\right)^{n+1}$$

elde ederiz. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2. $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{n-i}}$ **Fark Denkleminin Çözümleri ve Periyodikliği**

Bu kısımda a sıfırdan farklı bir reel sayı, k bir pozitif tam sayı, $x_{-(2k+2)}, x_{-(2k+1)},..., x_0$ reel başlangıç şartları ve $\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}\neq a$ olmak üzere;

$$x_{n+1}=\frac{ax_{n-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{n-i}},\ n=0,1,2,... \tag{3.2.1}$$

rasyonel fark denklemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir.

Teorem 3.2.1. $\{x_n\}_{n=-(2k+2)}^{\infty}$, (3.2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}\neq a$ ise, (3.2.1) denkleminin bütün çözümleri;

$$x_{(2k+3)n+1}=\begin{cases}\dfrac{ax_{-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}, & n \text{ çift ise}\\ x_{-(2k+2)}, & n \text{ tek ise}\end{cases}, \tag{3.2.2}$$

$$x_{(2k+3)n+2}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}x_{-(2k+1)}\left(-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}\right), & n \text{ çift ise}\\ x_{-(2k+1)}, & n \text{ tek ise}\end{cases}, \tag{3.2.3}$$

$$\vdots$$

$$x_{(2k+3)n+2k+2}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}x_{-1}\left(-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}\right), & n \text{ çift ise}\\ x_{-1}, & n \text{ tek ise}\end{cases}, \tag{3.2.2k+3}$$

$$x_{(2k+3)n+2k+3}=\begin{cases}\dfrac{ax_0}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}, & n\,\text{çift ise}\\ x_0, & n\,\text{tek ise}\end{cases} \tag{3.2.2k+4}$$

şeklindedir.

İspat. Eşitliklerin $n=0$ için doğru olduğunu gösterelim. Öncelikle yazım kolaylığı açısından $\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}=p$ alalım. Denklem (3.2.1) den $n=0,1,2,...,2k+2$ için

$$x_1=\frac{ax_{-(2k+2)}}{-a+p}$$

$$x_2=\frac{ax_{-(2k+1)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{1-i}}=\frac{ax_{-(2k+1)}}{-a+\frac{ax_{-(2k+2)}}{-a+p}x_0...x_{-(2k+1)}}=\frac{1}{a}x_{-(2k+1)}(-a+p)$$

$$\vdots$$

$$x_{2k+2}=\frac{ax_{-1}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{(2k+1)-i}}=\frac{ax_{-1}}{-a+x_{2k+1}x_{2k}...x_{-1}}=\frac{ax_{-1}}{-a+\frac{ap}{-a+p}}=\frac{1}{a}x_{-1}(-a+p)$$

$$x_{2k+3}=\frac{ax_0}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{2k+2-i}}=\frac{ax_0}{-a+x_{2k+2}x_{2k+1}...x_0}=\frac{ax_0}{-a+p}$$

eşitlikleri elde edilir. Yani iddiamız $n=0$ için doğrudur. Şimdi de eşitliklerin $n=1$ için doğru olduğunu gösterelim.

(3.2.1) denkleminden $n=2k+3,\ 2k+4,...,\ 4k+5$ için

$$x_{2k+4}=\frac{ax_1}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{2k+3-i}}=\frac{a\frac{ax_{-(2k+2)}}{-a+p}}{-a+\frac{ax_0}{-a+p}\frac{1}{a}x_{-1}(-a+p)...\frac{ax_{-(2k+2)}}{-a+p}}=x_{-(2k+2)}$$

$$x_{2k+5}=\frac{ax_2}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{2k+4-i}}=\frac{x_{-(2k+1)}(-a+p)}{-a+x_{-(2k+2)}\frac{ax_0}{-a+p}...\frac{1}{a}x_{-(2k+1)}(-a+p)}=x_{-(2k+1)}$$

$$\vdots$$

$$x_{4k+5} = \frac{ax_{2k+2}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2} x_{4k+4-i}} = \frac{x_{-1}\left(-a+p\right)}{-a+x_{-2}x_{-3}...x_{-(2k+2)}x_0x_{-1}} = x_{-1}$$

$$x_{4k+6} = \frac{ax_{2k+3}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2} x_{4k+5-i}} = \frac{\dfrac{a^2x_0}{-a+p}}{-a+x_{-1}x_{-2}...\dfrac{ax_0}{-a+p}} = x_0$$

elde edilir. Bu ise eşitliklerin $n=1$ için doğru olduğunu gösterir.

Şimdi eşitliklerin $n-1$ için doğru olduğu kabul edilirse

$$x_{(2k+3)n-(2k+2)} = \begin{cases} \dfrac{ax_{-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}}, n \text{ tek ise} \\ x_{-(2k+2)}, \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$x_{(2k+3)n-(2k+1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}x_{-(2k+1)}\left(-a+\prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}\right), n \text{ tek ise} \\ x_{-(2k+1)}, \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$x_{(2k+3)n-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}x_{-1}\left(-a+\prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}\right), n \text{ tek ise} \\ x_{-1}, \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$x_{(2k+3)n} = \begin{cases} \dfrac{ax_0}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}}, n \text{ tek ise} \\ x_0, \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Denklem (3.2.1) den

$$x_{(2k+3)n+1} = \frac{ax_{(2k+3)n-(2k+2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{(2k+3)n-i}} \tag{3.2.2k+5}$$

eşitliği yazılabilir. O zaman yukarıdaki eşitliklerden ve (3.2.2k+5) ten n nin tek olduğu durumlarda

$$x_{(2k+3)n+1} = \frac{\dfrac{a^2 x_{-(2k+2)}}{-a+p}}{-a + \dfrac{ax_{-(2k+2)}}{-a+p}\dfrac{1}{a}x_{-(2k+1)}\left(-a+p\right)\ldots\dfrac{ax_0}{-a+p}} = \frac{\dfrac{a^2 x_{-(2k+2)}}{-a+p}}{-a+\dfrac{ap}{-a+p}} = x_{-(2k+2)}$$

elde edilir. Buradan iddiamızın doğru olduğu görülür. n çift olduğu zaman (3.2.2k+5) denkleminde bilinenler yerine yazılacak olursa

$$x_{(2k+3)n+1} = \frac{ax_{-(2k+2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}}$$

bulunur. Yani,

$$x_{(2k+3)n+1} = \begin{cases} \dfrac{ax_{-(2k+2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}}, & n \text{ çift ise} \\ x_{-(2k+2)}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu ise iddiamızın doğru olduğunu gösterir.

Şimdi de

$$x_{(2k+3)n+2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} x_{-(2k+1)}\left(-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}\right), & n \text{ çift ise} \\ x_{-(2k+1)}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Denklem (3.2.1) den

$$x_{(2k+3)n+2} = \frac{ax_{(2k+3)n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{(2k+3)n-(i-1)}} \tag{3.2.2k+6}$$

denklemi elde edilir. Buradan n çift olduğu zaman, bir önceki ispat ettiğimiz eşitlik ve kabulümüzden

$$x_{(2k+3)n+2} = \frac{ax_{-(2k+1)}}{-a+\dfrac{ax_{-(2k+2)}}{-a+p}x_o x_{-1}\ldots x_{-(2k+1)}} = \frac{ax_{-(2k+1)}}{-a+\dfrac{ap}{-a+p}} = \frac{1}{a}x_{-(2k+1)}\left(-a+p\right)$$

elde edilir. n tek olduğu zaman ise

$$x_{(2k+3)n+2} = \frac{x_{-(2k+1)}\left(-a+p\right)}{-a+x_{-(2k+2)}x_o x_{-1}\ldots x_{-(2k+1)}} = x_{-(2k+1)}$$

bulunur. Yani,

$$x_{(2k+3)n+2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}x_{-(2k+1)}\left(-a+\displaystyle\prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i}\right), & n \text{ çift ise} \\ x_{-(2k+1)}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (3.2.4), (3.2.5),..., (3.2.2k+4) eşitliklerinin doğru olduğu gösterilebilir.

Sonuç 3.2.1. $\{x_n\}_{n=-(2k+2)}^{\infty}$, (3.2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a,\ x_{-(2k+2)},\ x_{-(2k+1)},\ldots,\ x_0 > 0$ ve $x_{-(2k+2)}x_{-(2k+1)}\ldots x_0 > a$ ise, o zaman (3.2.1) denkleminin bütün çözümleri pozitif olur.

İspat. İspat, (3.2.2), (3.2.3),..., (3.2.2k+4) eşitliklerinden görülür.

Sonuç 3.2.2. $\{x_n\}_{n=-(2k+2)}^{\infty}$, (3.2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a > 0$, $x_{-(2k+2)},\ x_{-(2k+1)},\ldots,\ x_0 < 0$ ve n çift ise, o zaman (3.2.1) denkleminin bütün çözümleri pozitif ve n tek alındığında bütün çözümler negatif olur.

İspat. İspat, (3.2.2), (3.2.3),..., (3.2.2k+4) eşitliklerinden görülür.

Sonuç 3.2.3. $\{x_n\}_{n=-(2k+2)}^{\infty}$, (3.2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a<0$, $x_{-(2k+2)}, x_{-(2k+1)},..., x_0<0$, $x_{-(2k+2)}x_{-(2k+1)}...x_0>a$ ve n çift ise, o zaman (3.2.1) denkleminin bütün çözümleri pozitif ve n tek alındığında bütün çözümler negatif olur.

İspat. İspat, (3.2.2), (3.2.3),..., (3.2.2k+4) eşitliklerinden görülür.

Sonuç 3.2.4. $\{x_n\}_{n=-(2k+2)}^{\infty}$, (3.2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a<0$, $x_{-(2k+2)}, x_{-(2k+1)},..., x_0>0$ ve n çift ise, o zaman (3.2.1) denkleminin bütün çözümleri negatif ve n tek alındığında ise pozitif olur.

İspat. İspat, (3.2.2), (3.2.3),..., (3.2.2k+4) eşitliklerinden görülür.

Sonuç 3.2.5. (3.2.1) denkleminin çözümleri $4k+6$ periyotludur.

İspat. İspat, (3.2.2), (3.2.3),..., (3.2.2k+4) eşitliklerinden görülür.

Teorem 3.2.2. $s\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere (3.2.2), (3.2.3),…, (3.2.2k+4) eşitlikleri için, n çift iken

$$\prod_{n=0}^{s} x_{(2k+3)n+1}x_{(2k+3)n+2}...x_{(2k+3)n+2k+3}=\left(\frac{a\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}\right)^{s+1}$$

ve n tek iken

$$\prod_{n=0}^{s} x_{(2k+3)n+1}x_{(2k+3)n+2}...x_{(2k+3)n+2k+3}=\left(\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}\right)^{s+1}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. Önce $s=0$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Teorem 3.2.1 den

$$x_1=\frac{ax_{-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}},\quad x_2=\frac{1}{a}x_{-(2k+1)}\left(-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}\right),\ldots,$$

$$x_{2k+2}=\frac{1}{a}x_{-1}\left(-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}\right),\quad x_{2k+3}=\frac{ax_0}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$x_1x_2\ldots x_{2k+3}=\frac{a\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}$$

bulunur. Yani, $s=0$ için iddiamız doğrudur. Eşitliklerin $s-1$ için doğru olduğunu kabul edecek olursak

$$\prod_{n=0}^{s-1}x_{(2k+3)n+1}x_{(2k+3)n+2}\ldots x_{(2k+3)n+2k+3}=\left(\frac{a\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}\right)^{s}$$

yazılabilir. Yine, Teorem 3.2.1 den

$$x_{(2k+3)n+1}x_{(2k+3)n+2}\ldots x_{(2k+3)n+2k+3}=\frac{a\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}$$

eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki bu iki eşitlikten

$$\prod_{n=0}^{s}x_{(2k+3)n+1}x_{(2k+3)n+2}\ldots x_{(2k+3)n+2k+3}=\left(\frac{a\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{-i}}\right)^{s+1}$$

elde edilir. Bu da iddiamızın *s* için doğru olduğunu gösterir. Aynı şekilde *n* tek iken

$$\prod_{n=0}^{s} x_{(2k+3)n+1} x_{(2k+3)n+2} \dots x_{(2k+3)n+2k+3} = \left(\prod_{i=0}^{2k+2} x_{-i} \right)^{s+1}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.1 in bir uygulaması olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.2.1. (3.2.1) denklemi $a=1$ ve $k=0$ için, x_0, x_{-1}, x_{-2} reel başlangıç şartları ve $x_0 x_{-1} x_{-2} \neq 1$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{-1 + x_n x_{n-1} x_{n-2}} \tag{3.2.2k+7}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin bütün çözümleri

$$x_{3n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_{-2}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}}, & n \text{ çift ise} \\ x_{-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$x_{3n+2} = \begin{cases} x_{-1}\left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}\right), & n \text{ çift ise} \\ x_{-1}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$x_{3n+3} = \begin{cases} \dfrac{x_0}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}}, & n \text{ çift ise} \\ x_0, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Çözüm. $x_0 x_{-1} x_{-2} \neq 1$ olmak üzere (3.2.2k+7) denkleminde $n = 0,1,2,3,4,5$ değerleri sırasıyla verildiğinde

$$x_1 = \frac{x_{-2}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}},$$

$$x_2=\frac{x_{-1}}{-1+x_1x_0x_{-1}}=\frac{x_{-1}}{-1+\dfrac{x_{-2}}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}}=x_{-1}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right),$$

$$x_3=\frac{x_0}{-1+x_2x_1x_0}=\frac{x_0}{-1+x_{-1}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)\dfrac{x_{-2}}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}x_0}=\frac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}},$$

$$x_4=\frac{x_1}{-1+x_3x_2x_1}=\frac{\dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}}{\dfrac{x_{-2}}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}x_{-1}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)\dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}}=x_{-2},$$

$$x_5=\frac{x_2}{-1+x_4x_3x_2}=\frac{x_{-1}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)}{-1+x_{-2}\dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}x_{-1}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)}=x_{-1},$$

$$x_6=\frac{x_3}{-1+x_5x_4x_3}=\frac{\dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}}{-1+x_{-1}x_{-2}\dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}}=x_0$$

elde edilir. Bu ise eşitliklerin $n=0$ ve $n=1$ için doğru olduğunu gösterir.

Eşitliklerin $n-1$ için doğru olduğunu kabul edersek

$$x_{3n-2}=\begin{cases}\dfrac{x_{-2}}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n \text{ tek ise}\\ x_{-2}, & n \text{ çift ise}\end{cases}$$

$$x_{3n-1}=\begin{cases}x_{-1}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right), & n \text{ tek ise}\\ x_{-1}, & n \text{ çift ise}\end{cases}$$

$$x_{3n} = \begin{cases} \dfrac{x_0}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}}, & n \text{ tek ise} \\ x_0, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Denklem (3.2.2k+7) den

$$x_{3n+1} = \frac{x_{3n-2}}{-1 + x_{3n} x_{3n-1} x_{3n-2}}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde n tek olduğu zaman yukarıdaki eşitlikler yerine yazıldığında

$$x_{3n+1} = \frac{\dfrac{x_{-2}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}}}{-1 + \dfrac{x_0}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}} x_{-1} \left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}\right) \dfrac{x_{-2}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}}} = x_{-2}$$

elde edilir. Yine, n çift olduğunda

$$x_{3n+1} = \frac{x_{-2}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}}$$

elde edilir. Yani,

$$x_{3n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_{-2}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2}}, & n \text{ çift ise} \\ x_{-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

bulunur. Bu ise iddiamızın doğru olduğunu gösterir. Diğer eşitlikler de benzer yolla gösterilir.

3.3. $x_{n+1}=\dfrac{(-1)^n x_{n-2k}}{1+(-1)^n\prod_{i=0}^{2k}x_{n-i}}$ Fark Denkleminin Çözümleri, Periyodikliği ve Salınımlılığı

Bu kısımda k pozitif tek bir tamsayı, $x_{-2k}, x_{-(2k-1)}, \dots, x_0$ reel başlangıç şartları ve $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{(-1)^n x_{n-2k}}{1+(-1)^n\prod_{i=0}^{2k}x_{n-i}} \tag{3.3.1}$$

rasyonel fark denkleminin çözümleri incelenmiştir. Öncelikle bu çözümleri bulmak için kullanılan üç lemma ifade ve ispat edilmiştir.

Lemma 3.3.1. Eğer $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ ise,

$$x_1=\frac{x_{-2k}}{1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}},\ x_2=-x_{-(2k-1)}\left(1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}\right),$$

$$x_3=\frac{x_{-(2k-2)}}{1-\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}},\ x_4=-x_{-(2k-3)}\left(1-\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}\right),\dots,$$

$$x_{2k-2}=\frac{x_{-3}}{1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}},\ x_{2k-1}=-x_{-2}\left(1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}\right)$$

$$x_{2k}=\frac{x_{-1}}{1-\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}},\ x_{2k+1}=-x_0\left(1-\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}\right)$$

eşitlikleri doğrudur. Ayrıca $\prod_{i=0}^{2k-3} x_{i+4} = \prod_{i=0}^{2k-3} x_{-i}$ eşitliği de yazılabilir.

İspat. $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ olmak üzere, (3.3.1) denkleminde $n = 0,1,...,2k$ değerleri için basit iterasyon uygulandığında eşitlikler görülür.

Lemma 3.3.2. Eğer $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ ise,

$$x_{2k+5} = -x_{-(2k-3)},\ x_{2k+6} = \frac{x_{-(2k-4)}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}},$$

$$x_{2k+7} = -x_{-(2k-5)}, x_{2k+8} = \frac{x_{-(2k-6)}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}},$$

$$x_{2k+9} = -x_{-(2k-7)},...,\ x_{4k-1} = -x_{-3},\ x_{4k} = \frac{x_{-2}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}},$$

$$x_{4k+1} = -x_{-1},\ x_{4k+2} = \frac{x_{0}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}$$

eşitlikleri doğrudur. Ayrıca $\prod_{i=2k+1}^{4k-2} x_{i+4} = \prod_{i=0}^{2k-3} x_{-i}$ eşitliği de yazılabilir.

İspat. $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ olmak üzere, (3.3.1) denkleminde $n = 2k+4,\ 2k+5,...,$ $4k+1$ değerleri için basit iterasyon uygulandığında eşitlikler görülür.

Lemma 3.3.3. Eğer $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ ise,

$$x_{4k+6} = -x_{-(2k-3)}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right),\ x_{4k+7} = \frac{-x_{-(2k-4)}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}\ ,$$

$$x_{4k+8} = -x_{-(2k-5)}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right),\ x_{4k+9} = \frac{x_{-(2k-6)}}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}$$

$$x_{4k+10} = x_{-(2k-7)}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right),...,\ x_{6k} = x_{-3}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right),$$

$$x_{6k+1} = \frac{-x_{-2}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}},\ x_{6k+2} = -x_{-1}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right),\ x_{6k+3} = \frac{x_0}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}$$

eşitlikleri doğrudur. Ayrıca $\prod_{i=4k+2}^{6k-1} x_{i+4} = \prod_{i=0}^{2k-3} x_{-i}$ eşitliği de yazılabilir.

İspat. $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ olmak üzere, (3.3.1) denkleminde $n = 4k+5,\ 4k+6,...,$ $6k+2$ değerleri için basit iterasyon uygulandığında eşitlikler görülür.

Teorem 3.3.1. $\{x_n\}_{n=-2k}^{\infty}$, (3.3.1) denkleminin bir çözümü olsun. k pozitif tek bir tamsayı, m de $1 \leq m \leq 2k+1$ şartını sağlayan bir tamsayı ve $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} \neq \pm 1$ olmak üzere, (3.3.1) denkleminin bütün çözümleri

$m \equiv 1(\bmod 4)$ *için*

$$x_{(2k+1)n+m} = \begin{cases} \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 0(\bmod 4) \\ \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 1(\bmod 4) \\ -\dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 2(\bmod 4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 3(\bmod 4) \end{cases} \tag{3.3.2}$$

$m \equiv 2(\bmod 4)$ *için*

$$x_{(2k+1)n+m} = \begin{cases} -x_{-[2k-(m-1)]}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 0(\bmod 4) \\ -x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 1(\bmod 4) \\ -x_{-[2k-(m-1)]}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 2(\bmod 4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 3(\bmod 4) \end{cases} \tag{3.3.3}$$

$m \equiv 3(\bmod 4)\, için$

$$x_{(2k+1)n+m} = \begin{cases} \dfrac{-x_{-[2k-(m-1)]}}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 0(\bmod 4) \\ \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 1(\bmod 4) \\ \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 2(\bmod 4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 3(\bmod 4) \end{cases} \tag{3.3.4}$$

$m \equiv 0(\bmod 4)\, için$

$$x_{(2k+1)n+m} = \begin{cases} x_{-[2k-(m-1)]}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 0(\bmod 4) \\ -x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 1(\bmod 4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 2(\bmod 4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 3(\bmod 4) \end{cases} \tag{3.3.5}$$

şeklindedir.

İspat. İspatı tümevarım metoduyla yapalım. İlk olarak Lemma 3.3.1 den $n=0$ ve $m=1$ için

$$x_1 = \frac{x_{-2k}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}},$$

$n=0$ ve $m=2$ için

$$x_2 = -x_{-(2k-1)}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right),$$

$n=0$ ve $m=3$ için

$$x_3 = \frac{x_{-(2k-2)}}{1-\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}$$

$n=0$ ve $m=4$ için

$$x_4 = -x_{-(2k-3)}\left(1-\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)$$

olduğu görülür.

Şimdi iddiamızın $n=1$ ve $m=1,2,3,4$ değerleri için doğru olduğunu gösterelim. Yazım kolaylığı açısından $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} = p$ alalım. (3.3.1) denkleminden $n=2k+1$ için

$$x_{2k+2} = \frac{-x_1}{1-\prod_{i=0}^{2k} x_{2k+1-i}}$$

elde edilir. Lemma 3.3.1 den

$$x_{2k+2} = \frac{\frac{-x_{-2k}}{1+p}}{1-\left[-x_0(1-p)\right]\frac{x_{-1}}{1-p}\left[-x_{-2}(1+p)\right]\frac{x_{-3}}{1+p}\cdots\frac{x_{-(2k-2)}}{1-p}\left[-x_{-(2k-1)}(1+p)\right]\frac{x_{-2k}}{1+p}}$$

$$= \frac{\frac{-x_{-2k}}{1+p}}{1+\frac{p}{1-p}} = \frac{x_{-2k}(-1+p)}{1+p}$$

bulunur. Yani, $n=1$ ve $m=1$ için

$$x_{2k+2}=\frac{x_{-2k}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}\right)}{1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}} \tag{3.3.6}$$

olur.

(3.3.1) denkleminden $n=2k+2$ için

$$x_{2k+3}=\frac{x_2}{1+\prod_{i=0}^{2k}x_{2k+2-i}}$$

elde edilir. (3.3.6) eşitliğinden ve Lemma 3.3.1 den

$$x_{2k+3}=\frac{-x_{-(2k-1)}\left(1+p\right)}{1+\frac{x_{-2k}\left(-1+p\right)}{1+p}\left[-x_0\left(1-p\right)\right]\frac{x_{-1}}{1-p}\left[-x_{-2}\left(1+p\right)\right]\frac{x_{-3}}{1+p}\cdots\frac{x_{-(2k-2)}}{1-p}\left[-x_{-(2k-1)}\left(1+p\right)\right]}$$

$$=\frac{-x_{-(2k-1)}\left(1+p\right)}{1+p}$$

bulunur. Böylece $n=1$ ve $m=2$ için

$$x_{2k+3}=-x_{-(2k-1)} \tag{3.3.7}$$

elde edilir.

(3.3.1) denkleminden $n=2k+3$ için

$$x_{2k+4}=\frac{-x_3}{1-\prod_{i=0}^{2k}x_{2k+3-i}}$$

elde edilir. (3.3.6), (3.3.7) eşitliklerinden ve Lemma 3.3.1 den

$$x_{2k+4}=\frac{-\dfrac{x_{-(2k-2)}}{1-p}}{1-\left[-x_{-(2k-1)}\right]\dfrac{x_{-2k}\left(-1+p\right)}{1+p}\left[-x_0\left(1-p\right)\right]\dfrac{x_{-1}}{1-p}\left[-x_{-2}\left(1+p\right)\right]\dfrac{x_{-3}}{1+p}\cdots\dfrac{x_{-(2k-2)}}{1-p}}$$

$$=\frac{-\dfrac{x_{-(2k-2)}}{1-p}}{1-\dfrac{p}{1+p}}=\frac{x_{-(2k-2)}\left(1+p\right)}{-1+p}$$

bulunur. Böylece $n=1$ ve $m=3$ için

$$x_{2k+4}=\frac{x_{-(2k-2)}\left(1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}\right)}{-1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}} \tag{3.3.8}$$

elde edilir.

Son olarak Lemma 3.2.2 den $n=1$ ve $m=4$ için

$$x_{2k+5}=-x_{-(2k-3)} \tag{3.3.9}$$

olduğu görülür.

Şimdi eşitliklerin $n=2$ ve $m=1,2,3,4$ için doğru olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak (3.3.1) denkleminden $n=4k+2$ için

$$x_{4k+3}=\frac{x_{2k+2}}{1+\prod_{i=0}^{2k}x_{4k+2-i}}$$

denklemi elde edilir. O zaman (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) eşitliklerinden ve Lemma 3.3.2 den

$$x_{4k+3}=\frac{\dfrac{x_{-2k}\left(-1+p\right)}{1+p}}{1+\dfrac{x_0\left(1+p\right)}{-1+p}\left[-x_{-1}\right]\dfrac{x_{-2}\left(-1+p\right)}{1+p}\left[-x_{-3}\right]\ldots\dfrac{x_{-(2k-2)}\left(1+p\right)}{-1+p}\left[-x_{-(2k-1)}\right]\dfrac{x_{-2k}\left(-1+p\right)}{1+p}}$$

$$=\frac{\dfrac{x_{-2k}\left(-1+p\right)}{1+p}}{1-p}=\frac{-x_{-2k}}{1+p}$$

bulunur. Buradan $n=2$ ve $m=1$ için

$$x_{4k+3}=\frac{-x_{-2k}}{1+\prod_{i=0}^{2k}x_{-i}} \tag{3.3.10}$$

olur. İkinci olarak $n=2$ ve $m=2$ için (3.3.1) denkleminden $n=4k+3$ için

$$x_{4k+4}=\frac{-x_{2k+3}}{1-\prod_{i=0}^{2k}x_{4k+3-i}}$$

denklemi elde edilir. (3.3.7), (3.3.8), (3.3.10) eşitliklerinden ve Lemma 3.3.2 den

$$x_{4k+4}=\frac{x_{-(2k-1)}}{1-\left[\dfrac{-x_{-2k}}{1+p}\right]\dfrac{x_0\left(1+p\right)}{-1+p}\left[-x_{-1}\right]\dfrac{x_{-2}\left(-1+p\right)}{1+p}\left[-x_{-3}\right]\ldots\dfrac{x_{-(2k-2)}\left(1+p\right)}{-1+p}\left[-x_{-(2k-1)}\right]}$$

$$=\frac{x_{-(2k-1)}}{\dfrac{-1}{-1+p}}=-x_{-(2k-1)}\left(-1+p\right)$$

bulunur. Yani,

$$x_{4k+4} = -x_{-(2k-1)}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right) \tag{3.3.11}$$

elde edilir.

Yine (3.3.1) denkleminden $n = 4k+4$ için

$$x_{4k+5} = \frac{x_{2k+4}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{4k+4-i}}$$

bulunur. Bu denklemde (3.3.8), (3.3.10), (3.3.11) eşitlikleri yerine yazılır ve Lemma 3.3.2 göz önüne alınırsa

$$x_{4k+5} = \frac{\dfrac{x_{-(2k-2)}(1+p)}{-1+p}}{1+\left[-x_{-(2k-1)}(-1+p)\right]\left[\dfrac{-x_{-2k}}{1+p}\right]\dfrac{x_0(1+p)}{-1+p}\left[-x_{-1}\right]\dfrac{x_{-2}(-1+p)}{1+p}\left[-x_{-3}\right]\cdots\dfrac{x_{-(2k-2)}(1+p)}{-1+p}}$$

$$= \frac{\dfrac{x_{-(2k-2)}(1+p)}{-1+p}}{1+p} = \frac{x_{-(2k-2)}}{-1+p}$$

elde edilir. Buradan $n = 2$ ve $m = 3$ için

$$x_{4k+5} = \frac{x_{-(2k-2)}}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}} \tag{3.3.12}$$

olur.

Son olarak Lemma 3.3.3 ten $n = 2$ ve $m = 4$ için

$$x_{4k+6} = x_{-(2k-3)}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right) \tag{3.3.13}$$

olduğu görülür.

Şimdi de eşitliklerin $n=3$ ve $m=1,2,3,4$ için doğru olduğunu gösterelim. $n=3$ ve $m=1$ için (3.3.1) denkleminden $n=6k+3$ için

$$x_{6k+4}=\frac{-x_{4k+3}}{1-\prod_{i=0}^{2k}x_{6k+3-i}}$$

elde edilir. (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12) eşitliklerinden ve Lemma 3.3.3 ten

$$x_{6k+4}=\frac{\frac{x_{-2k}}{1+p}}{1-\frac{x_0}{-1+p}\left[-x_{-1}\left(-1+p\right)\right]\left[\frac{-x_{-2}}{1+p}\right]x_{-3}\left(1+p\right)...\frac{x_{-(2k-2)}}{-1+p}\left[-x_{-(2k-1)}\left(-1+p\right)\right]\frac{x_{-2k}}{1+p}}$$

$$=\frac{\frac{x_{-2k}}{1+p}}{\frac{1}{1+p}}=x_{-2k}$$

olup

$$x_{6k+4}=x_{-2k} \tag{3.3.14}$$

elde edilir.

$n=3$ ve $m=2$ için (3.3.1) denkleminden $n=6k+4$ için

$$x_{6k+5}=\frac{x_{4k+4}}{1+\prod_{i=0}^{2k}x_{6k+4-i}}$$

elde edilir. (3.3.11), (3.3.12), (3.3.14) eşitliklerinden ve Lemma 3.3.3 ten

$$x_{6k+5}=\frac{-x_{-(2k-1)}\left(-1+p\right)}{1+x_{-2k}\frac{x_0}{-1+p}\left[-x_{-1}\left(-1+p\right)\right]\left[\frac{-x_{-2}}{1+p}\right]x_{-3}\left(1+p\right)...\frac{x_{-(2k-2)}}{-1+p}\left[-x_{-(2k-1)}\left(-1+p\right)\right]}$$

$$= \frac{-x_{-(2k-1)}\left(-1+p\right)}{1-p} = x_{-(2k-1)}$$

bulunur. Yani,

$$x_{6k+5} = x_{-(2k-1)} \tag{3.3.15}$$

elde edilir.

$n=3$ ve $m=3$ için (3.3.1) denkleminden $n=6k+5$ için

$$x_{6k+6} = \frac{-x_{4k+5}}{1-\prod_{i=0}^{2k} x_{6k+5-i}}$$

elde edilir. (3.3.12), (3.3.14), (3.3.15) eşitliklerinden ve Lemma 3.3.3 ten

$$x_{6k+6} = \frac{-\dfrac{x_{-(2k-2)}}{-1+p}}{1-x_{-(2k-1)}x_{-2k}\dfrac{x_0}{-1+p}\left[-x_{-1}\left(-1+p\right)\right]\left[\dfrac{-x_{-2}}{1+p}\right]x_{-3}\left(1+p\right)\ldots\dfrac{x_{-(2k-2)}}{-1+p}}$$

$$= \frac{-\dfrac{x_{-(2k-2)}}{-1+p}}{\dfrac{-1}{-1+p}} = x_{-(2k-2)}$$

bulunur. Böylece

$$x_{6k+6} = x_{-(2k-2)} \tag{3.3.16}$$

elde edilir.

$n=3$ ve $m=4$ için (3.3.1) denkleminden $n=6k+6$ için

$$x_{6k+7} = \frac{x_{4k+6}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{6k+6-i}}$$

eşitliği elde edilir. (3.3.14), (3.3.15), (3.3.16) eşitliklerinden ve Lemma 3.3.3 ten

$$x_{6k+7} = \frac{x_{-(2k-3)}\left(1+p\right)}{1+x_{-(2k-2)}x_{-(2k-1)}x_{-2k}\dfrac{x_0}{-1+p}\left[-x_{-1}\left(-1+p\right)\right]\left[\dfrac{-x_{-2}}{1+p}\right]x_{-3}\left(1+p\right)\ldots}$$

$$= \frac{x_{-(2k-3)}\left(1+p\right)}{1+p}$$

olup

$$x_{6k+7} = x_{-(2k-3)} \tag{3.3.17}$$

bulunur.

Şimdi de eşitliklerin $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) eşitliklerinden

$m \equiv 1(\bmod 4)$ *için*

$$x_{(2k+1)n-(2k+1-m)} = \begin{cases} \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 1(\bmod 4) \\[2ex] \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 2(\bmod 4) \\[2ex] -\dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 3(\bmod 4) \\[2ex] x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 0(\bmod 4) \end{cases} \tag{3.3.18}$$

$m \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\, için$

$$x_{(2k+1)n-(2k+1-m)} = \begin{cases} -x_{-[2k-(m-1)]}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \\ -x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \\ -x_{-[2k-(m-1)]}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \end{cases} \tag{3.3.19}$$

$m \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\, için$

$$x_{(2k+1)n-(2k+1-m)} = \begin{cases} \dfrac{-x_{-[2k-(m-1)]}}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \\ \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \\ \dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}}, & n \equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \end{cases} \tag{3.3.20}$$

$m \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\, için$

$$x_{(2k+1)n-(2k+1-m)} = \begin{cases} x_{-[2k-(m-1)]}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \\ -x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right), & n \equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \\ x_{-[2k-(m-1)]}, & n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \end{cases} \tag{3.3.21}$$

eşitlikleri yazılır.

Yine (3.3.1) denkleminden

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{(-1)^{(2k+1)n+(1-m)} x_{(2k+1)n-(2k+1-m)}}{1+(-1)^{(2k+1)n+(1-m)} \prod_{i=0}^{2k} x_{(2k+1)n-(i+1-m)}} \tag{3.3.22}$$

denklemi elde edilir.

$n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ ve $m \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ için (3.3.22) denkleminden

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{-x_{(2k+1)n-(2k+1-m)}}{1-\prod_{i=0}^{2k} x_{(2k+1)n-(i+1-m)}}$$

elde edilir. Buradan, s pozitif bir tamsayı olmak üzere $m = 4s+1$ olduğundan

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{-x_{(2k+1)n-(2k-4s)}}{1-x_{(2k+1)n-(-4s)}x_{(2k+1)n-(1-4s)}\dots x_{(2k+1)n-(2k-2-4s)}x_{(2k+1)n-(2k-1-4s)}x_{(2k+1)n-(2k-4s)}}$$

eşitliği yazılabilir. (3.3.18), (3.3.19), (3.3.20), (3.3.21) eşitliklerinden ve $k \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$, $m \leq 2k+1$ olduğundan

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{-\dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{1+p}}{1-\dfrac{p}{-1+p}} = \frac{-\dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{1+p}}{\dfrac{-1}{-1+p}}$$

olup

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{x_{-[2k-(m-1)]}\left(-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}} \tag{3.3.23}$$

elde edilir.

İkinci olarak $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ve $m \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ için

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{x_{(2k+1)n-(2k-4s)}}{1 + x_{(2k+1)n+1-(-4s)} x_{(2k+1)n-(-4s)} x_{(2k+1)n-(1-4s)} \ldots x_{(2k+1)n-(2k-2-4s)} x_{(2k+1)n-(2k-1-4s)}}$$

yazılabilir. (3.3.18), (3.3.19), (3.3.20), (3.3.21), (3.3.23) eşitliklerinden

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{-x_{-[2k-(m-1)]}(1+p)}{1+p}$$

olup

$$x_{(2k+1)n+m} = -x_{-[2k-(m-1)]} \tag{3.3.24}$$

elde edilir.

Yine $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ve $m \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ için

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{-x_{(2k+1)n-(2k-4s)}}{1 - x_{(2k+1)n+2-(-4s)} x_{(2k+1)n+1-(-4s)} x_{(2k+1)n-(-4s)} x_{(2k+1)n-(1-4s)} \ldots x_{(2k+1)n-(2k-2-4s)}}$$

yazılabilir. (3.3.18), (3.3.19), (3.3.20), (3.3.21), (3.3.23) ve (3.3.24) eşitliklerinden

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{-\dfrac{x_{-[2k-(m-1)]}}{-1+p}}{1-\dfrac{p}{1+p}} = \frac{x_{-[2k-(m-1)]}(1+p)}{-1+p}$$

olup

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{x_{-[2k-(m-1)]}\left(1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}\right)}{-1+\prod_{i=0}^{2k} x_{-i}} \tag{3.3.25}$$

elde edilir.

Son olarak $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ve $m \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ için

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{x_{(2k+1)n-(2k-4s)}}{1 + x_{(2k+1)n+3-(-4s)} x_{(2k+1)n+2-(-4s)} x_{(2k+1)n+1-(-4s)} x_{(2k+1)n-(-4s)} x_{(2k+1)n-(1-4s)} \cdots}$$

yazılabilir. (3.3.18), (3.3.19), (3.3.20), (3.3.21), (3.3.23), (3.3.24) ve (3.3.25) eşitliklerinden

$$x_{(2k+1)n+m} = \frac{-x_{-[2k-(m-1)]}(1-p)}{1-p}$$

olup

$$x_{(2k+1)n+m} = -x_{-[2k-(m-1)]} \qquad (3.3.26)$$

elde edilir.

Böylece $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ için (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) eşitliklerinin doğru olduğunu gösterdik. Benzer şekilde eşitliklerin $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)$, $n \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$, $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)$ için doğru olduğu gösterilebilir. Teorem 3.3.1 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.1. (3.3.1) denkleminin bütün çözümleri $8k+4$ periyotludur.

Teorem 3.3.2 $k > 1$, $x_{-2k}, x_{-(2k-1)}, ..., x_0 > \bar{x}$ ve $\prod_{i=0}^{2k} x_{-i} > 1$ olmak üzere, (3.3.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-2k}^{\infty}$ çözümü, $\bar{x} = 0$ denge noktası civarında salınımlıdır ve (3.3.1) denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Her pozitif yarı dönme 1, 2 ya da 2k+3 uzunluğundadır,

ii) Her negatif yarı dönme 1 ya da 2 uzunluğundadır,

iii) 1 uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi 1 ya da 2 uzunluğunda negatif yarı dönme takip eder,

iv) 2 uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi 2 uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder,

v) 2k+3 uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi 2 uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder,

vi) 1 uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi 1 uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder,

vii) 2 uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi 1, 2 ya da 2k+3 uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat. (3.3.1) denkleminin çözümleri için P pozitif bir çözümü, N de negatif bir çözümü belirtmek üzere, (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) eşitliklerinden

$x_1, x_5, x_9, ..., x_{2k-1} > \bar{x}$ P

$x_2, x_6, x_{10}, ..., x_{2k} < \bar{x}$ N

$x_3, x_7, x_{11}, ..., x_{2k+1} < \bar{x}$ N

$x_4, x_8, x_{12}, ..., x_{2k-2} > \bar{x}$ P

$x_{2k+2}, x_{2k+6}, x_{2k+10}, ..., x_{4k} > \bar{x}$ P

$x_{2k+3}, x_{2k+7}, x_{2k+11}, ..., x_{4k+1} < \bar{x}$ N

$x_{2k+4}, x_{2k+8}, x_{2k+12}, ..., x_{4k+2} > \bar{x}$ P

$x_{2k+5}, x_{2k+9}, x_{2k+13}, ..., x_{4k-1} < \bar{x}$ N

$x_{4k+3}, x_{4k+7}, x_{4k+11}, ..., x_{6k+1} < \bar{x}$ N

$x_{4k+4}, x_{4k+8}, x_{4k+12}, ..., x_{6k+2} < \bar{x}$ N

$x_{4k+5}, x_{4k+9}, x_{4k+13}, ..., x_{6k+3} > \bar{x}$ P

$x_{4k+6}, x_{4k+10}, x_{4k+14}, ..., x_{6k} > \bar{x}$ P

$x_{6k+4}, x_{6k+8}, x_{6k+12}, ..., x_{8k+2} > \bar{x}$ P

$x_{6k+5}, x_{6k+9}, x_{6k+13}, ..., x_{8k+3} > \bar{x}$ P

$x_{6k+6}, x_{6k+10}, x_{6k+14}, ..., x_{8k+4} > \bar{x}$ P

$x_{6k+7}, x_{6k+11}, x_{6k+15}, ..., x_{8k+1} > \bar{x}$ P

elde edilir. Buradan

$$\underbrace{\text{PNNPPNN...PPNN}}_{2k+1}\ \underbrace{\text{PNPNPN...NP}}_{2k+1}\ \underbrace{\text{NNPPNNPP...PPNNP}}_{2k+1}\ \underbrace{\text{PPP...PP}}_{2k+1}$$

olduğu görülür. Ayrıca Sonuç 3.1.1 den çözümlerin 8k+4 periyotlu olduğu biliniyor. Bu durumda denklemin çözümlerinin hepsi birden ne negatif ne de pozitif olduğundan çözümler $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır. Yine yukarıda oluşan döngüden teoremin ifadesinin doğru olduğu görülür.

Teorem 3.3.1 in bir uygulaması olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.3.1. $x_0x_{-1}x_{-2} \neq \pm 1$ olmak üzere (3.3.1) denklemi $k = 1$ için

$$x_{n+1} = \frac{\cos(n\pi)x_{n-2}}{1+\cos(n\pi)x_n x_{n-1} x_{n-2}} \tag{3.3.27}$$

denklemine dönüşür. O zaman $n = 0,1,2...$ için (3.3.27) denkleminin bütün çözümleri

$$x_{3n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_{-2}}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 4) \\ \dfrac{x_{-2}(-1+x_0x_{-1}x_{-2})}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n \equiv 1 \,(\operatorname{mod} 4) \\ -\dfrac{x_{-2}}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n \equiv 2 \,(\operatorname{mod} 4) \\ x_{-2}, & n \equiv 3 \,(\operatorname{mod} 4) \end{cases}, \tag{3.3.28}$$

$$x_{3n+2} = \begin{cases} -x_{-1}(1+x_0x_{-1}x_{-2}), & n \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 4) \\ -x_{-1}, & n \equiv 1 \,(\operatorname{mod} 4) \\ -x_{-1}(-1+x_0x_{-1}x_{-2}), & n \equiv 2 \,(\operatorname{mod} 4) \\ x_{-1}, & n \equiv 3 \,(\operatorname{mod} 4) \end{cases}, \tag{3.3.29}$$

$$x_{3n+3}=\begin{cases}\dfrac{-x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)\\ \dfrac{x_0(1+x_0x_{-1}x_{-2})}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ \dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)\\ x_0, & n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}, \tag{3.3.30}$$

şeklindedir.

Çözüm. (3.3.27) denkleminde sırasıyla $n=0,1,2$ alındığında $x_1=\dfrac{x_{-2}}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}$, $x_2=-x_{-1}(1+x_0x_{-1}x_{-2})$ ve $x_3=\dfrac{-x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}$ elde edilir. Şimdi iddiamızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edersek

$$x_{3n-2}=\begin{cases}\dfrac{x_{-2}}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ \dfrac{x_{-2}(-1+x_0x_{-1}x_{-2})}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)\\ -\dfrac{x_{-2}}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\\ x_{-2}, & n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}, \tag{3.3.31}$$

$$x_{3n-1}=\begin{cases}-x_{-1}(1+x_0x_{-1}x_{-2}), & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ -x_{-1}, & n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)\\ -x_{-1}(-1+x_0x_{-1}x_{-2}), & n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\\ x_{-1}, & n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}, \tag{3.3.32}$$

$$x_{3n}=\begin{cases}\dfrac{-x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ \dfrac{x_0(1+x_0x_{-1}x_{-2})}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)\\ \dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}, & n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\\ x_0, & n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)\end{cases} \tag{3.3.33}$$

eşitliklerini yazabiliriz. $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ için, denklem (3.3.27) den ve (3.3.31), (3.3.32), (3.3.33) eşitliklerinden

$$x_{3n+1}=\frac{-x_{3n-2}}{1-x_{3n}x_{3n-1}x_{3n-2}}=\frac{-\dfrac{x_{-2}}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}}{1-\left[\dfrac{-x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}\right]\left[-x_{-1}(1+x_0x_{-1}x_{-2})\right]\dfrac{x_{-2}}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}}$$

$$=\frac{x_{-2}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}$$

buluruz. Yine

$$x_{3n+2}=\frac{x_{3n-1}}{1+x_{3n+1}x_{3n}x_{3n-1}}=\frac{-x_{-1}\left(1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)}{1+\dfrac{x_{-2}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}\left[\dfrac{-x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}\right]\left[-x_{-1}\left(1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)\right]}$$

$$=-x_{-1}$$

elde ederiz.

Son olarak,

$$x_{3n+3}=\frac{-x_{3n}}{1-x_{3n+2}x_{3n+1}x_{3n}}=\frac{\dfrac{x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}}{1-\left[-x_{-1}\right]\dfrac{x_{-2}\left(-1+x_0x_{-1}x_{-2}\right)}{1+x_0x_{-1}x_{-2}}\left[\dfrac{-x_0}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}\right]}$$

$$=\frac{x_0(1+x_0x_{-1}x_{-2})}{-1+x_0x_{-1}x_{-2}}$$

buluruz.

Benzer şekilde $n\equiv 2(\bmod 4)$, $n\equiv 3(\bmod 4)$ ve $n\equiv 0(\bmod 4)$ için çözüm elde edilebilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-(2k+1)}}{-a+x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$, $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{n-i}}$ ve son olarak $x_{n+1}=\dfrac{(-1)^n x_{n-2k}}{1+(-1)^n\prod_{i=0}^{2k}x_{n-i}}$ fark denklemleri tanımlanmış ve tanımlanan bu fark denklemlerinin çözümleri incelenmiş, bu çözümlerle ilgili özellikler verilmiştir. Yeni yapılacak çalışmalarda yukarıdaki fark denklemlerinin ışığında katsayılar dizi veya fonksiyon şeklinde alınıp yeni fark denklemleri tanımlanabilir ve bunların çözümleri üzerine çalışılabilir. Ayrıca yeni tanımlanacak fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı, kararlılığı ve global asimptotik kararlılığı da incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abu-Saris, R. M. and Devault, R., 2003, Global stability of $y_{n+1} = \mathrm{A} + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$, *Applied Mathematics Letters*, 16, 173-178.

Abu-Saris, R. M. and Al-Jubouri, N. K., 2004, Characterization of rational periodic sequences II, *Journal of Difference Equations and Applications,* 10, 4, 409-418.

Abu-Saris, R. M., 2006, A note on the attractivity of period-four solutions of third-order rational difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications,* 12, 2, 233-235.

Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation, 176*, 768-774.

Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a *kth* order rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1328-1335.

Berenhaut, K. S. and Stevic, S., 2005, A note on the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n-3} x_{n-4}}$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 11, 14, 1225-1228.

Berenhaut, K. S., Dice, J. E., Foley, J. D. and Stevic, S., 2006, Periodic solutions of the rational difference equation $y_n = \dfrac{y_{n-3} + y_{n-4}}{y_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 12, 2, 183-189.

Camouzis, E. and Devault, R., 2001, Asymptotic behavior of solutions of $x_{n+1} = \mathrm{p} + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, *Journal of Difference Equation Aplications*, 7, 477-482.

Cinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 150, 21-24.

Cinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1 + bx_{n-1}x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 156, 587-590.

Çağal, B., 2000, Sayısal Analiz, Birsen Yayınevi Ltd.Şti., ISBN: 975-511-172-7, İstanbul.

Devault, R., Ladas, G. and Schultz, W., 1998, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x_n}} + \frac{1}{x_{n-2}}$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126, 11, 3257-3261.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S., 2004, On asymptotic behaviour of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 163-167.

Grove, E. A., Ladas, G., 2005, Periodicities in Nonlinear Difference Equations, Chapman&Hall/Crc, Washington, D.C.

Karatas, R., Cinar, C., Şimşek, D., 2006, On positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-2}x_{n-5}}$, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 1, 9-12, 495-500.

Mestel, B. D., 2003, On globally periodic solutions of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{x_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9, 2, 201-209.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, On the oscillation and periodiccharacter of a third-order rational difference equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 3, 905-909.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, J., 2005, On a (k+1)-th order difference equation with a coefficient of period k+1, *Journal of Difference Equation and Applications*, 11, 5, 215-225.

Saleh, M. and Aloqeili, M., 2005, On the rational difference equation $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).

Simsek, D., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2006, On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}}$, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 28, 1, 117-124.

Simsek, D., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2007, On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(5k+9)}}{1 + x_{n-4}x_{n-9}\ldots x_{n-(5k+9)}}$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, (in press).

Stevic, S., 2002, On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{g(x_n)}$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6(3), 405-414.

Stevic, S., 2004, A note on periodic character of a difference equation, *Journal of Difference Equations and Aplications*, 10,10, 929-932.

Stevic, S., 2005, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 18(1-2), 229-234.

Taixiang, S., 2005, On non-oscillatory solutions of the recursive sequence $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-k}}{x_n}$ the periodic character of some difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 6, 483-485.

Türker, E. S., Can, E., Sayısal Analiz Yöntemleri, Değişim Yayınları, No: 9, ISBN: 975-8289-10-1, II. Baskı, Adapazarı.

Valicenti, S., 1999, Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Yan, X., Li, W. and Zhao, Z., 2005, On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha - \frac{x_n}{x_{n-1}}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17(1-2), 269-282.