T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ DERECEDEN GENEL DIOPHANTINE DENKLEMLERİNİN ÖZEL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Bilge PEKER

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2014

KONYA

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Bilge PEKER

26.12.2014

ÖZET

DOKTORA TEZİ

İKİNCİ DERECEDEN GENEL DIOPHANTINE DENKLEMLERİNİN ÖZEL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Bilge PEKER

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Hasan ŞENAY

2014, 71 Sayfa

Jüri
Prof.Dr. Hasan ŞENAY
Prof.Dr. Dursun TAŞCI
Prof.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç.Dr. Ramazan TÜRKMEN
Doç.Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

Bu çalışmada uzun bir geçmişe sahip olan Diophantine denklemleri incelenmiştir ve özel olarak da ikinci dereceden Diophantine denklemlerinin tamsayı çözümleri araştırılmıştır. Bu yapılırken denklemlere çeşitli dönüşümler uygulanmış ve Pell tipindeki denklemlere indirgenmiştir. Bu denklemlerin genel çözümleri sürekli kesir açılımları kullanılarak formüle edilmiştir. Buna ilaveten bazı Diophantine denklemlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı çözümleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Diophantine denklemleri, Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, Genelleştirilmiş Lucas sayıları, Pell denklemleri, Tamsayı çözümleri

ABSTRACT

Ph.D THESIS

ON THE SPECIAL SOLUTIONS OF THE GENERAL QUADRATIC DIOPHANTINE EQUATIONS

Bilge PEKER

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof.Dr. Hasan ŞENAY

2014, 71 Pages

Jury
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof.Dr. Dursun TAŞCI
Prof.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Assoc. Prof.Dr. Ramazan TÜRKMEN
Assoc Prof.Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

In this study, Diophantine equations which have a long history are examined and specially, integer solutions of quadratic Diophantine equations were searched. While doing this, various transformations were applied to the equations to reduce them to the Pellian type equations. Using continued fraction expansions of this equations, general solutions were formulated. In addition to these, generalized Fibonacci and Lucas number solutions of some Diophantine equations were obtained.

Keywords: Continued fraction expansion, Diophantine equations, Integer solutions, Generalized Fibonacci numbers, Generalized Lucas numbers, Pell equations

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Prof. Dr. Hasan ŞENAY yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmamdaki yardımlarından dolayı danışman hocam Prof. Dr. Hasan ŞENAY'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince destek ve anlayışını esirgemeyen sevgili eşime ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan değerli aileme teşekkürlerimi sunarım.

Bilge PEKER
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$: sonlu sürekli kesir

C_k : bir sürekli kesrin $k.$ yakınsayanı

$[a_0; a_1, a_2, \ldots]$: sonsuz sürekli kesir

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+t-1}}]$: periyodik sürekli kesir

F_n : $n.$ Fibonacci sayısı

$\{F_n\}$: Fibonacci dizisi

$\{U_n(k,s)\}$: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi

L_n : $n.$ Lucas sayısı

$\{L_n\}$: Lucas dizisi

$\{V_n(k,s)\}$: Genelleştirilmiş Lucas dizisi

Δ : Diskriminant

1. GİRİŞ

Diophantine denklemler teorisi çok uzun bir tarihe sahiptir. Bunlara ait ilk izler M.Ö. 2000'li yıllara dayanmaktadır.

Katsayıları tamsayı olan ve birden fazla bilinmeyen içeren polinom denklemlerin tamsayı çözümlerinin bulunması problemi cebir ve sayılar teorisinin en zor problemlerinden biridir. Diophantus'un bu tür denklemlerin rasyonel çözümleriyle ilgilenmiş olmasına rağmen bu denklemlere Diophantine denklemi denilmiştir.

Bazı Diophantine denklemlerinin $\left(x^2+2y^2=z^2\right)$ tamsayılarda sonsuz çözümünün olmasına rağmen, bazı denklemlerin $\left(2x+1=4y\right)$ çözümü yok, bazılarının ise $\left(x^2+y^2=5\right)$ sonlu sayıda sıfırdan farklı çözümü vardır. Bu nedenle böyle denklemlerin çözümlerini bulmak için genel bir metot yoktur.

Diophantine denklemleri ile ilgili yapılan çalışmalar, polinom denklemlerin veya denklem sistemlerinin tamsayılarda, rasyonel sayılarda veya daha genel sayı halkalarındaki çözümleri üzerinedir.

Gauss, a,b,c,d,e,f verilen tamsayılar olmak üzere $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ şeklindeki ikinci dereceden denklemlerin tamsayı çözümleri üzerine çalıştı. Bu denklem $y^2-Dx^2=1$ Pell denklemini de içermektedir. Bazı Pell denklemleri Diophantus'un Arithmetica adlı eserinde çözüldü. Bazıları ise Hintli matematikçiler Brahmagupta ve Bhaskara tarafından sırasıyla yedinci ve on ikinci yüzyıllarda çalışıldı. $\sqrt{D}$ nin sürekli kesir açılımı ve Pell denklemlerinin çözümleri arasındaki bağlantıyı ilk fark eden Euler'dir. Bu bağlantı günümüzde bazen reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerini (units) hesaplamak için kullanılmaktadır (Smart, 1998).

Diophantine denklemleri ile ilgili en çok yapılan çalışmalar aşağıdakilerdir (Smart, 1998):

1. Rasyonel (veya tamsayı) çözümlerinin sayısı sonlu mudur sonsuz mudur?
2. Rasyonel (veya tamsayı) çözümlerinin sayısı sonlu ise, tüm çözümleri belirleyecek bir prosedür verebilir miyiz?
3. Rasyonel (veya tamsayı) çözümlerinin sayısı sonsuz ise, bazı temel olanlar cinsinden tüm çözümleri ifade etmek mümkün müdür?

Hilbert, herhangi bir Diophantine denkleminin sonlu veya sonsuz sayıda çözümlerini verebilecek bir algoritmanın olup olmadığı ile ilgili ünlü sorusunu sordu. 1970 yılında Matiyasevich böyle bir algoritmanın olmadığını ispatladı (Smart, 1998). Çünkü var olan bir algoritma birinde işlerken diğerinde işlememektedir. Bu durum Hilbert'in 10. problemi ve Matiyasevich'in çözümü olarak bilinmektedir. Euler 1767 yılında, Pell denklemleri için çeşitli özdeşlikler buldu. Bunların arasında bazı n tamsayıları için $d = n^2 + 1$ ise, $\left(2n^2 + 1\right)^2 - \left(n^2 + 1\right)\left(2n\right)^2 = 1$ olduğunu ispatladı. Böyle bir özdeşlik, reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayılarını hesaplama problemine uygulamalar için bir potansiyele sahiptir. Örneğin $\left(2n^2 + 1\right) + \left(2n\right)\sqrt{n^2 + 1}$ in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^2 + 1}\right)$ için temel birimi (unit) olduğunu biliyorsak, o zaman Dirichlet'in sınıf sayı formülünü, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^2 + 1}\right)$ formundaki reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayılarını hesaplamak için kullanabiliriz. Pell özdeşlikleri ve sınıf sayıları arasındaki bağlantılar hakkında daha fazla bilgi için McLaughlin'nin 2003 yılında yaptığı çalışma incelenebilir.

Bu çalışmada kısaca bazı Diophantine denklemlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı çözümleri araştırılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, Diophantine denklemleri, Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili kaynaklara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, çalışma boyunca kullanılan tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca Diophantine denklemler, bu denklemleri çözmek için kullanılan çeşitli yöntemler tanıtılmış ve kısaca Fibonacci ve Lucas dizileri anlatılmıştır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde bazı ikinci dereceden Diophantine denklemlerinin çözümleri araştırılmıştır. Denklemleri incelerken Pell tipindeki denklemler elde edilmiş ve bu denklemler de incelenmiştir. Denklemler çözülürken sürekli kesir açılımları kullanılmış ve çözümler arasında rekürans bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca bu çözümler genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı çözümleri biçiminde ifade edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Cohn (1965), v_n Lucas sayısını, u_n Fibonacci sayısını göstermek üzere $v_n = x^2$, $v_n = 2x^2$, $u_n = x^2$ ve $u_n = 2x^2$ durumlarını inceledi ve bu sonuçları kullanarak $5y^2 = x^4 - 1$, $y^2 = 20x^4 + 1$, $y^2 = 5x^4 - 1$, $5y^2 = 4x^4 + 1$, $y^2 = 5x^4 + 4$, $y^2 = 5x^4 - 4$ ve $5y^2 = x^4 + 4$ Diophantine denklemlerini çözdü.

Horadam 1965'de yaptığı çalışmada keyfi a,b tamsayıları ve $n \geq 2$ için $\{w_n\} \equiv \{w_n(a,b;p,q)\}: w_0 = a,\ w_1 = b,\ w_n = pw_{n-1} - qw_{n-2}$ dizisini tanımladı.

1967 yılında Cohn, 1965'de yaptığı çalışmanın devamı niteliğinde bir çalışma yaptı. $X^2 - dY^2 = -4$ denkleminin çözümünün olmadığını, ancak $X^2 - dY^2 = 4$ denkleminin en az bir tane her ikisi de tek olan (X,Y) çözüm çiftinin olması için d nin değerlerini inceledi. u_n Fibonacci sayısını, v_n Lucas sayısını göstermek üzere u_n, v_n, $\frac{1}{2}u_n$ ve $\frac{1}{2}v_n$ değerlerinin kare olduğu durumlarda çeşitli Diophantine denklemlerinin negatif olmayan çözümlerini araştırdı.

Hoggatt ve Johnson 1978'de yaptıkları çalışmada $u_0 = 0$ ve $u_1 = \pm 1$ olmak üzere $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^{\,2} = (-1)^n$ i sağlayan bir $\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi tanımladılar ve bu dizinin çeşitli özelliklerini incelediler. $\{u_n\}$ dizisini sağlayan $x = b$ için $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = 1$ olmak üzere $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_{n-1}(x)$ bağıntısıyla verilen Fibonacci polinomlarını hesapladılar. Burada $f_n(1) = F_n$ dir, yani 0, 1, 1, 2, 3, 5, … Fibonacci sayılarıdır. $f_n(2) = P_n$ dir, yani 0, 1, 2, 5, 12, 29, … Pell sayılarıdır. Bu fonksiyon için Fibonacci polinomlarının bölünebilme özelliklerini, Pell sayılarının özelliklerini ve $\{f_n(b)\}$ dizisini incelediler. Bunlara ilaveten, $y^2 - (a^2 \pm 4)x^2 = \pm 4$ denklemlerini çözdüler ve çalışmalarında tanımladıkları genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının özel durumları olduğunu gösterdiler.

Kaplan ve Williams (1986) tarafından m kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere, $X^2 - mY^2 = -4$ denkleminin çözülebilirliği $X^2 - mY^2 = -1$ denklemine bağlı olarak incelendi.

Jones ve Kiss (1992) çalışmalarında A ve B sıfırdan farklı tamsayılar, $R_0 = 0$, $R_1 = 1$, $V_0 = 2$, $V_1 = A$ olmak üzere $R_n = AR_{n-1} - BR_{n-2}$ ve $V_n = AV_{n-1} - BV_{n-2}$ şeklinde tanımlanan R_n ve V_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ tamsayılar dizisini ele aldılar. $\left|\sqrt{D} - \frac{V_n}{R_n}\right| < \frac{1}{c.R_n^{\,2}}$ eşitsizliğinin sonsuz sayıda n için sağlanması için gerek ve yeter şartın $|B| = 1$ ve $c \leq \frac{\sqrt{D}}{2}$ olması durumunda gerçekleştiğini ispatladılar. Ayrıca $\sqrt{D}$ irrasyonel sayısının en iyi rasyonel yaklaşımının $\frac{p}{q} = \frac{V_n}{R_n}$ olduğunu gösterdiler.

Zhiwei (1992), $\varepsilon = \pm 1$ için $y^2 = \left(m^2+4\right)x^2 + 4\varepsilon$, $y^2 - mxy - x^2 = 1$, $y^2 - mxy - x^2 = -1$ ve $x^4 - a^2\left(m^2+2\right)x^2 - 2amx + a^4 - 1 = 0$ denklemlerinin genelleştirilmiş Fibonacci dizi çözümlerini araştırdı.

1994 yılında Ramasamy, $A^2 - DB^2 = \pm 1$ şeklindeki bazı Pell denklemlerinin polinom çözümlerini verdi.

Melham 1997 yılında, $P \neq 0$ bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{cases} U_n = W_n\left(0,1;P,-1\right), \\ V_n = W_n\left(2,P;P,-1\right), \end{cases} \tag{1.1}$$

ve $|p| > 2$ tamsayı olmak üzere

$$\begin{cases} u_n = W_n\left(0,1;p,1\right), \\ v_n = W_n\left(2,p;p,1\right), \end{cases} \tag{1.2}$$

dizileri üzerinde çalıştı. U_n, V_n, u_n ve v_n ler için çeşitli eşitlikler verdi. Çeşitli konik denklemlerinin tamsayı koordinatlı çözümlerini U_n, V_n, u_n ve v_n ler cinsinden verdi.

Robinowitz (1996), yaptığı çalışmada Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili çeşitli algoritmalar verdi.

Zay (1998), D bir doğal sayının karesi olmamak üzere, D, $|N|$ doğal sayılar ve $|N| < \sqrt{D}$ olmak üzere $x^2 - Dy^2 = N$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri üzerine çalıştı. $\sqrt{D} = \left(a_0, \overline{a_1, \ldots, a_s}\right)$, $\sqrt{D}$ nin sürekli kesir açılımı ve $\frac{H_n}{K_n} = \left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$ de $\sqrt{D}$ nin *n.* yakınsayanı olmak üzere

$$\begin{aligned} H_{(n+2)s+r} &= 2H_{s-1}H_{(n+1)s+r} + \left(-1\right)^{s+1} H_{ns+r} \\ K_{(n+2)s+r} &= 2H_{s-1}K_{(n+1)s+r} + \left(-1\right)^{s+1} K_{ns+r} \end{aligned} \tag{1.3}$$

olduğunu gösterdi. Ayrıca $k \geq 2$ için $D = \left(2k+1\right)^2 - 4$, $k \geq 3$ için $D = \left(2k\right)^2 - 4$, $k \geq 2$ için $D = k^2 - 1$ ve $k \geq 1$ için $D = k^2 + 1$ durumlarında $r = 1, 2, \ldots, s$ için $\left(H_{ns+r}\right)$ ve $\left(K_{ns+r}\right)$ dizilerinin Binet formülünün yardımıyla $x^2 - Dy^2 = N$ $\left(|N| < \sqrt{D}\right)$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümlerini verdi.

Swamy (1998) çalışmasında Horadam tarafından tanımlanan $W_n(a,b;p,q)$ sayılarının genelleştirilmiş dizisi ile $x^2-Dy^2=\lambda$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri arasında bağlantı kurdu. $x^2-Dy^2=1$ denkleminin bütün tamsayı çözümleri ile birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları arasında ve $x^2-Dy^2=-1$ denkleminin bütün tamsayı çözümleri ile Pell ve Pell-Lucas polinomları arasında ilişki kurdu.

Kagawa ve Terai (1998), Lucas dizilerindeki kareleri kullanarak bazı Diophantine denklemlerini incelediler. Bunu yaparken P ve Q sıfırdan farklı aralarında asal tamsayılar olmak üzere;

$$U_0=0,\ U_1=1,\ U_{n+2}=PU_{n+1}-QU_n, \qquad (1.4)$$
$$V_0=2,\ V_1=P,\ V_{n+2}=PV_{n+1}-QV_n,$$

şeklinde tanımlanan $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri üzerinde çalıştılar. P çift ve $Q=-1$ iken eliptik eğrilerin bazı özelliklerini kullanarak U_n, $2U_n$, V_n ve $2V_n$ nin kare olduğu durumları araştırdılar. Bunları kullanarak $4x^4-Dy^2=\pm1$, $x^4-Dy^2=-1$, $x^2-4Dy^4=\pm1$ ve $x^2-Dy^4=1$ formundaki Diophantine denklemlerini incelediler.

1999 yılında Izotov yaptığı çalışmada $9\left(u^2+7v^2\right)^2-7\left(r^2+7s^2\right)^2=2$ denkleminin çözümlerinin Lucas dizisinin üyesi olduğunu ispatladı.

Bennett ve Walsh 2000 yılındaki çalışmalarında a ve b pozitif tamsayıları $b-a\in\{1,2,4\}$ ü sağlayacak şekilde seçildiğinde $x^2-az^2=1$ ve $y^2-bz^2=1$ Diophantine denklemlerinin aynı anda tüm çözümlerini buldular. Ayrıca $b-a$ nın asal veya asal kuvvet olması halinde bu denklemlerin (x,y,z) pozitif tamsayılarında en fazla bir çözüme sahip olduklarını da gösterdiler.

2002 yılında Mollin, $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$ iken ve $D\in\mathbb{N}$ kare olmamak üzere $X^2-DY^2=m_1$ ve $x^2-Dy^2=m_2$ Diophantine denklemlerinin her ikisinin de primitif çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart verdi. Bunu yaparken ideal teoriyi kullandı.

Mollin ve ark. (2002), $a^2X^2-bY^2=c$ Diophantine denkleminin çözülebilirliği üzerine, $\sqrt{a^2b}$ nin basit sürekli kesir açılımı ile bir kriter verdiler ve verilen $A,B,C\in\mathbb{N}$ için genel durumda $AX^2-BY^2=C$ denkleminin çözülebilirliği için kriter araştırdılar. Bu çalışma Mollin'in 1998 yılında yaptığı çalışma ile Mollin ve Van Der Poorten'in 2000 yılındaki çalışmalarının devamı niteliğindedir.

Matthews (2002), $D=b^2-4ac>0$ kare olmamak üzere, x,y aralarında asal tamsayılar, $N\neq0$ ve $\gcd(a,b,c)=\gcd(a,N)=1$ olmak üzere $ax^2+bxy+cy^2=N$ denkleminin çözülebilirliğine karar vermek için yeni bir yöntem verdi.

Bapoungue 2003 yılında a ve b negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $ax^2+2bxy-4ay^2=\pm1$ Diophantine denkleminin çözülebilirliğini Gauss tamsayılar halkasının aritmetik özellikleri yardımıyla inceledi. Bunu yaparken $v^2-\left(4a^2+b^2\right)w^2=-4$ Pell denkleminin çözümlerini kullandı.

Liptai ve Matyas 2003 yılında Peter Kiss'in yaptığı çalışmaların toplandığı bir makale yayınladılar. Burada Kiss'in 1984 yılında yaptığı $x^2-\left(a^2+1\right)y^2=N$ ve $x^2-\left(a^2-4\right)y^2=4N$ denklemlerinin lineer rekürans dizi çözümlerini verdiği çalışmaya da yer verdiler. Ayrıca Kiss ve Liptai'nin 1999'da yaptıkları çalışmada Fibonacci sayıları ve bazı Diophantine denklemlerinin ilişkileri üzerine çalıştılar. F_i, i. Fibonacci sayısı olmak üzere $x^2 + x(y-1) - y^2 = 0$ Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümlerinin $(x, y) = \left(F^2{}_{2h+1}, F_{2h+1}F_{2h+2}\right)$ formunda olduğunu ispatladılar.

Jones (2003), $d = a^2 \pm 4$ veya $d = a^2 \pm 1$ ve $c = \pm 4$ veya $c = \pm 1$ durumlarında $x^2 - dy^2 = c$ Pell denklemlerinin çözümlerini araştırdı. Bu denklemlerin bütün çözümlerini Lucas dizileri şeklinde ifade etti.

2003 yılında Robertson yaptığı çalışmada, tamsayılarda $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ denklemi için bazı çözüm metotları verdi. Bunu yaparken $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ denklemini önce literatürde de bilinen ve daha kolay çözülebilen denklemlere dönüştürdü. Ancak her denklem farklı formda olduğundan farklı denklemler için farklı yaklaşımlara yer verdi.

McLaughlin (2003), (c, h), $c^2 - fh^2 = 1$ denklemini sağlayan tamsayı çiftlerinin en küçüğü olmak üzere, $c^2 - fh^2 = 1$ denklemini sağlayan (c, h, f) pozitif tamsayı üçlülerinin herbiri için $\left(c(0), f(0), h(0)\right) = (c, f, h)$ ve $c(t)^2 - f(t)h(t)^2 = 1$ denklemini sağlayan $\left(c(t), h(t), f(t)\right)$ değişik polinom kümeleri elde etti. Ayrıca $\left(c(t), h(t)\right)$ çiftinin $c(t)^2 - f(t)h(t)^2 = 1$ Pell denklemine temel polinom çözüm teşkil ettiğini gösterdi. Bazı genel durumlar için $\sqrt{f(t)}$ nin sürekli kesir açılımını verdi. Reel kuadratik cisimlerde temel birimi belirlemek için bazı uygulamaları da ele aldı.

Robertson (2004), D kare olmayan pozitif bir tamsayı ve N sıfır olmayan bir tamsayı olmak üzere $x^2 - Dy^2 = N$ genelleştirilmiş Pell denkleminin x, y tamsayı çözümlerini bulmak için hızlı ve basit algoritmalar verdi.

Marlewski ve Zarzycki (2004) çalışmalarında $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$ Diophantine denkleminin sonsuz sayıda x, y pozitif tamsayı çözümünün ancak ve ancak $k = 3$ olması durumunda gerçekleştiğini ispatladılar.

Wenchang (2007), düzenli (λ, μ)-poligonal sayılarına karşılık gelen Diophantine denklemlerini indirgeyerek elde edilen genelleştirilmiş Pell denklemlerini bilgisayar programı kullanarak çözdü ve bu sayı grupları için rekürans bağıntılar verdi.

2007 yılında Wu, $x^2 - \left((mn)^2 \pm 4n\right)y^2 = 1$ Pell denkleminin en küçük çözümünü hesaplayan formüller verdi.

Robertson 2008 yılındaki çalışmasında, $x^2 - dy^2 = \pm 1, \pm 4$ denklemlerinin çözümlerinin $\{y_n\}$ dizisi için çeşitli sonuçlar buldu.

Demirtürk ve Keskin, 2009 yılında yaptıkları çalışmada $x^2 - 5F_n xy - 5(-1)^n y^2 = \pm L_n{}^2$, $x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = \pm 5F_n{}^2$ ve $x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = 5F_n{}^2$ Diophantine denklemlerinin bütün tamsayı çözümlerini buldular. Ayrıca bu denklemleri kullanarak bazı Diophantine denklemlerinin bütün tamsayı çözümlerini araştırdılar.

Robertson (2009), p asal olmak üzere $m = 25, 100, p, 2p, 4p, 2p^2$ için $x^2 - Dy^2$ formunun m ve $-m$ yi temsil ederken, -1 i temsil etmeyecek şekilde en fazla bir tane kare olmayan D pozitif tamsayısı olduğunu gösterdi.

Özkoç ve Tekcan, 2010 yılında yaptıkları ilk çalışmalarında $x^2-\left(t^2-t\right)y^2-\left(4t-2\right)x+\left(4t^2-4t\right)y=0$ Diophantine denkleminin ve ikinci çalışmalarında da $x^2-\left(t^2+t\right)y^2-\left(4t+2\right)x+\left(4t^2+4t\right)y=0$ Diophantine denklemlerinin çözümlerini buldular.

Waldschmidt (2010), Pell denklemleri ve bu denklemlerin çözümlerine ilişkin çok geniş bir çalışma yaptı.

Keskin (2010), $x^2-kxy\mp y^2\mp x=0$ ve $x^2-kxy-y^2\mp y=0$ Diophantine denklemlerinin Fibonacci-Lucas ve genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas çözümlerini inceledi. $k>3$ iken $x^2-kxy+y^2+x=0$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün olmadığını, ancak $x^2-kxy+y^2-x=0$ denkleminin pozitif tamsayı çözümlerinin olduğunu gösterdi. Bunlara ilaveten $x^2-kxy-y^2\mp x=0$ ve $x^2-kxy-y^2\mp y=0$ denklemlerinin $k\geq 1$ iken pozitif çözümlerinin olduğunu ispatladı.

Yuan ve Hu (2011), $x^2-kxy+y^2+lx=0$, $l\in\{1,2,4\}$ Diophantine denkleminin sonsuz sayıda x,y pozitif tamsayı çözümünün ancak ve ancak $\left(k,l\right)=\left\{\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(4,2\right),\left(3,4\right),\left(4,4\right),\left(6,4\right)\right\}$ olması durumunda gerçekleştiğini ispatladı. Ayrıca, aynı çalışmada, $x^2-kxy+y^2+x=0$ Diophantine denkleminin sonsuz sayıda x,y pozitif tamsayı çözümünün ancak ve ancak $k\neq 0,\pm 1$ olması durumunda gerçekleştiğini ispatlayarak Marlewski ve Marzycki (2004) deki bir probleme de cevap vermişlerdir.

Alekseyev 2011 yılında yaptığı çalışmada Fibonacci, Pell, Lucas ve Lucas-Pell sayı dizilerini içeren $P\in\mathbb{Z}$ için $\left\{U_n\left(P,\pm 1\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ veya $\left\{V_n\left(P,\pm 1\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ formundaki iki Lucas dizisinin kesişiminin nasıl hesaplanacağını anlattı. Bunu yaparken homojen kuadratik Diophantine denklemlerini ve Thue denklemlerini çözmeye dönük bir yaklaşım izledi.

Güney (2012), $d=a^2b^2+2b$ olmak üzere $x^2-dy^2=\pm 1$ ve $x^2-dy^2=\pm 4$ denklemlerinin bütün pozitif tamsayı çözümlerini, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri cinsinden elde etti.

Güney ve Keskin, 2013 yılında yaptıkları çalışmada sürekli kesir yaklaşımlarını kullanarak $x^2-dy^2=\pm 1$ formundaki bazı denklemlerin temel çözümlerini buldular.

2013 yılında Matthews, Robertson ve White $k\geq 2$ ve $y<k-1$ olmak üzere $x^2-\left(k^2+1\right)y^2=k^2$ denkleminin $\left(x,y\right)$ pozitif tamsayı çözümlerini araştırdılar.

Bahramian ve Daghigh (2013) çalışmalarında Fibonacci dizisinin bir genelleştirmesinin özelliklerini incelediler. Buna ilaveten k pozitif tamsayı olmak üzere $x^2\pm kxy-y^2\pm x=0$ Diophantine denklemini çözdüler ve çözümlerin yapılarını açıkladılar.

Feng ve ark. 2013 yılındaki çalışmalarında verilen herhangi bir pozitif l tamsayısı için $x^2-kxy+y^2+lx=0$ Diophantine denkleminin sonsuz sayıda $\left(x,y\right)$ pozitif tamsayı çözümleri olacak şekilde, sadece sonlu sayıda k tamsayısının var olduğunu ispatladılar. $1\leq l\leq 33$ iken $x^2-kxy+y^2+lx=0$ Diophantine denkleminin sonsuz sayıda $\left(x,y\right)$ pozitif tamsayı çözümleri olacak şekilde bütün k tamsayılarını tanımladılar. Ayrıca aynı durumu $2x^2-kxy+y^2+x=0$ Diophantine denklemi için de incelediler.

Hu ve Le (2013), l verilen negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $x^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ Diophantine denkleminin sonsuz sayıda (x, y) pozitif tamsayı çözümünün bulunması için k pozitif tamsayısının karakterizasyonunu verdiler.

Keskin ve ark. 2013 yılında $x^2 - 5F_n xy - 5(-1)^n y^2 = \pm 5^r$ şeklindeki Diophantine denklemleri üzerinde çalıştılar. Bu denklemlerin hangi durumlarda pozitif tamsayı çözümlerinin bulunduğunu incelediler. Ayrıca bu denklemlerin bütün pozitif tamsayı çözümlerini Fibonacci ve Lucas sayıları cinsinden buldular.

Bu çalışmada ayrıca Mordell (1969), Hoggatt (1969), Vajda (1989), Rosen (1992), Robbins (1993), Adler ve Coury (1995), Smart (1998), Koshy (2001), LeVeque (2002), Şenay (2007), Andreescu ve ark.'nın (2010) kitaplarından yararlanılmıştır.

3. TEORİK ESASLAR

3.1. Sürekli Kesirler

Bu bölümde sürekli kesirler ile ilgili genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1. $n \geq 0$, a_0, a_1, a_2, . . . , a_n ler reel sayılar ve a_0 hariç hepsi pozitif olmak üzere;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{3.1}$$

ifadesine *sonlu sürekli kesir* denir ve $[\,a_0 ; a_1 , a_2 , . . . , a_n\,]$ biçiminde gösterilir.

Burada a_1, a_2, . . . , a_n ler kısmi bölümler veya kısmi paydalardır. Bu gösterimi $n > 0$ için,

$$[\,a_0 ;\; a_1 ,\; a_2 , . . . , a_n\,] = a_0 + \frac{1}{[a_1 ; a_2 , a_3 ,\; . . . , a_n]} \tag{3.2}$$

şeklinde yazabiliriz. Daha genel olarak;

$$[\,a_0 ; a_1 , a_2 , . . . , a_{n-1} , a_n\,] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{3.3}$$

biçiminde gösterilir.

Burada a_0 sayısının pozitif ya da negatif bir reel sayı veya sıfır olabileceğine dikkat edilmelidir. Ayrıca a_0, a_1, a_2, . . . , a_n lerin hepsi tamsayı ise sürekli kesire *sonlu basit sürekli kesir* denir (Rosen, 1992; Şenay, 2007).

Teorem 3.1.2. $n \geq 1$ olsun. $0 \leq i \leq n$ olmak üzere her $i > 0$ için a_i ler, $a_0 \geq 0$ ve $a_i > 0$ şartını sağlamak üzere reel sayı olsun. O zaman $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] = \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right]$ dir (Robbins, 1993).

Teorem 3.1.3. $n \geq 1$ olsun. $0 \leq i \leq n$ olmak üzere her $i > 0$ için a_i ler, $a_0 \geq 0$ ve $a_i > 0$ şartını sağlamak üzere reel sayı olsun. O zaman $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, 1] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$ dir (Robbins, 1993).

Tanım 3.1.4. Bütün a_i ler reel ve a_0 hariç hepsi pozitif olmak üzere, $A = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ olsun. Eğer $0 \leq k \leq n$ ise $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ dır. Burada C_k, A ya *k. yakınsayan* olarak adlandırılır (Robbins, 1993).

Teorem 3.1.5. Bütün a_i ler reel ve a_0 hariç hepsi pozitif olmak üzere,

$A = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sonlu basit sürekli kesri verildiğinde; $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ dizileri,

$$k \geq 0 \text{ için} \quad p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \tag{3.4}$$

$$k \geq 0 \text{ için} \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $0 \leq k \leq n$ ve C_k, A nın k -yıncı yakınsayanı ise yani, $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ise o zaman $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ dır (Robbins, 1993).

Tanım 3.1.6. $a_1, a_2, \ldots$ pozitif olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sonsuz tamsayı dizisi ve $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ olsun. O zaman, C_k yakınsayanının limiti α ya gider, yani

$$\lim_{k \to \infty} C_k = \alpha \tag{3.6}$$

olur. α değerine, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *sonsuz sürekli kesirinin değeri* denir (Rosen, 1992).

Teorem 3.1.7. $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı olsun ve $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dizisi, k = 0, 1, 2, ... için,

$$a_k = [\alpha_k], \; \alpha_{k+1} = \frac{1}{(\alpha_k - a_k)} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman α, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz basit sürekli kesrinin değeridir (Rosen, 1992).

Tanım 3.1.8. Eğer, tüm pozitif n tamsayıları ile $n \geq N$ için $a_n = a_{n+t}$ olacak şekilde N ve t pozitif tamsayıları varsa $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz basit sürekli kesrine *periyodiktir* denir. Ayrıca

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+t-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots] \tag{3.8}$$

periyodik sürekli kesiri

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+t-1}}] \tag{3.9}$$

şeklinde gösterilir. Burada $a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+t-1}$ e *periyot*, t ye sürekli kesrin *periyot uzunluğu* denir (Rosen, 1992).

3.2. Pell Denklemleri

$D>0$ ve kare olmamak üzere $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ kuadratik cisminde birimlerin bulunmasında Pell denklemleri, doğal olarak ortaya çıkmaktadır. ε birimleri için x ve y tamsayı olmak üzere aşağıdakiler bilinmektedir:

$$D \equiv 2,3 \pmod 4, \qquad \varepsilon = x + y\sqrt{D}, \qquad x^2 - Dy^2 = 1, \tag{3.10}$$

$$D \equiv 1 \pmod 4, \qquad \varepsilon = x + \frac{1+\sqrt{D}}{2}y, \qquad x^2 + xy + \frac{1-D}{4}y^2 = \pm 1. \tag{3.11}$$

Her iki denklem $X^2 - DY^2 = \pm 4$ formu altında yer almaktadır. ε_0 temel birimi, en küçük pozitif X ve Y çözümüne karşılık gelmektedir (Mordell,1969).

Tanım 3.2.1. *x, y, D* tamsayı, *D* pozitif ve bir tamsayının karesinden farklı olmak üzere,

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{3.12}$$

denklemine *Pell denklemi* denir. (3.12) denklemi *D* parametresine bağlı olduğundan bu denklem bir parametreye bağlı bir denklem ailesidir. (3.12) denkleminde *x* ve *y* nin her ikisinin de negatif olmadığının kabul edilmesi genelliği bozmaz. Herhangi bir *D* parametresi için $x = \pm 1,\ y = 0$ ın (3.12) denkleminin bir çözümü olduğu kolayca görülür ki bu çözüme bilinen (trivial) çözüm denir. Ayrıca eğer *D, a* gibi bir tamsayının karesi ($D = a^2$) ise o zaman

$$1 = x^2 - Dy^2 = x^2 - a^2y^2 = (x - ay)(x + ay) \tag{3.13}$$

elde edilir ki bu durumda eşitliğin gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart, $x - ay = \mp 1$, $x + ay = \mp 1$ olmasıdır. Bu ise $x = \pm 1,\ y = 0$ olmasını gerektirir. Yani $D = a^2$ olması durumunda trivial çözüm tek çözüm olur. O halde bundan sonra (3.12) denkleminde *D* yi pozitif ve bir tamsayının karesinden farklı olarak kabul edeceğiz. Şüphesiz Pell denkleminin $(1,0)$ dan farklı bir çözümünün bulunması konunun en zor kısmını teşkil eder.

$x^2 - Dy^2 = -1$ denklemine *negatif Pell denklemi* veya $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminin ilgilisi denir (Robbins, 1993; Şenay, 2007).

Teorem 3.2.2. $k \geq 0$ tamsayı, D tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $\frac{p_k}{q_k}$, $\sqrt{D}$ -nin sürekli kesir açılımında k. yakınsayan olsun. $t \in \mathbb{Z}^+$, bu sürekli kesrin periyodunun uzunluğu olmak üzere, $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminin sonsuz sayıdaki bütün çözümleri aşağıdaki gibi verilir (Robbins, 1993).

a) Eğer t çift tamsayı ise n = 0, 1, 2, 3, . . . için $x_n = p_{nt-1}$, $y_n = q_{nt-1}$

b) Eğer t tek tamsayı ise n = 0, 1, 2, 3, . . . için $x_n = p_{2nt-1}$, $y_n = q_{2nt-1}$

Teorem 3.2.3. $k \geq 0$ tamsayı, D tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $\frac{p_k}{q_k}$ da $\sqrt{D}$ -nin sürekli kesir açılımında k. yakınsayan olsun. $t \in \mathbb{Z}^+$, bu sürekli kesrin periyot uzunluğu olmak üzere, eğer t çift sayı ise, o zaman $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin çözümü yoktur. Eğer t tek sayı ise, o zaman $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin sonsuz sayıda çözümü vardır ve bu çözümler n = 1, 3, 5, . . . için $x_n = p_{nt-1}$, $y_n = q_{nt-1}$ biçiminde verilir (Robbins, 1993).

Sonuç 3.2.4. Herhangi bir $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin $x_0 = p_{-1} = 1$, $y_0 = q_{-1} = 0$ çözümü bilinen (trivial) çözüm olarak adlandırılır (Robbins, 1993).

Teorem 3.2.5. D tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin en küçük pozitif tamsayı çözümü x_1, y_1 olsun. O zaman bütün x_k, y_k pozitif tamsayı çözümleri, $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$x_k + y_k\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^k \tag{3.14}$$

ile verilir (Rosen, 1992).

Teorem 3.2.6. D tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x_0 = 1$ ve $y_0 = 0$ Pell denkleminin trivial çözümü olarak verilsin. O zaman (3.12) denkleminin negatif olmayan bütün tamsayı çözümleri

a) $n \geq 1$ olmak üzere $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$,

b) $n \geq 0$ olmak üzere $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

biçiminde verilir (Robbins, 1993).

Tanım 3.2.7. D tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $e \neq 0$ tamsayı olmak üzere, $x^2 - Dy^2 = e$ denklemine genelleştirilmiş *Pell denklemi* denir. Hintli matematikçi Bhaskara' nın bu denklem üzerindeki çalışmalarından dolayı *Bhaskara denklemi* olarak da isimlendirilir (Beauregard ve Suryanarayan, 1997).

Lemma 3.2.8. Brahmagupta Özdeşliği (Birleşme Kuralı). $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, (a_1, b_1) ve (a_2, b_2),

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{3.15}$$

denkleminin herhangi iki farklı çözümü olsun. (r, s) de

$$(a_1 + b_1\sqrt{D})(a_2 + b_2\sqrt{D}) = r + s\sqrt{D} \tag{3.16}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman (r,s) de (3.15) denkleminin bir çözümüdür. Eğer (a_1,b_1) ve (a_2,b_2) pozitif tamsayı çözümler ise o zaman (r,s) de (3.15) denkleminin bir pozitif tamsayı çözümüdür (Adler ve Coury, 1995).

Sonuç 3.2.9. (r,s), $x^2-Dy^2=N$ denkleminin bir çözümü ve (t,u), $x^2-Dy^2=1$ denkleminin en küçük pozitif tamsayı çözümü ise o zaman $x=rt+suD$, $y=ru+st$ 'de $x^2-Dy^2=N$ denkleminin bir çözümüdür. Bunlar,

$$(rt+suD)^2-D(ru+st)^2=(r^2-Ds^2)(t^2-Du^2) \tag{3.17}$$

eşitliğinden bulunur.

Özetlenecek olursa; herhangi bir n tamsayısı için $x^2-Dy^2=N$ denkleminin diğer tamsayı çözümleri

$$x+y\sqrt{D}=\pm(r+s\sqrt{D})(t+u\sqrt{D})^n \tag{3.18}$$

ifadesinden bulunur (Mordell, 1969; Robbins, 1993; Robertson, 2004).

Teorem 3.2.10. $D\equiv 1,2,3 \pmod 4$ olsun. O zaman $x^2-Dy^2=-4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart $x^2-Dy^2=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümlerinin olmasıdır (Robertson, 2004).

Teorem 3.2.11. $D\equiv 0 \pmod 4$ olsun. $x^2-\left(\frac{D}{4}\right)y^2=1$ denkleminin temel çözümü $x_1+y_1\sqrt{\frac{D}{4}}$ ise, $x^2-Dy^2=4$ denkleminin temel çözümü $(2x_1,y_1)$dir (Robertson, 2004).

Teorem 3.2.12. $D\equiv 2,3 \pmod 4$ olsun. $x^2-Dy^2=1$ denkleminin temel çözümü $x_1+y_1\sqrt{D}$ ise, $x^2-Dy^2=4$ denkleminin temel çözümü $(2x_1,2y_1)$dir (Robertson, 2004).

Teorem 3.2.13. $x^2 - Dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{D}$ olsun. O zaman $n \geq 1$ olmak üzere $x^2 - Dy^2 = 4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{3.19}$$

şeklindedir (Robertson, 2004; LeVeque, 2002).

Teorem 3.2.14. $x^2 - Dy^2 = -4$ denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{D}$ olsun. O zaman $n \geq 1$ olmak üzere $x^2 - Dy^2 = -4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{2n-1}}{2^{2n-2}} \tag{3.20}$$

şeklindedir (Robertson, 2004; LeVeque, 2002).

3.3. Diophantine Denklemleri

Diophantine denklemleri, $n \geq 2$ olmak üzere n değişkenli

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \tag{3.21}$$

formunda denklemlerdir (Andreescu ve ark., 2010).

(3.21) denklemini sağlayan $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{Z}^n$ e (3.21) denkleminin bir çözümü denir. Eğer denklem bir veya daha fazla çözüme sahipse "çözülebilir" olarak adlandırılır. Diophantine denklemleri ile yapılan çalışmalar üç ana temelde toplanabilir (Andreescu ve ark., 2010):

1. Denklem çözülebilir midir?
2. Çözülebilir ise, çözümlerinin sayısı sonlu mudur sonsuz mudur?

3. Çözülebilir ise, tüm çözümleri nasıl tanımlanır?

Hilbert'in 10. problemi olarak bilinen, herhangi bir Diophantine denkleminin sonlu veya sonsuz sayıda çözümlerini verebilecek bir algoritmanın olup olmadığı ile ilgili ünlü sorusu, 1970 yılında Matiyasevich tarafından böyle bir algoritmanın olmadığının ispatlanması ile de anlaşılacağı üzere, farklı Diophantine denklemlerini çözmek için farklı metotlar uygulanmaktadır.

Diophantine denklemlerini çözmek için kullanılan bazı basit metotlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Andreescu ve ark., 2010):

3.3.1. Çarpanlarına Ayırma Metodu

$f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}\left[X_1, X_2, \ldots, X_n\right]$ ve $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere verilen $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0$ denklemi

$$f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \ldots f_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = a \tag{3.22}$$

şeklinde yeniden yazılır. a nın asal çarpanlaması verildiğinde, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ şeklinde k tane tamsayı çarpanından oluşan sonlu sayıda ayrışım elde edilir. Bu şekildeki çarpanlar aşağıdaki gibi bir denklem sistemi verir.

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = a_1, \\ f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = a_2, \\ \vdots \\ f_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = a_k. \end{cases} \tag{3.23}$$

Bu şekildeki sistemlerin hepsinin çözümü, $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0$ denkleminin çözüm kümesini verir.

Örnek 3.3.1. $\left(xy - 7\right)^2 = x^2 + y^2$ denkleminin negatif olmayan bütün $\left(x, y\right)$ tamsayı çözüm çiftlerini araştıralım (Hindistan Matematik Olimpiyatı).

$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$ denklemi $(xy-6)^2 + 13 = (x+y)^2$ denklemine denktir. Bu denklemde $(xy-6)^2 - (x+y)^2 = -13$ şeklinde düzenlenebilir. Çarpanlarına ayrılarak yeniden düzenlenirse $\left[xy-6-(x+y)\right]\left[xy-6+(x+y)\right] = -13$ denklemi elde edilir. Bu da aşağıdaki denklem sistemlerine denktir:

$$\begin{cases} xy-6-(x+y) = -1, \\ xy-6+(x+y) = 13, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy-6-(x+y) = -13, \\ xy-6+(x+y) = 1. \end{cases} \tag{3.24}$$

Bu denklem sistemi de

$$\begin{cases} x+y = 7, \\ xy = 12, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 7, \\ xy = 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

denklem sistemine denktir.

Buradan çözümler $(3,4)$, $(4,3)$, $(0,7)$, $(7,0)$ şeklindedir.

3.3.2. Eşitsizlikleri Kullanma Metodu

Bu metot, uygun eşitsizlikler kullanarak değişkenlerin bulunduğu aralıkları kısıtlamaya dayanmaktadır. Genellikle bu işlem, tüm değişkenler için veya bunların bazıları için sadece sonlu sayıdaki olasılıklara götürür.

Örnek 3.3.2. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = w^2$ denkleminin bütün (x, y, z, w) pozitif tamsayı çözümlerini araştıralım.

$(x+y+z\pm 1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z\pm 1) + 2y(z\pm 1) \pm 2z + 1$ dir. Bundan dolayı $(x+y+z-1)^2 < w^2 < (x+y+z+1)^2$ olduğu görülür. Dolayısıyla $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1)$ ifadesi $(x+y+z)^2$ ye eşittir. Bu da $x = y$ olmasını gerektirir. Yani çözümler $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(m, m, n, 2m+n)$ şeklindedir.

3.3.3. Parametrik Metot

Pek çok durumda $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0$ şeklindeki bir Diophantine denkleminin çözümleri, $k_1, k_2, \ldots, k_l \in \mathbb{Z}$ ve $g_1, g_2, \ldots, g_n$ tamsayı değerli l değişkenli fonksiyonlar olmak üzere

$$x_1 = g_1\left(k_1, k_2, \ldots, k_l\right),\ x_2 = g_2\left(k_1, k_2, \ldots, k_l\right),\ \ldots,\ x_n = g_n\left(k_1, k_2, \ldots, k_l\right) \tag{3.26}$$

parametrik formlarında gösterilebilir. Bazı Diophantine denklemlerinin çözüm kümeleri çoklu parametrik gösterime sahip olabilir.

Çoğu Diophantine denklemi için tüm çözümleri açık şekilde bulmak mümkün olmayabilir. Bu şekildeki durumların çoğunda parametrik metot, sonsuz sayıda çözümün varlığını ispatlamayı sağlar.

Örnek 3.3.3. $x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$ olacak şekilde sonsuz sayıda $\left(x, y, z\right)$ tamsayı üçlüsü olduğunu gösterelim.

$z = -y$ alınırsa denklem $x^3 = x^2 + 2y^2$ şekline dönüşür. Bu denklemde $m \in \mathbb{Z}$ için $y = mx$ alınırsa $x = 1 + 2m^2$ bulunur. Dolayısıyla $m \in \mathbb{Z}$ için $x = 2m^2 + 1$, $y = m\left(2m^2 + 1\right)$ ve $z = -m\left(2m^2 + 1\right)$ olduğu görülür. Bu da $x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$ denkleminin sonsuz sayıda çözüm ailesi olduğunu gösterir.

3.3.4. Modüler Aritmetik Metodu

Basit modüler aritmetik konuları, belirli Diophantine denklemlerin çözülemez olduğunun gösterilmesinde veya muhtemel çözüm aralığının daraltılmasında kullanılmaktadır.

Örnek 3.3.4. $\left(x+1\right)^2 + \left(x+2\right)^2 + \ldots + \left(x+2001\right)^2 = y^2$ denkleminin çözülemez olduğunu ispatlayalım.

$x = z - 1001$ olsun. O zaman denklem $\left(z-1000\right)^2 + \ldots + \left(z-1\right)^2 + z^2 + \left(z+1\right)^2 + \ldots + \left(z+1000\right)^2 = y^2$ şeklini alır. Bu da $2001z^2 + 2\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 1000^2\right) = y^2$ denklemine denktir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $2001z^2 + 2\dfrac{1000.1001.2001}{6} = y^2$ elde edilir. Buradan $2001z^2 + 1000.1001.667 = y^2$ dir. Eşitliğin sol tarafı $(\bmod 3)$ e göre 2 ye kongrüenttir. Ancak bir kare 3 modülüne göre 2 ye kongrüent olamaz. Dolayısıyla denklemin çözümü yoktur.

3.3.5. Matematiksel İndüksiyon (Tümevarım) Metodu

$\left(P(n)\right)_{n\geq 0}$ önermeler dizisi olsun. Matematiksel indüksiyon (tümevarım) metodu, n_0 verilen negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, her $n \geq n_0$ için $P(n)$ ifadesinin doğruluğunu ispatlamada kullanılır. Aşağıdaki örnek tümevarım metodunun Diophantine denklemlerinde nasıl kullanıldığını göstermektedir.

Örnek 3.3.5. $n \geq 3$ tamsayıları için $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1$ denkleminin farklı pozitif tamsayılarda çözülebilir olduğunu ispatlayalım.

$n = 3$ için $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = 1$ olduğundan doğrudur.

Bazı $k \geq 3$ tamsayıları için doğru olduğunu kabul edelim. Yani $x_1, x_2, \ldots, x_k$ farklı pozitif tamsayıları için

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} = 1 \tag{3.27}$$

olsun.

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_k} = 1$ denklemini $\dfrac{1}{2x_1} + \dfrac{1}{2x_2} + \cdots + \dfrac{1}{2x_k} = \dfrac{1}{2}$ biçiminde yeniden düzenlersek denklem

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \cdots + \frac{1}{2x_k} = 1 \tag{3.28}$$

şeklini alır. Sonuç olarak denklem $2, 2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_k$ farklı pozitif tamsayıları için sağlanmış olur ki bu da ispatı tamamlar.

3.3.6. Fermat'ın Sonsuza İniş Metodu

P negatif olmayan tamsayılarla ilgili bir özellik olsun.

$P(n)$: "n, P özelliğini sağlar." önermesi verilsin.

$\left(P(n)\right)_{n\geq 1}$ önermeler dizisi olsun. Bu metot, bütün yeterince büyük $n$ler için $P(n)$ önermesinin yanlış olduğunun ispatlanmasında kullanılır.

Fermat'ın sonsuza iniş metodu aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

k, negatif olmayan bir tamsayı olsun. Farz edelim ki,

- $P(k)$ doğru olmasın;
- Bir $m>k$ tamsayısı için $P(m)$ doğru olduğu zaman, $P(j)$ doğru olan $m>j>k$ olacak şekilde bazı küçük j tamsayıları olmalıdır.

O zaman her $n>k$ için $P(n)$ yanlıştır.

Yani $P(n)$nin doğru olduğu bir n olsaydı, hepsi k dan büyük olan $n>n_1>n_2>\ldots$ dizisi inşa edilebilirdi. Fakat negatif olmayan tamsayılar için böyle sonsuza kadar azalan bir dizi mevcut değildir.

Diophantine denklemlerinde Fermat'ın sonsuza iniş metodunun iki özel durumu özellikle kullanışlıdır.

1. Varyant: Negatif olmayan tamsayıların $n_1>n_2>\ldots$ dizisi yoktur. Bazı durumlarda, buna denk olan "$P(n)$nin doğru olduğu en küçük pozitif n tamsayısı n_0 ise; o zaman bütün $n<n_0$ lar için $P(n)$ doğrudur." ifadesi daha kullanışlıdır.
2. Varyant: Negatif olmayan $(n_i)_{i\geq 1}$ tamsayılar dizisi, $n_1\geq n_2\geq\ldots$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $n_{i_0}=n_{i_0+1}=\ldots$ olacak şekilde i_0 vardır.

Örnek 3.3.6. $2^x-1=xy$ denklemini negatif olmayan tamsayılarda çözelim (Putnam Matematik Yarışması, yeniden düzenlenmiş şekli).

$k\in\mathbb{Z}^+$ için $(0,k)$ ve $(1,1)$ in $2^x-1=xy$ denkleminin çözümleri olduğu açıktır. x in asal çarpanında Fermat'ın sonsuza iniş metodunu kullanarak denklemin başka çözümü olmadığı ispatlanacaktır.

p_1, x in bir asal böleni ve $p_1 \mid 2^q - 1$ olacak şekildeki en küçük pozitif tamsayı q olsun. Fermat teoreminden $p_1 \mid 2^{p_1 - 1} - 1$ dir. Bundan dolayı $q \le p_1 - 1 < p_1$ dir.

Şimdi $q \mid x$ i ispatlayalım. Eğer q, x i bölmeseydi, $0 < r < q$ için $x = kq + r$ olurdu. O zaman

$$
\begin{aligned}
2^x - 1 &= 2^{kq} 2^r - 1 \\
&= \left(2^q\right)^k 2^r - 1 \\
&= \left(2^q - 1 + 1\right)^k 2^r - 1 \\
&\equiv 2^r - 1 \left(\operatorname{mod} p_1\right)
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

elde edilirdi. Bu da $p_1 \mid 2^r - 1$ demektir ki q nun en küçük olması ile çelişir. Bundan dolayı $q \mid x$ ve $1 < q < p_1$ dir. Şimdi q nun bir asal böleni p_2 olsun. O zaman p_2 de x in bir böleni ve $p_2 < p_1$ dir. Bu prosedüre devam edilerek, x in asal bölenlerinin sonsuz azalan dizisi inşa edilir: $p_1 > p_2 > \cdots$, Fermat'ın sonsuza iniş metodunun 1. varyantı ile çelişir.

Yukarıda Diophantine denklemlerini çözmek için bazı metotlara yer verilmiştir. Bu Diophantine denklemlerinden ikinci dereceden iki bilinmeyenli Diophantine denklemleri özel bir denklem çeşididir. İkinci dereceden iki bilinmeyenli en genel Diophantine denklemi a, b, c, d, e, f tamsayılar olmak üzere

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{3.30}$$

şeklindedir. Bu denklemler değişken dönüşümü yardımıyla N bir tamsayı ve D bir tamsayının karesinden farklı pozitif tamsayı olmak üzere

$$x^2 - Dy^2 = N \tag{3.31}$$

şeklinde bir denkleme dönüştürülerek çözülebilirler.

3.4. Fibonacci ve Lucas Dizileri

Orta çağın en büyük Avrupalı matematikçilerinden biri olarak kabul edilen Leonardo Fibonacci (1170-1250) İtalya'nın Pisa şehrinde doğmuştur. Babası takma adı Bonaccio olan Guglielmo'dur. Fibonacci ismini de zaten babasından dolayı almıştır. İtalyanca Filius Bonaccio, Bonacci'nin oğlu anlamına gelmektedir. Leonardo bu nedenle Fibonacci olarak anılmaya başlanmıştır (Vajda, 1989; Vikipedi, 2014). 1202 yılında Liber Abaci (Cebir kitabı) isimli bir matematik kitabı yazmıştır. Bu kitapla Avrupa'ya Hint-Arap sayı sistemini tanıtmıştır. Aynı kitapta yeni doğmuş bir çift tavşanın (bir dişi, bir erkek) kapalı bir ortamdaki artışını, her tavşan çiftinin bir ay sonra bir yavru yapıp onun da bir ay sonra bir yavru yapacağı gibi ideal varsayımlar altında hesaplanmasını gösterir. Bu problemin çözümünde tavşan çiftlerinin sayısının artışını gösteren sayıya Fibonacci sayıları, diziye de Fibonacci dizisi denir. Bu dizinin ileri elemanlarında, bir sonraki elemanın bir önceki elemana oranı altın oran adı verilen ve yaklaşık 1,618 değerine eşit bir sayıyı verir. Bu sayı dizisi, 6. yüzyıldan itibaren Hintli matematikçiler tarafından bilinmekteydi. Ancak, Avrupa'ya ilk olarak Fibonacci tarafından tanıtılmıştır (Vikipedi, 2014).

Fibonacci sayıları, her $n \geq 1$ doğal sayı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{3.32}$$

bağıntısıyla tanımlanır.

F_n, *n.* Fibonacci sayısını ve $\{F_n\}$, elemanları Fibonacci sayılarından oluşan Fibonacci dizisini göstermektedir.

Lucas sayıları ise her $n \geq 1$ doğal sayı ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere;

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \tag{3.33}$$

bağıntısıyla tanımlanır.

Burada L_n, *n.* Lucas sayısını ve $\{L_n\}$, elemanları Lucas sayılarından oluşan Lucas dizisini göstermektedir.

Literatürde; Fibonacci ve Lucas dizileri, çeşitli genelleştirmeleri ve özellikleri ile ilgili çok sayıda çalışma yer almaktadır (Hoggat, 1969; Vajda, 1989; Robbins, 1993; Robinowitz, 1996; Koshy, 2001). Bunlardan Binet formülleri en önemli özellikleri arasındadır. Fransız matematikçi Binet, 1843 yılında Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formüllerini, $\forall n > 0$ doğal sayısı için

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} \tag{3.34}$$

ve

$$L_n = \phi^n + \psi^n \tag{3.35}$$

şeklinde vermiştir. Formüldeki ϕ ve ψ, Fibonacci sayılarının karakteristik polinomu olan $x^2 - x - 1$ in kökleridir. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ ve $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.61803$ dür (Vajda, 1989; Koshy, 2001).

Fibonacci dizisinin bir genelleştirilmesi, k ve s sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere $x^2 - kx - s = 0$ denklemi için $\Delta = k^2 + 4s > 0$ olacak şekilde her $n \geq 1$ tamsayısı için, $U_0(k,s) = 0$ ve $U_1(k,s) = 1$ koşulları altında

$$U_{n+1}(k,s) = kU_n(k,s) + sU_{n-1}(k,s) \tag{3.36}$$

bağıntısıyla tanımlanır. Genelleştirilmiş Lucas dizisi ise $V_0(k,s) = 2$ ve $V_1(k,s) = k$ için

$$V_{n+1}(k,s) = kV_n(k,s) + sV_{n-1}(k,s) \tag{3.37}$$

bağıntısıyla tanımlanır (Horadam, 1965; Robinowitz, 1996; Melham, 1997).

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülleri,

$$\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4s}}{2} \tag{3.38}$$

ve

$$\beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4s}}{2} \tag{3.39}$$

olmak üzere;

$$U_n(k,s) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{3.40}$$

ve

$$V_n(k,s) = \alpha^n + \beta^n \tag{3.41}$$

şeklindedir. Burada α ve β, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının karakteristik polinomu olan $x^2 - kx - s = 0$ ın kökleridir (Horadam, 1965; Robinowitz, 1996; Melham, 1997; Alekseyev, 2011). Burada $\alpha + \beta = k$, $\alpha - \beta = \sqrt{k^2 + 4s}$ ve $\alpha\beta = -s$ dir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölüm beş kısımdan oluşmuştur. Öncelikle bazı Pell denklemlerinin çözümleri incelenmiştir. Ardından da bu Pell denklemlerine bağlı olarak çözülen ikinci dereceden Diophantine denklemlerinin çözümleri araştırılmıştır.

4.1. $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=N$ Biçimindeki Pell Denklemleri

$b\geq 2$ tamsayı olmak üzere $\sqrt{b^2-b}$ nin sürekli kesir açılımı ve $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü aşağıda verilmiştir. Bu teoremin ispatı çeşitli kaynaklarda bulunabilir (Güney ve Keskin, 2013; Özkoç ve Tekcan, 2010).

Teorem 4.1.1. $b\geq 2$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=1$ denklemi için aşağıdakiler geçerlidir:

i) $\sqrt{b^2-b}$ nin sürekli kesir açılımı $\sqrt{b^2-b}=\left[b-1;\overline{2,2b-2}\right]$ şeklindedir.

ii) Temel çözümü $\left(x_1,y_1\right)=\left(2b-1,2\right)$ dir.

Teorem 4.1.2. $n\geq 1$ ve $b\geq 2$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(4b-2,-1\right)}{2},2U_n\left(4b-2,-1\right)\right) \tag{4.1}$$

şeklindedir (Peker ve Şenay, 2013).

İspat: $b\geq 2$ için aşağıdakiler geçerlidir:

Teorem 4.1.1-ii. den, $n\geq 1$ olmak üzere $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n+y_n\sqrt{b^2-b}=\left(2b-1+2\sqrt{b^2-b}\right)^n \tag{4.2}$$

şeklindedir.

$\alpha = 2b-1+2\sqrt{b^2-b}$ ve $\beta = 2b-1-2\sqrt{b^2-b}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha-\beta = 4\sqrt{b^2-b}$ ve $\alpha\beta = 1$ dir.

$$x_n + y_n\sqrt{b^2-b} = \alpha^n \tag{4.3}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{b^2-b} = \beta^n \tag{4.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı

$$x_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} = \frac{V_n\left(4b-2,-1\right)}{2} \tag{4.5}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{b^2-b}} = 2\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = 2U_n\left(4b-2,-1\right) \tag{4.6}$$

dir.

Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{V_n\left(4b-2,-1\right)}{2}, 2U_n\left(4b-2,-1\right)\right) \tag{4.7}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.3. b tamsayı olmak üzere $x^2-\left(b^2-b\right)y^2 = -1$ denkleminin $b>2$ için tamsayı çözümü yoktur.

İspat: $\sqrt{b^2-b}$ sürekli kesrinin periyot uzunluğu 2, yani çifttir. Teorem 3.2.3. den dolayı $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-1$ denkleminin çözümü yoktur.

Hatırlatma 4.1.4. Eğer $b=2$ ise o zaman $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-1$ denklemi $x^2-2y^2=-1$ şeklini alır. $x^2-2y^2=-1$ denkleminin temel çözümü $\left(x_1,y_1\right)=\left(1,1\right)$ dir. Bundan dolayı $n\in\mathbb{Z}^+$ için denklemin pozitif tamsayı çözümleri $x_n+y_n\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1}$ şeklindedir.

Teorem 4.1.5. $b\equiv 2,3\left(\bmod 4\right)$ ve $b\geq 2$ için $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=4$ denkleminin temel çözümü $\left(x_1,y_1\right)=\left(4b-2,4\right)$ dür (Peker ve Şenay, 2013).

İspat: $b\equiv 2,3\left(\bmod 4\right)$ ise $b^2-b\equiv 2\left(\bmod 4\right)$ dür. Teorem 3.2.12. ve Teorem 4.1.1-ii. den ispat açıktır.

Teorem 4.1.6. $n\geq 1$, $b\equiv 2,3\left(\bmod 4\right)$ ve $b\geq 2$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n+y_n\sqrt{b^2-b}=\frac{\left(4b-2+4\sqrt{b^2-b}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{4.8}$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 3.2.13. ve Teorem 4.1.5. den açıktır.

Teorem 4.1.7. $n\geq 1$, $b\equiv 2,3\left(\bmod 4\right)$ ve $b\geq 2$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(V_n\left(4b-2,-1\right),4U_n\left(4b-2,-1\right)\right) \tag{4.9}$$

şeklindedir (Peker ve Şenay, 2013).

İspat: Teorem 4.1.6. kullanılarak $n \geq 1$ olmak üzere $x^2 - \left(b^2 - b\right) y^2 = 4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n \sqrt{b^2 - b} = \frac{\left(4b - 2 + 4\sqrt{b^2 - b}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{4.10}$$

$$= 2\left(\frac{\left(4b - 2 + 4\sqrt{b^2 - b}\right)}{2}\right)^n \text{ dir.}$$

$\alpha = \dfrac{4b - 2 + 4\sqrt{b^2 - b}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{4b - 2 - 4\sqrt{b^2 - b}}{2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha - \beta = 4\sqrt{b^2 - b}$ dir.

$$x_n + y_n \sqrt{b^2 - b} = 2\alpha^n \tag{4.11}$$

ve

$$x_n - y_n \sqrt{b^2 - b} = 2\beta^n \tag{4.12}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı

$$x_n = \alpha^n + \beta^n = V_n\left(4b - 2, -1\right) \tag{4.13}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{b^2 - b}} = 4\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = 4U_n\left(4b - 2, -1\right) \tag{4.14}$$

dir.

Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(V_n\left(4b-2,-1\right), 4U_n\left(4b-2,-1\right)\right) \tag{4.15}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.8. $b \equiv 2,3 \pmod 4$ ve $b > 2$ tamsayısı için $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur (Peker ve Şenay, 2013).

İspat: $b \equiv 2,3 \pmod 4$ ise $b^2-b \equiv 2 \pmod 4$ tür. Dolayısıyla Teorem 3.2.10. dan $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün var olması için gerek ve yeter şartın $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün olması gerektiğini biliyoruz. Ancak Teorem 4.1.3. e göre $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-1$ denkleminin tamsayı çözümü olmadığından $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Hatırlatma 4.1.9. Eğer $b=2$ ise o zaman $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=-4$ denklemi $x^2-2y^2=-4$ şeklini alır. Hatırlatma 4.1.4. ten $x^2-2y^2=-1$ denkleminin temel çözümünün var olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 3.2.10. dan $x^2-2y^2=-4$ denklemi de çözüme sahiptir ve bu çözümler $n=0,1,2,\ldots$ için $x_n+y_n\sqrt{2}=\pm\left(2+2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ eşitliğini gerçekler.

4.2. $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=N$ Biçimindeki Pell Denklemleri

Teorem 4.2.1. $a \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=1$ denklemi için aşağıdakiler geçerlidir (Peker ve Şenay, 2015):

i) $\sqrt{a^2+2a}$ nın sürekli kesir açılımı $\sqrt{a^2+2a}=\left[a;\overline{1,2a}\right]$ şeklindedir.

ii) Temel çözümü $(x_1,y_1)=(a+1,1)$ dir.

iii) $(1,2a)_{n-1}$, $(1,2a)$ nın $n-1$ ardışık terimini göstermek üzere $n.$ çözüm (x_n,y_n)

$$\frac{x_n}{y_n}=\left[a;(1,2a)_{n-1},1\right] \tag{4.16}$$

şeklinde de bulunabilir.

İspat: i) $\sqrt{a^2+2a}=a+\left(\sqrt{a^2+2a}-a\right)=a+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{a^2+2a}+a}{2a}}$

$$=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{a^2+2a}-a}{2a}}=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{a^2+2a}+a}}$$

$$=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a+\left(\sqrt{a^2+2a}-a\right)}}.$$

olup, sonuçta $\sqrt{a^2+2a}=\left[a;\overline{1,2a}\right]$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

ii) $\sqrt{a^2+2a}$ nın sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu 2 dir. Bundan dolayı $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=1$ denkleminin temel çözümü $p_1+q_1\sqrt{a^2+2a}$ şeklindedir. $p_1=a_1p_0+p_{-1}=a+1$ ve $q_1=a_1q_0+q_{-1}=1$ olduğundan $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=1$ denkleminin temel çözümü $(x_1,y_1)=(a+1,1)$ dir.

iii) İfade tümevarımla ispatlanırsa,

$n=1$ için $\frac{x_1}{y_1}=[a,1]=a+\frac{1}{1}=\frac{a+1}{1}$

olduğundan iddia doğrudur.

$\left(x_n, y_n\right)$, $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=1$ denkleminin bir çözümü olsun. Yani $\dfrac{x_n}{y_n}=\left[a;\left(1,2a\right)_{n-1},1\right]$ olsun.

Şimdi $\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$ için ifadenin doğruluğunu gösterelim.

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{\ldots 2a+1}}}}} \tag{4.17}$$

$$=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a+a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{\ldots 2a+1}}}}}$$

$$=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a+\cfrac{x_n}{y_n}}}$$

$$=\frac{\left(a+1\right)x_n+\left(a^2+2a\right)y_n}{x_n+\left(a+1\right)y_n}\ .$$

$$x_{n+1}{}^2-\left(a^2+2a\right)y_{n+1}{}^2=\left(\left(a+1\right)x_n+\left(a^2+2a\right)y_n\right)^2-\left(a^2+2a\right)\left(x_n+\left(a+1\right)y_n\right)^2 \tag{4.18}$$

$$=x_n{}^2-\left(a^2+2a\right)y_n{}^2$$

$$=1$$

olduğundan (x_{n+1}, y_{n+1}), $x^2-(a^2+2a)y^2=1$ denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.2.2. $a,n\geq 1$ olmak üzere $x^2-(a^2+2a)y^2=1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n)=\left(\frac{V_n(2a+2,-1)}{2}, U_n(2a+2,-1)\right) \tag{4.19}$$

şeklindedir (Peker ve Şenay, 2015).

İspat: Teorem 4.2.1-ii. den, $a,n\geq 1$ olmak üzere $x^2-(a^2+2a)y^2=1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n+y_n\sqrt{a^2+2a}=\left(a+1+\sqrt{a^2+2a}\right)^n \tag{4.20}$$

şeklinde olacaktır. Buna göre

$\alpha=a+1+\sqrt{a^2+2a}$ ve $\beta=a+1-\sqrt{a^2+2a}$ kabulüyle $\alpha-\beta=2\sqrt{a^2+2a}$ ve $\alpha\beta=1$ dir. Buradan da

$$x_n+y_n\sqrt{a^2+2a}=\alpha^n \tag{4.21}$$

ve

$$x_n-y_n\sqrt{a^2+2a}=\beta^n \tag{4.22}$$

şeklinde olup

$$x_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}=\frac{V_n(2a+2,-1)}{2} \tag{4.23}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{a^2+2a}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = U_n\left(2a+2,-1\right) \tag{4.24}$$

dir.

Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{V_n\left(2a+2,-1\right)}{2}, U_n\left(2a+2,-1\right)\right) \tag{4.25}$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.3. $a \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2 - \left(a^2+2a\right)y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur (Peker ve Şenay, 2015).

İspat: $\sqrt{a^2+2a}$ sürekli kesrinin periyot uzunluğu 2, yani çifttir. Teorem 3.2.3. den dolayı $x^2 - \left(a^2+2a\right)y^2 = -1$ denkleminin çözümü yoktur.

Teorem 4.2.4. $a \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2 - \left(a^2+2a\right)y^2 = 4$ denkleminin temel çözümü $\left(x_1, y_1\right) = \left(2a+2, 2\right)$ dir (Peker ve Şenay, 2015).

İspat: a tek ise $a^2 + 2a \equiv 3 \pmod{4}$ dür. Teorem 3.2.12. ve Teorem 4.2.1-ii. den ispat açıktır.

a çift ise $a^2 + 2a \equiv 0 \pmod{4}$ dür. $a = 2t$ $\left(t \in \mathbb{Z}^+\right)$ olsun. O zaman denklem $x^2 - \left(4t^2+4t\right)y^2 = 4$ şeklini alır. Teorem 3.2.11. göz önüne alınırsa önce $x^2 - \left(t^2+t\right)y^2 = 1$ denkleminin incelenmesi gerektiği görülür.

$\sqrt{t^2+t}$ nin sürekli kesir açılımı,

$$\sqrt{t^2+t}=\begin{cases}\left[1;\overline{2}\right] & ,\mathrm{t}=1\\ \left[t;\overline{2,2t}\right] & ,\mathrm{t}>1\end{cases} \tag{4.26}$$

şeklindedir. Buna göre $x^2-\left(t^2+t\right)y^2=1$ denkleminin temel çözümü $\left(2t+1,2\right)$ dir. Teorem 3.2.11. den $x^2-\left(4t^2+4t\right)y^2=4$ denkleminin temel çözümü $\left(4t+2,2\right)$, yani $\left(x,y\right)=\left(2a+2,2\right)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.5. $a,n\geq 1$ olmak üzere $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(V_n\left(2a+2,-1\right),2U_n\left(2a+2,-1\right)\right) \tag{4.27}$$

şeklindedir (Peker ve Şenay, 2015).

İspat: Teorem 3.2.13. ve Teorem 4.2.4. kullanılarak $n\geq 1$ olmak üzere $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n+y_n\sqrt{a^2+2a}=\frac{\left(2a+2+2\sqrt{a^2+2a}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{4.28}$$

$$=2\left(\frac{\left(2a+2+2\sqrt{a^2+2a}\right)}{2}\right)^n \text{ dir.}$$

$\alpha=\dfrac{\left(2a+2+2\sqrt{a^2+2a}\right)}{2}$ ve $\beta=\dfrac{\left(2a+2-2\sqrt{a^2+2a}\right)}{2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha-\beta=2\sqrt{a^2+2a}$ olup

$$x_n+y_n\sqrt{a^2+2a}=2\alpha^n \tag{4.29}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{a^2+2a} = 2\beta^n \tag{4.30}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$x_n = \alpha^n + \beta^n = V_n\left(2a+2,-1\right) \tag{4.31}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{a^2+2a}} = 2\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = 2U_n\left(2a+2,-1\right) \tag{4.32}$$

dir.

Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(V_n\left(2a+2,-1\right), 2U_n\left(2a+2,-1\right)\right) \tag{4.33}$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.6. $a > 2$ tamsayı olsun. O zaman $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur (Peker ve Şenay, 2015).

İspat: a tek tamsayı ise $a^2+2a \equiv 3 \left(\mathrm{mod}\, 4\right)$ tür. Dolayısıyla Teorem 3.2.10. dan $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=-4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün var olması için gerek ve yeter şartın $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün var olması gerektiğini biliyoruz. Ancak Teorem 4.2.3. ten $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=-1$ denkleminin tamsayı çözümünün olmadığını görürüz. Bundan dolayı $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

a çift tamsayı ise, a^2+2a da çifttir. Denklemin $m^2-\left(a^2+2a\right)n^2=-4$ olacak şekilde m ve n pozitif tamsayı çözümünün olduğunu kabul edelim. a ve a^2+2a çift tamsayı olduğundan m de çifttir. $a=2k$ $\left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$ olsun. O zaman denklem $m^2-\left(4k^2+4k\right)n^2=-4$ şeklini alır. Bu denklem, 4 ile sadeleştirilerek tekrar düzenlenirse $\left(m/2\right)^2-\left(k^2+k\right)n^2=-1$ denklemi elde edilir. O halde bu denklem irdelenmelidir. $\sqrt{k^2+k}$ nın sürekli kesir açılımı,

$$\sqrt{k^2+k}=\begin{cases}\left[1;\overline{2}\right] & ,k=1\\ \left[k;\overline{2,2k}\right] & ,k>1\end{cases} \tag{4.34}$$

şeklindedir. $a>2$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı $k>1$ dir. $\sqrt{k^2+k}$ sürekli kesrinin periyot uzunluğu 2, yani çifttir. Dolayısıyla $\left(m/2\right)^2-\left(k^2+k\right)n^2=-1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur ki bu kabulümüz ile çelişir. O halde $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

4.3. $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=N$ Biçimindeki Pell Denklemleri

Teorem 4.3.1. $a\geq 2$ ve $b\geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=1$ denklemi için aşağıdakiler geçerlidir:

i) $\sqrt{a^2b^2-b}$ nin sürekli kesir açılımı

$$\sqrt{a^2b^2-b}=\begin{cases}\left[a-1;\overline{1,2a-2}\right] & ,b=1\\ \left[ab-1;\overline{1,2a-2,1,2ab-2}\right] & ,b>1\end{cases} \tag{4.35}$$

şeklindedir.

ii) Temel çözümü

$$\left(x_1, y_1\right)=\begin{cases}(a,1) & ,b=1\\ \left(2a^2b-1,2a\right) & ,b>1\end{cases} \tag{4.36}$$

dir.

iii) $(1,2a-2)_{n-1}$ ve $(1,2a-2,1,2ab-2)_{n-1}$, sırasıyla $(1,2a-2)$ ve $(1,2a-2,1,2ab-2)$ nin $n-1$ ardışık terimini göstermek üzere $n.$ çözüm (x_n, y_n)

$$\frac{x_n}{y_n}=\begin{cases}\left[a-1;(1,2a-2)_{n-1},1\right] & ,b=1\\ \left[ab-1;(1,2a-2,1,2ab-2)_{n-1},1\right] & ,b>1\end{cases} \tag{4.37}$$

şeklinde de bulunabilir.

İspat: i) $b=1$ ise,

$$\sqrt{a^2-1}=a-1+\left(\sqrt{a^2-1}-(a-1)\right)=a-1+\frac{2a-2}{\sqrt{a^2-1}+a-1}=a-1+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{a^2-1}+a-1}{2a-2}}$$

$$=a-1+\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{a^2-1}-a+1}{2a-2}}=a-1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}+a-1}}$$

$$=a-1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{2a-2+\left(\sqrt{a^2-1}-(a-1)\right)}}$$

bulunur.

Bundan dolayı $\sqrt{a^2-1}=\left[a-1;\overline{1,2a-2}\right]$ dir. Bu ispatı tamamlar.

$b>1$ ise,

$$\sqrt{a^2b^2-b}=ab-1+\left(\sqrt{a^2b^2-b}-(ab-1)\right)$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{a^2b^2-b}+(ab-1)}{2ab-b-1}}=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{a^2b^2-b}-(ab-b)}{2ab-b-1}}$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{a^2b^2-b}+(ab-b)}{b}}}=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{\sqrt{a^2b^2-b}-(ab-b)}{b}}}$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{a^2b^2-b}+(ab-b)}{2ab-b-1}}}}$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{a^2b^2-b}+(ab-1)}}}}$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2ab-b-1}{\sqrt{a^2b^2-b}-(ab-1)}}}}}$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{a^2b^2-b}+(ab-1)}}}}$$

$$= ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2ab-2+\left(\sqrt{a^2b^2-b}-(ab-1)\right)}}}}$$

bulunur.

Bundan dolayı $b>1$ iken, $\sqrt{a^2b^2-b}=\left[ab-1;\overline{1,2a-2,1,2ab-2}\right]$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

ii) $b=1$ ise, $(x_1,y_1)=(p_1,q_1)$ dir. Dolayısıyla p_1 ve q_1 değerleri bulunmalıdır. $p_1=a_1p_0+p_{-1}=a$ ve $q_1=a_1q_0+q_{-1}=1$ olduğundan $x^2-(a^2-1)y^2=1$ denkleminin temel çözümü $(x_1,y_1)=(a,1)$ dir.

$b>1$ ise, $(x_1,y_1)=(p_3,q_3)$ dür. Bu kez p_3 ve q_3 ün değerleri, $\sqrt{a^2b^2-b}$ nin 3. yakınsayanı yardımıyla bulunursa;

$$\frac{p_3}{q_3}=[ab-1;1,2a-2,1]=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{1}}}=\frac{2a^2b-1}{2a}$$ elde edilir. O halde

$(x_1,y_1)=(2a^2b-1,2a)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

iii) $b=1$ ise, o zaman $(x_1,y_1)=(a,1)$ olduğu biliniyor. $n=1$ için, $\frac{x_1}{y_1}=[a-1;1]=a-1+\frac{1}{1}=\frac{a}{1}$ dir. Bundan dolayı $n=1$ için doğrudur.

(x_n,y_n), $x^2-(a^2-1)y^2=1$ denkleminin bir çözümü olsun. Yani $\frac{x_n}{y_n}=\left[a-1;(1,2a-2)_{n-1},1\right]$ olsun.

Şimdi (x_{n+1},y_{n+1}) için doğruluğunu gösterelim.

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{...2a-2+1}}}}}$$

$$=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-1+a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{...2a-2+1}}}}}$$

$$=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-1+\cfrac{x_n}{y_n}}}$$

$$=\frac{ax_n+\left(a^2-1\right)y_n}{x_n+ay_n}\ .$$

$$x_{n+1}^{\ 2}-\left(a^2-1\right)y_{n+1}^{\ 2}=\left(ax_n+\left(a^2-1\right)y_n\right)^2-\left(a^2-1\right)\left(x_n+ay_n\right)^2 \tag{4.38}$$

$$=x_n^{\ 2}-\left(a^2-1\right)y_n^{\ 2}$$

$$=1$$

olduğundan $\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)$, $x^2-\left(a^2-1\right)y^2=1$ denkleminin bir çözümüdür.

$b>1$ için de benzer bir indüksiyon uygulanarak ispat yapılabilir.

Teorem 4.3.2. $a\geq 2$ ve $b,n\geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$
(x_n, y_n) = \begin{cases} \left(\left(V_n(2a,-1)\right)/2, U_n(2a,-1)\right) & , b=1 \\ \left(\left(V_n\left(4a^2b-2,-1\right)\right)/2, 2aU_n\left(4a^2b-2,-1\right)\right) & , b>1 \end{cases} \tag{4.39}
$$

şeklindedir.

İspat: $b>1$ ise aşağıdakiler geçerlidir.

Teorem 4.3.1-ii. den, $n \geq 1$ olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$
x_n + y_n\sqrt{a^2b^2-b} = \left(2a^2b-1+2a\sqrt{a^2b^2-b}\right)^n \tag{4.40}
$$

şeklinde gösterilir.

$\alpha = 2a^2b-1+2a\sqrt{a^2b^2-b}$ ve $\beta = 2a^2b-1-2a\sqrt{a^2b^2-b}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha-\beta = 4a\sqrt{a^2b^2-b}$ dir. Buradan

$$
x_n + y_n\sqrt{a^2b^2-b} = \alpha^n \tag{4.41}
$$

ve

$$
x_n - y_n\sqrt{a^2b^2-b} = \beta^n \tag{4.42}
$$

bulunur. Buradan da

$$
x_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} = \frac{V_n\left(4a^2b-2,-1\right)}{2} \tag{4.43}
$$

ve

$$
y_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{a^2b^2-b}} = 2a\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = 2aU_n\left(4a^2b-2,-1\right) \tag{4.44}
$$

dir. Yani,

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(4a^2b-2,-1\right)}{2}, 2aU_n\left(4a^2b-2,-1\right)\right) \tag{4.45}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $b=1$ için $\left(x_n, y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a,-1\right)}{2}, U_n\left(2a,-1\right)\right)$ olduğu da ispatlanır.

Teorem 4.3.3. $a \geq 2$ ve $b \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=-1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat: $\sqrt{a^2b^2-b}$ sürekli kesrinin periyot uzunluğu çifttir. Teorem 3.2.3. den dolayı $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=-1$ denkleminin çözümü yoktur.

Teorem 4.3.4. a tek tamsayı ve $b \equiv 2,3 \pmod 4$ tamsayı veya a çift ve $b \equiv 1,2 \pmod 4$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=4$ denkleminin temel çözümü

$$\left(x_1, y_1\right)=\begin{cases} \left(2a, 2\right) & , b=1 \\ \left(4a^2b-2, 4a\right) & , b>1 \end{cases} \tag{4.46}$$

şeklindedir.

İspat: a tek tamsayı ve $b \equiv 2,3 \pmod 4$ ise $a^2b^2-b \equiv 2 \pmod 4$ dür.

a çift tamsayı ve $b \equiv 1 \pmod 4$ ise $a^2b^2-b \equiv 3 \pmod 4$ dür.

a çift tamsayı ve $b \equiv 2 \pmod 4$ ise $a^2b^2-b \equiv 2 \pmod 4$ dür.

Dolayısıyla Teorem 3.2.12. ve Teorem 4.3.1-ii. den ispat açıktır.

Teorem 4.3.5. a tek tamsayı ve $b \equiv 2,3 \pmod 4$ tamsayı veya a çift ve $b \equiv 1,2 \pmod 4$ tamsayı ve $n \geq 1$ olmak üzere $x^2 - \left(a^2b^2 - b\right)y^2 = 4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right) = \begin{cases} \left(V_n\left(2a,-1\right), 2U_n\left(2a,-1\right)\right) & ,b=1 \\ \left(V_n\left(4a^2b-2,-1\right), 4aU_n\left(4a^2b-2,-1\right)\right) & ,b>1 \end{cases} \tag{4.47}$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 4.3.4. den a tek tamsayı ve $b \equiv 2,3 \pmod 4$ tamsayı veya a çift ve $b \equiv 1,2 \pmod 4$ tamsayı olmak üzere $x^2 - \left(a^2b^2 - b\right)y^2 = 4$ denkleminin temel çözümünün

$$\left(x_1, y_1\right) = \begin{cases} \left(2a, 2\right) & ,b=1 \\ \left(4a^2b-2, 4a\right) & ,b>1 \end{cases} \tag{4.48}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$b=1$ ise $n \geq 1$ olmak üzere $x^2 - \left(a^2b^2 - b\right)y^2 = 4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - b} = \frac{\left(2a + 2\sqrt{a^2b^2 - b}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{4.49}$$

$$= 2\left(\frac{2a + 2\sqrt{a^2b^2 - b}}{2}\right)^n \text{ dir.}$$

$\alpha = \dfrac{2a + 2\sqrt{a^2b^2 - b}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{2a - 2\sqrt{a^2b^2 - b}}{2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha - \beta = 2\sqrt{a^2b^2 - b}$ dir.

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - b} = 2\alpha^n \tag{4.50}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{a^2b^2 - b} = 2\beta^n \tag{4.51}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı

$$x_n = \alpha^n + \beta^n = V_n\left(2a,-1\right) \tag{4.52}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{a^2b^2 - b}} = 2\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = 2U_n\left(2a,-1\right) \tag{4.53}$$

dir.

Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(V_n\left(2a,-1\right), 2U_n\left(2a,-1\right)\right) \tag{4.54}$$

şeklindedir.

$b > 1$ ise $n \geq 1$ olmak üzere $x^2 - \left(a^2b^2 - b\right)y^2 = 4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - b} = \frac{\left(4a^2b - 2 + 4a\sqrt{a^2b^2 - b}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{4.55}$$

$$= 2\left(\frac{4a^2b - 2 + 4a\sqrt{a^2b^2 - b}}{2}\right)^n \text{ dir.}$$

$\alpha = \dfrac{4a^2b - 2 + 4a\sqrt{a^2b^2 - b}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{4a^2b - 2 - 4a\sqrt{a^2b^2 - b}}{2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha - \beta = 4a\sqrt{a^2b^2 - b}$ dir.

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - b} = 2\alpha^n \tag{4.56}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{a^2b^2 - b} = 2\beta^n \tag{4.57}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı

$$x_n = \alpha^n + \beta^n = V_n\left(4a^2b - 2, -1\right) \tag{4.58}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{a^2b^2 - b}} = 4a\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = 4aU_n\left(4a^2b - 2, -1\right) \tag{4.59}$$

dir.

Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(V_n\left(4a^2b - 2, -1\right), 4aU_n\left(4a^2b - 2, -1\right)\right) \tag{4.60}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.3.6. $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ tamsayı olmak üzere $x^2 - \left(9k^2 - 3\right)y^2 = 1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{V_n\left(12k^2-2,-1\right)}{2}, 2kU_n\left(12k^2-2,-1\right)\right) \tag{4.61}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.3.7. $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(9k^2-3\right)y^2=4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(V_n\left(12k^2-2,-1\right), 4kU_n\left(12k^2-2,-1\right)\right) \tag{4.62}$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.8. a tek tamsayı ve $b \equiv 2,3 \pmod 4$ tamsayı veya a çift tamsayı ve $b \neq 0 \pmod 4$ olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat: a tek tamsayı olsun. Eğer $b \equiv 2,3 \pmod 4$ tamsayı ise $a^2b^2-b \equiv 2 \pmod 4$ tür. Dolayısıyla Teorem 3.2.10 ve Teorem 4.3.3. ten $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

a çift tamsayı olsun. Eğer a çift tamsayı ve $b \neq 0 \pmod 4$ tamsayı ise $a^2b^2-b \equiv 1,2,3 \pmod 4$ tür. Dolayısıyla Teorem 3.2.10. ve Teorem 4.3.3. ten $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Bu da ispatı tamamlar.

4.4. $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=N$ Biçimindeki Pell Denklemleri

Teorem 4.4.1. $a \geq 3$, $b > 2$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=1$ denklemi için aşağıdakiler geçerlidir:

i) $\sqrt{a^2b^2-2b}$ nin sürekli kesir açılımı

$$\sqrt{a^2b^2-2b}=\left[ab-1;\overline{1,a-2,1,2ab-2}\right] \tag{4.63}$$

şeklindedir.

ii) Temel çözümü

$\left(x_1,y_1\right)=\left(a^2b-1,a\right)$ dır.

iii) $\left(1,a-2,1,2ab-2\right)_{n-1}$, $\left(1,a-2,1,2ab-2\right)$ nin $n-1$ ardışık terimini göstermek üzere n. çözüm $\left(x_n,y_n\right)$

$$\frac{x_n}{y_n}=\left[ab-1;\left(1,a-2,1,2ab-2\right)_{n-1},1\right] \tag{4.64}$$

şeklinde de bulunabilir.

İspat: i)

$$\sqrt{a^2b^2-2b}=ab-1+\left(\sqrt{a^2b^2-2b}-\left(ab-1\right)\right)$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{a^2b^2-2b}+\left(ab-1\right)}{2ab-2b-1}}$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{a^2b^2-2b}-\left(ab-2b\right)}{2ab-2b-1}}$$

$$=ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{a^2b^2-2b}+\left(ab-2b\right)}{2b}}}$$

$$= ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{\sqrt{a^2b^2-2b}-(ab-2b)}{2b}}}$$

$$= ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{a^2b^2-2b}+(ab-2b)}{2ab-2b-1}}}}$$

$$= ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2ab-2b-1}{\sqrt{a^2b^2-2b}-(ab-1)}}}}}$$

$$= ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{a^2b^2-2b}+(ab-1)}}}}$$

$$= ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{a^2b^2-2b}+(ab-1)}}}}$$

$$= ab-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2ab-2+\left(\sqrt{a^2b^2-2b}-(ab-1)\right)}}}} \text{ dir.}$$

Bundan dolayı $\sqrt{a^2b^2-2b}=\left[ab-1;\overline{1,a-2,1,2ab-2}\right]$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

ii) $(x_1, y_1) = (p_3, q_3)$ dür. Bu kez p_3 ve q_3 ün değerleri, $\sqrt{a^2b^2 - 2b}$ nin 3. yakınsayanı yardımıyla bulunursa;

$\frac{p_3}{q_3} = [ab-1;1,a-2,1] = ab - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a - 2 + \frac{1}{1}}} = \frac{a^2b-1}{a}$ elde edilir. O halde

$(x_1, y_1) = (a^2b - 1, a)$ dır ki ispat biter.

iii) İspat, Teorem 4.3.1-iii. nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.4.2. $a \geq 3$, $b > 2$ ve $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2 - (a^2b^2 - 2b)y^2 = 1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{V_n(2a^2b - 2, -1)}{2}, aU_n(2a^2b - 2, -1) \right) \tag{4.65}$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 4.4.1-ii. den, $n \geq 1$ olmak üzere $x^2 - (a^2b^2 - 2b)y^2 = 1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - 2b} = \left(a^2b - 1 + a\sqrt{a^2b^2 - 2b}\right)^n \tag{4.66}$$

şeklinde gösterilir.

$\alpha = a^2b - 1 + a\sqrt{a^2b^2 - 2b}$ ve $\beta = a^2b - 1 - a\sqrt{a^2b^2 - 2b}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha - \beta = 2a\sqrt{a^2b^2 - 2b}$ dir.

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - 2b} = \alpha^n \tag{4.67}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{a^2b^2-2b} = \beta^n \tag{4.68}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı

$$x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} = \frac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)}{2} \tag{4.69}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{a^2b^2-2b}} = a\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} = aU_n\left(2a^2b-2,-1\right) \tag{4.70}$$

dir. Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)}{2}, aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)\right) \tag{4.71}$$

şeklindedir.

Teorem 4.4.3. $a \geq 3$ ve $b > 2$ tamsayı olmak üzere $x^2 - \left(a^2b^2-2b\right)y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat: $\sqrt{a^2b^2-2b}$ sürekli kesrinin periyot uzunluğu çifttir. Teorem 3.2.3. den dolayı $x^2 - \left(a^2b^2-2b\right)y^2 = -1$ denkleminin çözümü yoktur.

Teorem 4.4.4. $a \geq 3$, $b > 2$ tamsayı olmak üzere $x^2 - \left(a^2b^2-2b\right)y^2 = 4$ denkleminin temel çözümü

$$\left(x_1, y_1\right) = \left(2a^2b-2, 2a\right) \tag{4.72}$$

şeklindedir.

İspat: $a \geq 3$ ve $b > 2$ tamsayı olmak üzere;

$b > 2$ tek tamsayı ise $a^2b^2 - 2b \equiv 2,3 \pmod 4$ dür. Teorem 3.2.12. ve Teorem 4.4.1-ii. den ispat açıktır.

$b > 2$ çift tamsayı ise $a^2b^2 - 2b \equiv 0 \pmod 4$ dür. O halde $x^2 - (a^2b^2 - 2b)y^2 = 4$ denkleminde x çift olmalıdır. $t > 1$ tamsayı olmak üzere $b = 2t$ olsun. Denklem $x^2 - (a^2 4t^2 - 4t)y^2 = 4$ şeklini alır. Denklem 4 ile sadeleştirilirse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - (a^2t^2 - t)y^2 = 1$ elde edilir. Teorem 4.3.1-ii. den, $t > 1$ olduğundan; denklemin temel çözümü $(2a^2t - 1, 2a)$ dır. Dolayısıyla $x = 4a^2t - 2 = 2a^2b - 2$ ve $y = 2a$ dır. Yani $x^2 - (a^2b^2 - 2b)y^2 = 4$ denkleminde temel çözüm $(2a^2b - 2, 2a)$ dır.

Teorem 4.4.5. $a \geq 3$, $b > 2$ ve $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2 - (a^2b^2 - 2b)y^2 = 4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = \left(V_n\left(2a^2b - 2, -1\right), 2aU_n\left(2a^2b - 2, -1\right)\right) \tag{4.73}$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 4.4.4. kullanılarak, $a \geq 3$, $b > 2$ ve $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x^2 - (a^2b^2 - 2b)y^2 = 4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - 2b} = \frac{\left(2a^2b - 2 + 2a\sqrt{a^2b^2 - 2b}\right)^n}{2^{n-1}}$$

$$= 2\left(\frac{\left(2a^2b - 2 + 2a\sqrt{a^2b^2 - 2b}\right)}{2}\right)^n \text{ dir.}$$

$\alpha = \dfrac{2a^2b - 2 + 2a\sqrt{a^2b^2 - 2b}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{2a^2b - 2 - 2a\sqrt{a^2b^2 - 2b}}{2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha - \beta = 2a\sqrt{a^2b^2 - 2b}$ dir.

$$x_n + y_n\sqrt{a^2b^2 - 2b} = 2\alpha^n \tag{4.74}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{a^2b^2 - 2b} = 2\beta^n \tag{4.75}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı

$$x_n = \alpha^n + \beta^n = V_n\left(2a^2b - 2, -1\right) \tag{4.76}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{a^2b^2 - 2b}} = 2a\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = 2aU_n\left(2a^2b - 2, -1\right) \tag{4.77}$$

dir.

Yani,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(V_n\left(2a^2b - 2, -1\right), 2aU_n\left(2a^2b - 2, -1\right)\right) \tag{4.78}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.4.6. $n \geq 1$ ve $k \geq 3$ tamsayı olmak üzere $x^2 - \left(9k^2 - 6\right)y^2 = 1$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(6k^2-2,-1\right)}{2}, kU_n\left(6k^2-2,-1\right)\right) \tag{4.79}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.4.7. $n \geq 1$ ve $k \geq 3$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(9k^2-6\right)y^2=4$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(V_n\left(6k^2-2,-1\right), 2kU_n\left(6k^2-2,-1\right)\right) \tag{4.80}$$

şeklindedir.

Teorem 4.4.8. $a \geq 3$ ve $b > 2$ tamsayı olmak üzere $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat: b tek tamsayı olsun. O zaman $a^2b^2-2b \equiv 2,3 \left(\bmod 4\right)$ tür. Dolayısıyla Teorem 3.2.10. dan, $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=-4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün olması için gerek ve yeter şartın $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün olması gerektiğini biliyoruz. Ancak Teorem 4.4.3. ten, $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=-1$ denkleminin tamsayı çözümünün olmadığını görürüz. Bundan dolayı $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

b çift tamsayı olsun. O zaman a^2b^2-2b de çifttir. Denklemin $m^2-\left(a^2b^2-2b\right)n^2=-4$ olacak şekilde m ve n pozitif tamsayı çözümünün olduğunu kabul edelim. b ve a^2b^2-2b çift olduğundan m de çifttir. $b=2k$ $\left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$ olsun. O zaman denklem $m^2-\left(a^2 4k^2-4k\right)n^2=-4$ şeklini alır. Bu denklem 4 ile sadeleştirilerek tekrar düzenlenirse $\left(m/2\right)^2-\left(a^2k^2-k\right)n^2=-1$ denklemi elde edilir. Teorem 4.3.3. ten, $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün olmadığını biliyoruz.

Dolayısıyla bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2=-4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

4.5. Bazı Kuadratik Diophantine Denklemlerin Çözümleri

Teorem 4.5.1. $a,n\geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere

$$x^2-\left(a^2+2a\right)y^2+2x+2k\left(a^2+2a\right)y-k^2\left(a^2+2a\right)=0 \qquad (4.81)$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a+2,-1\right)-V_0\left(2a+2,-1\right)}{V_0\left(2a+2,-1\right)},\mathrm{U}_n\left(2a+2,-1\right)+k\right) \qquad (4.82)$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2+2x+2k\left(a^2+2a\right)y-k^2\left(a^2+2a\right)=0$ kuadratik Diophantine denklemini çözmek için denklemi indirgeyelim. $x=u-1$ ve $y=v+k$ değişken dönüşümü yapılırsa denklem Pell denklemine dönüşür ve

$$u^2-\left(a^2+2a\right)v^2=1 \qquad (4.83)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.2.2. den

$\left(u_n,v_n\right)=\left(\dfrac{V_n\left(2a+2,-1\right)}{2},U_n\left(2a+2,-1\right)\right)$ dir. Bundan dolayı

$\left(x_n,\mathrm{y}_n\right)=\left(\dfrac{V_n\left(2a+2,-1\right)-V_0\left(2a+2,-1\right)}{V_0\left(2a+2,-1\right)},U_n\left(2a+2,-1\right)+k\right)$ dır.

Sonuç 4.5.2. $a,n\geq 1$ olmak üzere

$$x^2-\left(a^2+2a\right)y^2+2x+\left(8a^4+32a^3+30a^2-4a\right)y-48a^5-192a^4-168a^3+48a^2-3a=0$$

denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a+2,-1\right)-V_0\left(2a+2,-1\right)}{V_0\left(2a+2,-1\right)},\mathrm{U}_n\left(2a+2,-1\right)+\mathrm{U}_3\left(2a+2,-1\right)\right) \tag{4.84}$$

şeklindedir.

Teorem 4.5.3. $a,n\geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere

$$x^2-\left(a^2+2a\right)y^2-\left(2a+4\right)x+\left(2a^2+4a\right)y+2a+3=0 \tag{4.85}$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a+2,-1\right)+V_1\left(2a+2,-1\right)+V_0\left(2a+2,-1\right)}{V_0\left(2a+2,-1\right)},\mathrm{U}_n\left(2a+2,-1\right)+\mathrm{U}_1\left(2a+2,-1\right)\right)$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2-\left(2a+4\right)x+\left(2a^2+4a\right)y+2a+3=0$ kuadratik Diophantine denklemine $x=u+a+2$ ve $y=v+1$ değişken dönüşümü uygulanırsa denklem, Pell denklemine dönüşür ve

$$u^2-\left(a^2+2a\right)v^2=1 \tag{4.86}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü, Teorem 4.2.2. den

$\left(u_n,v_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a+2,-1\right)}{2},U_n\left(2a+2,-1\right)\right)$ dir. Bundan dolayı

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a+2,-1\right)+V_1\left(2a+2,-1\right)+V_0\left(2a+2,-1\right)}{V_0\left(2a+2,-1\right)}, \mathrm{U}_n\left(2a+2,-1\right)+\mathrm{U}_1\left(2a+2,-1\right)\right)$$

dir.

Teorem 4.5.4. $a,n\geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere

$$x^2-\left(a^2+2a\right)y^2+2x+2k\left(a^2+2a\right)y-3-k^2\left(a^2+2a\right)=0 \tag{4.87}$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(V_n\left(2a+2,-1\right)-\mathrm{U}_1\left(2a+2,-1\right), 2\,\mathrm{U}_n\left(2a+2,-1\right)+k\right) \tag{4.88}$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2+2x+2k\left(a^2+2a\right)y-3-k^2\left(a^2+2a\right)=0$ kuadratik Diophantine denklemini çözmek için denklemi Pell tipindeki denkleme indirgeyelim. $x=u-1$ ve $y=v+k$ değişken dönüşümü yapılırsa denklem

$$u^2-\left(a^2+2a\right)v^2=4 \tag{4.89}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.2.5. den $\left(u_n, v_n\right)=\left(V_n\left(2a+2,-1\right), 2U_n\left(2a+2,-1\right)\right)$ dir. Bundan dolayı $\left(x_n, y_n\right)=\left(V_n\left(2a+2,-1\right)-\mathrm{U}_1\left(2a+2,-1\right), 2\,\mathrm{U}_n\left(2a+2,-1\right)+k\right)$ dır.

Teorem 4.5.5. $a\geq 2$, $b,n\geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere

$$x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2+2x+2k\left(a^2b^2-b\right)y-k^2\left(a^2b^2-b\right)=0 \tag{4.90}$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n,y_n)=\begin{cases}\left(\dfrac{V_n(2a,-1)-V_0(2a,-1)}{V_0(2a,-1)},U_n(2a,-1)+k\right) & ,b=1\\ \left(\dfrac{V_n(4a^2b-2,-1)-V_0(4a^2b-2,-1)}{V_0(4a^2b-2,-1)},2aU_n(4a^2b-2,-1)+k\right) & ,b>1\end{cases} \quad (4.91)$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-(a^2b^2-b)y^2+2x+2k(a^2b^2-b)y-k^2(a^2b^2-b)=0$ kuadratik Diophantine denklemini çözmek için denklemi indirgeyelim. $x=u-1$ ve $y=v+k$ değişken dönüşümü yapılırsa denklem Pell denklemine dönüşür ve

$$u^2-(a^2b^2-b)v^2=1 \quad (4.92)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.3.2. den

$$(u_n,v_n)=\begin{cases}\left((V_n(2a,-1))/2,U_n(2a,-1)\right) & ,b=1\\ \left((V_n(4a^2b-2,-1))/2,2aU_n(4a^2b-2,-1)\right) & ,b>1\end{cases}$$ dir. Bundan dolayı

$$(x_n,y_n)=\begin{cases}\left(\dfrac{V_n(2a,-1)-V_0(2a,-1)}{V_0(2a,-1)},U_n(2a,-1)+k\right) & ,b=1\\ \left(\dfrac{V_n(4a^2b-2,-1)-V_0(4a^2b-2,-1)}{V_0(4a^2b-2,-1)},2aU_n(4a^2b-2,-1)+k\right) & ,b>1\end{cases}$$ dır.

Teorem 4.5.6. $a\geq 2$, $b,n\geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere

$$x^2-(a^2b^2-b)y^2-(2ab+4)x+(2a^2b^2-2b)y+b(4a+1)+3=0 \quad (4.93)$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n,y_n)=\begin{cases}\left(\dfrac{V_n(2a,-1)+V_1(2a,-1)}{V_0(2a,-1)}+V_0(2a,-1),U_n(2a,-1)+U_1(2a,-1)\right) & ,b=1\\ \left(\dfrac{V_n(4a^2b-2,-1)}{V_0(4a^2b-2,-1)}+V_0(4a^2b-2,-1)+ab,2aU_n(4a^2b-2,-1)+U_1(4a^2b-2,-1)\right) & ,b>1\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-(a^2b^2-b)y^2-(2ab+4)x+(2a^2b^2-2b)y+b(4a+1)+3=0$ kuadratik Diophantine denklemine $x=u+ab+2$ ve $y=v+1$ değişken dönüşümü uygulanırsa denklem, Pell denklemine dönüşür ve

$$u^2-(a^2b^2-b)v^2=1 \tag{4.94}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.3.2. den

$$(u_n,v_n)=\begin{cases}\left(\left(V_n(2a,-1)\right)/2,U_n(2a,-1)\right) & ,b=1\\ \left(\left(V_n(4a^2b-2,-1)\right)/2,2aU_n(4a^2b-2,-1)\right) & ,b>1\end{cases}$$ dir. Bundan dolayı

$$(x_n,y_n)=\begin{cases}\left(\dfrac{V_n(2a,-1)+V_1(2a,-1)}{V_0(2a,-1)}+V_0(2a,-1),U_n(2a,-1)+U_1(2a,-1)\right) & ,b=1\\ \left(\dfrac{V_n(4a^2b-2,-1)}{V_0(4a^2b-2,-1)}+V_0(4a^2b-2,-1)+ab,2aU_n(4a^2b-2,-1)+U_1(4a^2b-2,-1)\right) & ,b>1\end{cases}$$

dir.

Teorem 4.5.7. $a\geq 2$; a tek tamsayı ve $b\equiv 2,3\pmod 4$ tamsayı veya a çift tamsayı ve $b\equiv 1,2\pmod 4$ tamsayı ve $n\geq 1$ olmak üzere

$$x^2-(a^2b^2-b)y^2-(2ab+4)x+(2a^2b^2-2b)y+b(4a+1)=0 \tag{4.95}$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{2V_n\left(2a,-1\right)+V_1\left(2a,-1\right)+2V_0\left(2a,-1\right)}{V_0\left(2a,-1\right)},2U_n\left(2a,-1\right)+U_1\left(2a,-1\right)\right) & ,b=1\\ \left(V_n\left(4a^2b-2,-1\right)+V_0\left(4a^2b-2,-1\right)+ab,4aU_n\left(4a^2b-2,-1\right)+U_1\left(4a^2b-2,-1\right)\right) & ,b>1\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-\left(a^2b^2-b\right)y^2-\left(2ab+4\right)x+\left(2a^2b^2-2b\right)y+b\left(4a+1\right)=0$ kuadratik Diophantine denklemini çözmek için denklemi Pell tipindeki denkleme indirgeyelim. $x=u+ab+2$ ve $y=v+1$ değişken dönüşümü yapılırsa denklem

$$u^2-\left(a^2b^2-b\right)v^2=4 \tag{4.96}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.3.5. den

$$\left(u_n,v_n\right)=\begin{cases}\left(V_n\left(2a,-1\right),2U_n\left(2a,-1\right)\right) & ,b=1\\ \left(V_n\left(4a^2b-2,-1\right),4aU_n\left(4a^2b-2,-1\right)\right) & ,b>1\end{cases} \tag{4.97}$$

dir. Bundan dolayı

$$\left(x_n,y_n\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{2V_n\left(2a,-1\right)+V_1\left(2a,-1\right)+2V_0\left(2a,-1\right)}{V_0\left(2a,-1\right)},2U_n\left(2a,-1\right)+U_1\left(2a,-1\right)\right) & ,b=1\\ \left(V_n\left(4a^2b-2,-1\right)+V_0\left(4a^2b-2,-1\right)+ab,4aU_n\left(4a^2b-2,-1\right)+U_1\left(4a^2b-2,-1\right)\right) & ,b>1\end{cases}$$

dir.

Teorem 4.5.8. $a\geq 3$, $b>2$, $n\geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere

$$x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2+2x+2k\left(a^2b^2-2b\right)y-k^2\left(a^2b^2-2b\right)=0 \qquad (4.98)$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)-V_0\left(2a^2b-2,-1\right)}{V_0\left(2a^2b-2,-1\right)},aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)+k\right) \qquad (4.99)$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2+2x+2k\left(a^2b^2-2b\right)y-k^2\left(a^2b^2-2b\right)=0$ kuadratik Diophantine denklemini çözmek için denklemi indirgeyelim. $x=u-1$ ve $y=v+k$ değişken dönüşümü yapılırsa denklem, Pell denklemine dönüşür ve

$$u^2-\left(a^2b^2-2b\right)v^2=1 \qquad (4.100)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.4.2. den

$$\left(u_n,v_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)}{2},aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)\right)$$ dir. Bundan dolayı

$$\left(x_n,y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)-V_0\left(2a^2b-2,-1\right)}{V_0\left(2a^2b-2,-1\right)},aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)+k\right)$$ dır.

Teorem 4.5.9. $a\geq 3$, $b>2$, $n\geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere

$$x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2-\left(2ab+4\right)x+\left(2a^2b^2-4b\right)y+b\left(4a+1\right)+3=0 \qquad (4.101)$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)}{V_0\left(2a^2b-2,-1\right)}+V_0\left(2a^2b-2,-1\right)+ab, aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)+U_1\left(2a^2b-2,-1\right)\right)$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2-\left(2ab+4\right)x+\left(2a^2b^2-4b\right)y+b\left(4a+1\right)+3=0$ kuadratik Diophantine denklemine $x=u+ab+2$ ve $y=v+1$ değişken dönüşümü uygulanırsa denklem, Pell denklemine dönüşür ve

$$u^2-\left(a^2b^2-2b\right)v^2=1 \tag{4.102}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.4.2. den

$\left(u_n, v_n\right)=\left(\dfrac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)}{2}, aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)\right)$ dir. Bundan dolayı

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(\frac{V_n\left(2a^2b-2,-1\right)}{V_0\left(2a^2b-2,-1\right)}+V_0\left(2a^2b-2,-1\right)+ab, aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)+U_1\left(2a^2b-2,-1\right)\right)$$

dir.

Teorem 4.5.10. $a\geq 3$, $b>2$ tamsayı ve $n\geq 1$ olmak üzere

$$x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2-\left(2ab+4\right)x+\left(2a^2b^2-4b\right)y+4ab+b=0 \tag{4.103}$$

kuadratik Diophantine denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümleri

$$\left(x_n, y_n\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{2V_n\left(2a,-1\right)+V_1\left(2a,-1\right)+2V_0\left(2a,-1\right)}{V_0\left(2a,-1\right)}, 2U_n\left(2a,-1\right)+U_1\left(2a,-1\right)\right) & , b=1 \\ \left(V_n\left(4a^2b-2,-1\right)+V_0\left(4a^2b-2,-1\right)+ab, 4aU_n\left(4a^2b-2,-1\right)+U_1\left(4a^2b-2,-1\right)\right) & , b>1\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: $x^2-\left(a^2b^2-2b\right)y^2-\left(2ab+4\right)x+\left(2a^2b^2-4b\right)y+4ab+b=0$ kuadratik Diophantine denklemini çözmek için denklemi Pell tipindeki denkleme indirgeyelim. $x=u+ab+2$ ve $y=v+1$ değişken dönüşümü yapılırsa denklem

$$u^2-\left(a^2b^2-2b\right)v^2=4 \tag{4.104}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü Teorem 4.4.5. den

$$\left(u_n, v_n\right)=\left(V_n\left(2a^2b-2,-1\right), 2aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)\right) \tag{4.105}$$

dir. Bundan dolayı

$$\left(x_n, y_n\right)=\left(V_n\left(2a^2b-2,-1\right)+V_0\left(2a^2b-2,-1\right)+ab, 2aU_n\left(2a^2b-2,-1\right)+U_1\left(2a^2b-2,-1\right)\right)$$

dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Çalışmada; uzun bir geçmişe sahip olan Diophantine denklemleri incelenmiş ve özel olarak da $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ tipindeki bazı denklemlerin tamsayı çözümleri araştırılmıştır. Bu yapılırken, denklemlere çeşitli dönüşümler uygulanarak Pell tipindeki denklemlere indirgenmiştir. (x_n, y_n) incelenilen denklemlerin n. çözümü olmak üzere, bu denklemlerin çözümleri sürekli kesir açılımları kullanılarak formüle edilmiştir. Buna ilaveten bazı Diophantine denklemlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı çözümleri bulunmuştur.

5.2 Öneriler

Literatürden de görüleceği üzere; çok farklı formlarda Diophantine denklemleri ve bu denklemlerin çözümleri için farklı yöntemler mevcuttur. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar daha farklı formdaki Diophantine denklemlerinin çözümlerinin araştırılmasında kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Adler, A. ve Coury, J. E., 1995, The Theory of Numbers, *Jones and Barlett Publishers*, Boston.

Alekseyev, M. A., 2011, On the Intersections of Fibonacci, Pell and Lucas Numbers, *Integers*, 11 (3), 239-259.

Andreescu, T., Andrica, D. ve Cucurezeanu, I., 2010, An Introduction to Diophantine Equations, A Problem-Based Approach, *Springer Science+Business Media*, New York.

Bahramian, M. ve Daghigh, H., 2013, A Generalized Fibonacci Sequence and the Diophantine Equations $x^2 \pm kxy - y^2 \pm x = 0$, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 8 (2), 111-121.

Bapoungue, L., 2003, The Diophantine Equation $ax^2 + 2bxy - 4ay^2 = \pm 1$, *IJMMS*, 35, 2241-2253.

Beauregard, R. A. ve Suryanarayan, E. R., 1997, Arithmetic Triangles, *Mathematics Magazine*, 70 (2), 105-115.

Bennett, M. A. ve Walsh, G., 2000, Simultaneous Quadratic Equations with Few or No Solutions, *Indag. Mathem.*, 11 (1), 1-12.

Cohn, J. H. E., 1965, Lucas and Fibonacci Numbers and Some Diophantine Equations, *Proc. Glasgow Math. Ass.*, 7, 24-28.

Cohn, J. H. E., 1967, Five Diophantine Equations, *Math. Scand.*, 21, 61-70.

Demirtürk, B. ve Keskin, R., 2009, Integer Solutions of Some Diophantine Equations via Fibonacci and Lucas Numbers, *Journal of Integer Sequences*, 12, 1-14.

Euler, L., 1767, Usu Novi Algorithmi in Problemate Pelliano Solvendo, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 11, 29-66.

Feng, L., Yuan, P. ve Hu, Y., 2013, On the Diophantine Equation $X^2 - KXY + Y^2 + LX = 0$, *Integers*, 13, 1-8.

Güney, M., 2012, Solutions of the Pell Equations $x^2 - \left(a^2b^2 + 2b\right)y^2 = N$ When $N \in \{\pm 1, \pm 4\}$, *Mathematica Aeterna*, 2 (7), 629-638.

Güney, M. ve Keskin, R., 2013, Bazı Pell Denklemlerinin Temel Çözümleri, *SAÜ. Fen Bilimleri Dergisi*, 17 (1), 121-125.

Horadam, A. F., 1965, Generating Functions for Powers of a Certain Generalised Sequence of Numbers, *Duke Math. J.*, 32, 437-446.

Hoggatt, V. E., 1969, Fibonacci and Lucas Numbers, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California.

Hoggatt, V. E. ve Johnson, M. B., 1978, A Primer for the Fibonacci Numbers XVII: Generalized Fibonacci Numbers Satisfying $u_{n+1}u_{n-1}-u_n^{\ 2}=\pm 1$, *The Fibonacci Quarterly*, 16 (2), 130-137.

Hu, Y. ve Le, M., 2013, On the Diophantine Equation $x^2-kxy+y^2+lx=0$, *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 34B (5), 715-718.

Izotov, A. S., 1999, On the Form of Solutions of Martin Davis' Diophantine Equation, *The Fibonacci Quarterly*, 37 (3), 258-261.

Jones, J. P. ve Kiss, P., 1992, Some Diophantine Approximation Results Concerning Linear Recurrences, *Mathematica Slovaca*, 42 (5), 583-591.

Jones, J. P., 2003, Representation of Solutions of Pell Equations Using Lucas Sequences, *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae*, 30, 75-86.

Kagawa, T. ve Terai, N., 1998, Squares in Lucas Sequences and Some Diophantine Equations, *Manuscripta Math.*, 96, 195-202.

Kaplan, P. ve Williams, K.S., 1986, Pell's Equations $X^2-mY^2=-1,-4$ and Continued Fractions, *Journal of Number Theory*, 23, 169-182.

Keskin, R., 2010, Solutions of Some Quadratic Diophantine Equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 2225-2230.

Keskin, R., Karaatlı, O. ve Şiar, Z., 2013, Positive Integer Solutions of the Diophantine Equations $x^2-5F_nxy-5\left(-1\right)^n y^2=\pm 5^r$, *Miskolc Mathematical Notes*, 14 (3), 959-972.

Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York.

LeVeque, W. J., 2002, Topics in Number Theory, Volume 1 and 2, Dover Publications, New York.

Liptai, K. ve Matyas, F., 2003, Peter Kiss and the Linear Recursive Sequences, *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae*, 30, 7-22.

Luca, F., 2009, Effective Methods for Diophantine Equations, in Winter School on Explicit Methods in Number Theory, Debrecen, Hungary, January 26-30.

Marlewski, A. ve Zarzycki, P., 2004, Infinitely Many Positive Solutions of the Diophantine Equation $x^2-kxy+y^2+x=0$, *Comput. Math. Appl.*, 47, 115-121.

Matthews, K., 2002, The Diophantine Equation $ax^2+bxy+cy^2=N$, $D=b^2-4ac>0$, *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 14 (1), 257-270.

Matthews, K. R., Robertson, J. P. ve White, J., 2013, On a Diophantine Equation of Andrej Dujella, *Glasnik Matematicki*, 48 (2), 265-289.

McLaughlin, J., 2003, Polynomial Solutions of Pell's Equation and Fundamental Units in Real Quadratic Fields, *J. London Math. Soc. (2)*, 67 (1), 16-28.

Melham, R., 1997, Conics which Characterize Certain Lucas Sequences, *The Fibonacci Quarterly*, 35, 248-251.

Mollin, R. A., Cheng, K. ve Goddard, B., 2002, The Diophantine Equation $AX^2-BY^2=C$ Solved via Continued Fractions, *Acta Math. Univ. Comenianae,* LXXI (2), 121-138.

Mollin, R. A., 2002, Ideal Criteria for Both $X^2-DY^2=m_1$ and $x^2-Dy^2=m_2$ to Have Primitive Solutions for Any Integers m_1,m_2 Prime to $D>0$, *Serdica Math. J.*, 28, 175-188.

Mordell, L. J., 1969, Diophantine Equations, Academic Press, Inc., New York.

Özkoç, A. ve Tekcan, A., 2010, Quadratic Diophantine equation $x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y=0$, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 33 (2), 273-280.

Peker, B. ve Şenay, H., 2013, Solutions of the Parametric Pell Equation $x^2-(b^2-b)y^2=N$ via Generalized Fibonacci and Lucas Numbers, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 8 (13), 637-642.

Peker, B. ve Şenay, H., 2015, Solutions of the Pell Equation $x^2-(a^2+2a)y^2=N$ via Generalized Fibonacci and Lucas Numbers, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 18 (4), 721-726 (Doktora tezinden basımı kabul edilmiştir).

Ramasamy, A. M. S., 1994, Polynomial Solutions for the Pell's Equation, *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics*, 25 (6), 577-581.

Robbins, N., 1993, Beginning Number Theory, *Wm.C. Brown, Oxford*, London.

Robertson, J. P., 2003, Solving the Equation $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ [online], http://www.jpr2718.org/ax2p.pdf [Ziyaret Tarihi: 20.05.2014].

Robertson, J. P., 2004, Solving the Generalized Pell Equation $x^2 - Dy^2 = N$ [online], http://www.jpr2718.org/pell.pdf [Ziyaret Tarihi: 20.05.2014].

Robertson, J. P., 2008, Linear Recurrences for Pell Equations [online], http://www.jpr2718.org/linrec.pdf [Ziyaret Tarihi: 20.05.2014].

Robertson, J. P., 2009, On D so that $x^2 - Dy^2$ Represents m and $-m$ and not -1, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 25, 155-164.

Robinowitz, S., 1996, Algorithmic Manipulation of Fibonacci Identities, *Applications of Fibonacci Numbers*, Volume 6, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 389-408.

Rosen, K. H., 1992, Elementary Number Theory and its Applications, Third Edition, *Addison- Wesley Publishing Company*, New York, USA.

Smart, N. P., 1998, The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations, *Cambridge University Press*, New York, USA.

Swamy, M. N. S., 1998, Brahmagupta's Theorems and Recurrence Relations, *The Fibonacci Quarterly*, 36 (2), 125-128.

Şenay, H., 2007, Sayılar Teorisi Dersleri (Cebirsel Sayılara Giriş ile), *Dizgi Ofset Matbaacılık*, Konya.

Tekcan, A. ve Özkoç, A., 2010, The Diophantine equation $x^2 - (t^2 + t)y^2 - (4t + 2)x + (4t^2 + 4t)y = 0$, *Revista Matematica Complutense*, 23 (1), 251-260.

Vajda, S., 1989, Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.

Waldschmidt, M., 2010, Pell's Equation [online], http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/BamakoPell2010.pdf [Ziyaret Tarihi: 10.05.2014].

Wenchang, C., 2007, Regular Polygonal Numbers and Generalized Pell Equations, *International Mathematical Forum*, 2 (16), 781-802.

Wu, W. L., 2007, On the Minimal Solutions of Pell Equation $x^2 - \left((mn)^2 \pm 4n\right)y^2 = 1$, *Journal of Yunnan Normal University*, 27 (4), 26-28.

Yuan, P. ve Hu, Y., 2011, On the Diophantine Equation $x^2 - kxy + y^2 + lx = 0$, $l \in \{1, 2, 4\}$, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 573-577.

Zay, B., 1998, An Application of the Continued Fractions for $\sqrt{D}$ in Solving Some Types of Pell's Equations, *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae*, 25, 3-14.

Zhiwei, S., 1992, Singlefold Diophantine Representation of the Sequence $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ and $u_{n+2} = mu_{n+1} + u_n$, *In Pure and Applied Logic*, Beijing Univ. Press, Beijing, 97-101.

Vikipedi, http://tr.wikipedia.org/wiki/Fibonacci#cite_note-3 [Ziyaret Tarihi: 10.07.2014]

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Bilge PEKER
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Ilgın-1979
Telefon	**:**	-
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	bilge.peker@yahoo.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Muhittin Güzelkılınç Lisesi, Meram, Konya	1997
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2002
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2005
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2002-2002	Çiftliközü İlköğretim Okulu	Matematik Öğret.
2002-2010	S.Ü. A.K. Eğitim Fakültesi	Araştırma Görevlisi
2010-	N.E.Ü. A.K. Eğitim Fakültesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

1) Peker, B. ve Cihangir, A., 2007, The Relation Between Negative Pell Equation and Triangular Numbers, *Journal of Inst. of Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.)*, 20 (2), 145-146 (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır).

2) Peker, B. ve Cihangir, A., 2008, Üçgensel Sayılar ve Pell Denklemleri ile İlişkileri Üzerine, *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25, 179-186 (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır).

3) Peker, B. ve Şenay, H., 2013, Solutions of the Parametric Pell Equation $x^2-\left(b^2-b\right)y^2=N$ via Generalized Fibonacci and Lucas Numbers, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 8 (13), 637-642 (Doktora tezinden yapılmıştır).

4) Peker, B. ve Şenay, H., 2015, Solutions of the Pell Equation $x^2-\left(a^2+2a\right)y^2=N$ via Generalized Fibonacci and Lucas Numbers, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 18 (4), 721-726 (Doktora tezinden basımı kabul edilmiştir).