T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN GAMMA TİPLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Şerife Nur KARAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Kasım-2020
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN GAMMA TİPLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Şerife Nur KARAMAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tuncer ACAR

2020, 86 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Tuncer ACAR
Dr. Öğr. Üyesi Osman ALAGÖZ
Dr. Öğr. Üyesi Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölüm kaynak araştırması olup, tez de kullanılan kaynakları kapsamaktadır. Üçüncü bölümde ise sürekli fonksiyonlar uzayı, lineer pozitif operatörler dizisiyle ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiş, tezde kullanılacak kavramlar tanıtılmıştır. Dördüncü bölüm tamamen orijinal bölümdür. Bu bölümün ilk üç alt bölümünde sabit ve üstel fonksiyonu koruyan yeni tip Gamma operatörler dizisinin özellikleri verilmiştir. Son üç alt bölümde ise üstel fonksiyonları koruyan Gamma tipli lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri verilmiştir. Aynı zamanda klasik ve yeni tanımlanan operatör arasındaki karşılaştırmalar grafik ve tablolarla desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düzgün yakınsama, Gamma operatörü, lineer pozitif operatör.

ABSTRACT

MS THESIS

APPROXIMATION BY GAMMA TYPE LINEAR POSITIVE OPERATORS REPRODUCING EXPONENTIAL FUNCTIONS

Şerife Nur KARAMAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATIC

Assoc. Prof. Dr. Tuncer ACAR

2020, 86 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Tuncer ACAR
Asst. Prof. Dr. Osman ALAGÖZ
Asst. Prof. Dr. Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

This thesis study consists of four parts. The first chapter is reserved for introduction. The second part is the resource research and it covers the sources used in the thesis. In the third chapter, the space of continuous functions, basic definitions and theorems about linear positive operators are given and the concepts to be used in the thesis are introduced. The fourth part is completely the original. In the first three subsections of this chapter, the properties of the sequence of new type Gamma operators that preserve constant and exponential functions are given. In the last three chapters, the approximation properties of sequence of the Gamma type linear positive operators that preserve exponential functions are given. At the same time, comparisons between classical and newly defined operators are supported by graphics and tables.

Keywords: Gamma operator, linear positive operator, uniform convergence.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca; bilgi ve desteğini her daim esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Tuncer ACAR’ a, saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili eşim Levent KARAMAN’a ve tüm hayatım boyunca en büyük desteği ve sevgiyi vererek, her zaman yanımda olan annem ve babam başta olmak üzere tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez sürem boyunca 19201105 nolu proje ile destek veren Selçuk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ ne teşekkür ederim.

Şerife Nur KARAMAN

KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\|\cdot\|_\infty$	$C[a,b]$ uzayında tanımlı maksimum normu
$\|\cdot\|_{int}$	$C[a,b]$ uzayında tanımlı integral normu
$P[a,b]$	$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı polinomların kümesi
$L_n(f;x)$	L lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$G_n(f;x)$	Klasik Gamma operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$B_n(f;x)$	Bernstein operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$S_n(f;x)$	Szász operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$D_n(f;x)$	Durrmeyer operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\Gamma(\cdot)$	Gamma integrali
$\rightrightarrows$	Düzgün yakınsama
$\omega(.;\delta)$	Süreklilik modülü
$\|f\cdot\|_\rho$	Ağırlıklı uzaylarda supremum normu
$\Omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi bir fonksiyonun daha basit, kullanışlı fonksiyonlar cinsinden nasıl ifade edileceğini araştırır. 1885 yılında Alman matematikçi Karl Weierstrass sürekli bir fonksiyona polinomlar dizisi ile yaklaşılabileceğinin varlığını ispatlamıştır (Weierstrass, 1885). Birçok matematikçi bundan yola çıkarak polinomlar dizisi oluşturmaya başlamış ve bu oluşturma tekniği ile lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisi ortaya çıkmıştır.

Bu dizilerden cebirsel anlamdaki ilk ispat 1912 yılında S. N. Bernstein tarafından verilmiştir (Bernstein, 1912). Bugün Bernstein polinomları olarak adlandırılan,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad x \in [0,1]$$

polinomu ile $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyona yaklaşım ispatlanmıştır. Daha sonra 1950' li yıllarda H. Bohman ve P. P. Korovkin birbirinden bağımsız olarak sınırlı aralıklarda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini ele alarak Bohman-Korovkin teoremini ispatlamıştır (Korovkin, 1959). Elbette ki her zaman çalışılan aralık sınırlı aralık olmayacaktır. Bu sebepten dolayı sınırsız aralıklar üzerinde tanımlanacak operatörlere ihtiyaç duyulmuştur. 1950 yılında O. Sz$\acute{a}$sz kendi adıyla anılan yeni bir operatör tanımlamıştır. Sınırsız aralıklar üzerinde sürekli bir fonksiyona yaklaşmak için

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,\infty)$$

olarak tanımlanan operatörler dizisini oluşturmuş ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Sz$\acute{a}$sz, 1959).

Yaklaşım teorisinde bir diğer amaç ise yaklaşım yapılacak fonksiyon sınıfının genişletilmesidir. Bu amaç doğrultusunda sürekli bir fonksiyona yaklaşmak yerine daha geniş bir sınıf olan integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak mümkün müdür, sorusu akla gelir. Buna cevap olarak integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşım yapmak için yeni operatörler tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlara yakınsayan dizileri integral formunda almak daha uygun olacaktır.

Bu amaçla Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı için Kantorovich kendi adıyla anılan

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt$$

operatörlerini tanımlamıştır (Kantorovich, 1930). Bunun ardından fonksiyon sınıfını daha da genişletmek için Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı yerine Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyon sınıfı alınmıştır. Bu amaçla 1960 yılında J. L. Durrmeyer, Bernstein polinomlarının $[0,1]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar için

$$D_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}f(t)dt$$

olarak tanımlı Bernstein-Durrmeyer operatörlerini tanımlamıştır (Durrmeyer, 1967).

Sınırsız aralıklar üzerinde tanımlanan operatörlerden birisi de Gamma operatörleridir. Lupaş ve Müller (Lupas ve Müller, 1967) tarafından $x \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ ve genelleştirilmiş integrali yakınsak yapan f' ler için

$$G_n(f;x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}\,u^n f\left(\frac{n}{u}\right)du$$

olarak tanımlanmıştır. Daha sonra Mazhar tarafından farklı bir modifiyesi ele alınmıştır. Bu modifiye $n > 1, x > 0$ ve

$$g_n(x,u) = \frac{x^{n+1}}{n!}e^{-xu}u^n$$

olmak üzere

$$F_n(f;x) = \int_0^\infty g_n(x,u)\,du\int_0^\infty g_{n-1}(u,t)\,f(t)dt$$

olarak tanımlamıştır (Mazhar, 1991). Son yıllarda Gamma operatörlerinin yakınsaklık özellikleri Zeng (Zeng, 2005) ve Karslı (Karslı, 2010) tarafından incelenmiştir.

Yaklaşım teorisinde yeni bir operatörler dizisi elde ederkenki amaç yaklaşım hızını artırmak ve hata miktarını azaltmaktır. Zaman içerisinde bu amaçlar doğrultusunda yukarıda tanımlanan operatörlerin modifiyesi elde edilerek daha iyi bir yaklaşım sunmak amaçlanmıştır. Biz de bu amaç doğrultusunda Gamma operatörlerinin modifiyesini elde etmeye çalıştık. (Acar ve ark, 2017) tarafından sunulan makalede Szász-Mirakyan operatörlerinin üstel fonksiyonları koruyan formları çalışılmıştır. Bu çalışmanın ışığında üstel fonksiyonları korumasını amaçlayarak Gamma tipli lineer pozitif operatörler dizisi oluşturduk. Yakınsaklık özelliklerini, düzgün yakınsaklığını, noktasal yakınsaklığını, yakınsama hızını elde ettik. Bulduğumuz sonuçları MATLAB programı yardımıyla örneklendirerek klasik Gamma operatörleri ve yeni tanımladığımız operatörleri karşılaştırdık ve daha iyi bir yaklaşım olduğunu gözlemledik. Bu tezde elde edilen sonuçlar, Selçuk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 19201105 nolu proje ile desteklenmiş, tezden Science Citation Index-Expanded (SCIE) kapsamında iki makale çıkmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Tez hazırlarken M. Bayraktar' ın 'Fonksiyonel Analiz' kitabından, M. Kocak' ın 'Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar' adlı kitabından, T. L. Lindstrom' un 'Spaces An Introductıon to Real Analysıs' adlı kitabından, H. Hilmi Hacısalihoğlu ve A. D. Hacıyev' in 'Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakkınsaklığı' kitabından, I. J. Maddox' un 'Elements of Functıonal Analysıs' adlı kitabından, E. Kreyszig'in 'Introductory Functional Analysis with Applications' adlı kitabından, G.G. Lorentz'in 'Bernstein Polynomials' tezinden, R. A. DeVore ve G.G. Lorentz'in 'Constructive Approximation' adlı kitabından, F. Altomere ve M. Campiti' nin 'Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications' adlı kitabından, A. İzgi'nin 'Order of Approximation of Functions of Two Variables by New Type Gamma Operators' makalesinden, X. M. Zeng' in 'Approximation Properties of Gamma Operators' adlı makalesinden faydalanılmıştır.

Tezin orijinal kısmında H. Karslı' nın 'Rate of Convergence of New Gamma Type Operators for Functions with Derivatives of Bounded Variation' makalesinden, M. Bodur, O. G. Yılmaz, A. Aral' ın 'Approximation by Baskakov-Sz$\acute{a}$sz-Stancu Operators Preserving Exponential Functions' adlı makalesinden, H. Karslı ve M. A. Özarslan' ın 'Direct Local and Global Approximation Results for Operators of Gamma Type' adlı makalesinden, T. Acar, A. Aral ve H. Gonska' nın 'On Sz$\acute{a}$sz-Mirakyan Operators Preserving $e^{2ax}, a > 0$' adlı makalesinden, T. Acar, A. Aral, D. C. Morales ve P. Garrancho' nun 'Sz$\acute{a}$sz-Mirakyan Type Operators which Fix Exponentials' adlı makalesinden faydalanılmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. $V \neq \emptyset$ bir küme ve F bir cisim olsun.

$$\oplus : \; V \times V \to V$$
$$(u,v) \to \oplus(u,v) = u \oplus v$$

olarak tanımlanan iç işlem,

G1) $\forall u,v,w \in V$ için $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$.

G2) $\forall u \in V$ için $\theta \oplus u = u \oplus \theta = u$ olacak şekilde $\theta \in V$ vardır.

G3) Her bir $u \in V$ için $u \oplus u^{-1} = u^{-1} \oplus u = \theta$ olacak şekilde $u^{-1} \in V$ vardır.

G4) $\forall u,v \in V$ için $u \oplus v = v \oplus u$,

özelliklerini sağlarsa $(V,\oplus)$ değişmeli (abelyan) gruptur. Ayrıca verilen V grubu üzerinde ikinci bir işlem olarak

$$\odot : \; F \times V \to V$$
$$(\alpha,u) \to \odot(\alpha,u) = \alpha \odot u$$

tanımlanan dış işlem,

V1) $\forall \alpha,\beta \in F$ ve $\forall u \in V$ için $(\alpha \odot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$,

V2) $\forall \alpha \in F$ ve $\forall u,v \in V$ için $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$,

V3) $\forall \alpha,\beta \in F$ ve $\forall u \in V$ için $(\alpha \oplus \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$,

V4) $\forall u \in V$ için $1_F \odot u = u$ olacak şekilde $1_F \in F$ vardır,

özelliklerini de sağlarsa V kümesi tanımlanan iç ve dış işlemlerle vektör uzayı oluşturur ve $(V,\oplus,\odot)$ şeklinde gösterilir. $(V,\oplus,\odot)$ kümesine vektör uzayı veya lineer uzay denir. Vektör uzayının elemanlarına vektör, cismin elemanlarına skaler denir (Bayraktar, 2017).

Örnek 3.1. $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $C[a,b]$ kümesi, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve bu aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların kümesidir ve

$$C[a,b] = \{f \mid f:[a,b] \to \mathbb{R} \; s\ddot{u}rekli \; fonksiyon\}$$

olarak gösterilir.

$C[a,b]$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde aşağıda verilen işlemlerle vektör uzayı oluşturur. Bu işlemler sırasıyla fonksiyonların toplamı

$$+ \ : \ C[a,b] \times C[a,b] \to C[a,b]$$
$$(f,g)(x) \to +(f,g)(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

ve bir fonksiyonun skalerle çarpımı

$$\cdot \ : \ \mathbb{R} \times C[a,b] \to C[a,b]$$
$$(\alpha, f)(x) \to \cdot\,(\alpha, f)(x) = (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

olarak tanımlanır.

G1) $\forall f,g,h \in C[a,b]$ için $(f+g)+h = f+(g+h)$ sağlanır,

G2) $\forall f \in C[a,b]$ için $0_{C[a,b]} + f = f + 0_{C[a,b]} = f$ olacak şekilde $0_{C[a,b]} \in C[a,b]$ vardır,

G3) Her bir $f \in C[a,b]$ için $f + (-f) = (-f) + f = 0_{C[a,b]}$ olacak şekilde $(-f) \in C[a,b]$ vardır,

G4) $\forall f,g \in C[a,b]$ için $f + g = g + f$,

V1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f \in C[a,b]$ için $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta f)$ sağlanır.

V2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall f,g \in C[a,b]$ için $\alpha \cdot (f+g) = (\alpha \cdot f) + (\alpha \cdot g)$ sağlanır.

V3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f \in C[a,b]$ için $(\alpha + \beta) \cdot f = (\alpha \cdot f) + (\beta \cdot f)$ sağlanır.

V4) $\forall f \in C[a,b]$ için $1_{\mathbb{R}} . f = f$ olacak şekilde $1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ vardır.

Dolayısıyla $(C[a,b], +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır (Maddox, 1970).

Örnek 3.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ kümesi,

$$+ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(x,y) \to (x+y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

işlemi ve

$$\cdot : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(\alpha, x) \to (\alpha x) = (\alpha . x_1, \alpha . x_2, \dots, \alpha . x_n)$$

işlemi ile $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur (Bayraktar, 2017).

Tanım 3.2. $(V, \oplus, \odot)$ kümesi vektör uzayı ve $A \subseteq V$ alt kümesi verilsin. Verilen A alt kümesi verilen vektör uzayının iç ve dış işlemleriyle kendi başına vektör uzayı oluşturursa o zaman A alt kümesine bu işlemler ile birlikte $(V, \oplus, \odot)$ vektör uzayının alt vektör uzayı veya alt lineer uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Örnek 3.3. $n \in \mathbb{N}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $P[a,b], [a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı derecesi n veya n' den daha küçük polinomların kümesi, yani;
$P[a,b] = \{p \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, , a_n \neq 0, a_n \in \mathbb{R}, x \in [a,b]\}$
olarak tanımlanan $P[a,b]$ kümesi, $C[a,b]$' nin alt kümesidir. Çünkü polinomlar $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlardır. $C[a,b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonların toplamı ve bir fonksiyonun skalerle çarpımı işlemlerini polinomlar kümesi üzerinde sırasıyla tanımlayalım:

$$+ : \; P[a,b] \times P[a,b] \to P[a,b]$$
$$(p,q)(x) \to (p+q)(x) = p(x) + q(x),$$

$$\cdot : \; \mathbb{R} \times P[a,b] \to P[a,b]$$
$$(\alpha, p)(x) \to (\alpha p)(x) = \alpha p(x)$$

işlemleriyle polinomlar ailesi vektör uzayı oluşturur. $(P[a,b], +, \cdot)$ bir vektör uzaydır. Dolayısıyla $(P[a,b], +, \cdot)$ uzayı, $(C[a,b], +, \cdot)$ uzayının alt vektör uzayıdır.

Her vektör uzayı üzerinde norm tanımlanabilir (Bayraktar, 2017). O halde norm fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 3.3. F cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $(X, +, \cdot)$, F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\|$$

olarak tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyon

i. $x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta_X$, ($\theta_X, X$ uzayının etkisiz elemanıdır.)

$\forall x \in X$ için $\|x\| \geq 0$, (Bu şart tanımdan da görüldüğü üzere açıktır ancak bazı kaynaklarda ayrı bir şart olarak verilebilir.)

ii. $\forall \alpha \in F$ ve $\forall x \in X$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, ($F$ cismi $\mathbb{C}$ ise $|\cdot|$ fonksiyonu modüldür.)

iii. $\forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlarsa norm adını alır ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir (Maddox, 1970).

Örnek 3.4. $C[a, b]$ kümesinin, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde fonksiyonların toplamı ve bir fonksiyonun skalerle çarpımı işlemleriyle vektör uzayı oluşturduğunu Örnek 3.1' de görmüştük. O halde bu vektör uzayı üzerindeki maksimum normu

$$\|\cdot\|_\infty : C[a, b] \to \mathbb{R}$$
$$f \to \|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

olarak tanımlanır. $(C[a, b], +, \cdot)$ lineer uzayı sürekli fonksiyonlardan oluştuğu için $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerini alır. O halde $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyonu anlamlı olur.

Tanım 3.1'de verilen i, ii, iii norm şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

i. $f \in C[a, b]$ için

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x)| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

olur. Diğer taraftan $[a, b]$ aralığı üzerinde $f \equiv 0_{C[a,b]}$ ise o zaman bu fonksiyonun maksimumu aynı aralıkta sıfırdır yani $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| = 0$' dır. Ayrıca,

$$\forall f \in C[a, b] \text{ için } \|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \geq 0$$

olur.

ii. $\alpha \in \mathbb{R}$ keyfi bir reel sabit olmak üzere $\forall f \in C[a, b]$ için

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_\infty &= \max_{x \in [a,b]} |\alpha f(x)| \\ &= \max_{x \in [a,b]} |\alpha| \cdot |f(x)| \\ &= |\alpha| \cdot \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \\ &= |\alpha| \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

olur.

iii. $\forall f, g \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için üçgen eşitsizliğinden

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

olduğunu biliyoruz.

O halde,

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)+g(x)| \leq \max_{x\in[a,b]}|f(x)| + \max_{x\in[a,b]}|g(x)|$$

olur. Sonuç olarak $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyonu $(C[a,b],+,\cdot)$ lineer uzayı üzerinde norm tanımlar (Bayraktar, 2017).

Her vektör uzayı üzerinde norm tanımlanabildiği gibi bir vektör uzayı üzerinde sonsuz çoklukta norm tanımlanabilir. (Bayraktar, 2017). Buradan hareketle sürekli fonksiyonların lineer uzayı üzerinde maksimum normu tanımlanabildiği gibi aynı uzay üzerinde integral normu da tanımlanabilir:

$$\|\cdot\|_{int} : C[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$f \to \|f\|_{int} = \int_a^b |f(x)|dx$$

olarak tanımlanan $\|\cdot\|_{int}$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar integrallenebilir olduğundan anlamlıdır. Ayrıca Tanım 3.1'de verilen i, ii, iii norm şartlarını sağlar, yani $\|\cdot\|_{int}$, $(C[a,b],+,\cdot)$ üzerinde bir normdur ve $(C[a,b],\|\cdot\|_{int})$ bir normlu uzaydır.

Sürekli fonksiyonlar üzerinde yakınsamayı incelemek için öncelikle dizi, fonksiyon dizisi ve yakınsama tanımlarını verelim.

Tanım 3.5. Genel bir ifadeyle tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyona dizi denir. X boş olmayan bir küme olmak üzere

$$f : \mathbb{N} \to X$$

$$n \to f(n)$$

olarak tanımlanır. Burada $X=\mathbb{R}$ olursa dizi reel terimli, $X=\mathbb{C}$ olursa kompleks terimli dizi, $X=P(X)$ olursa küme dizisi adını alır.

Tanım 3.6. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli tüm fonksiyonların kümesini $F(A)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$f_n : \mathbb{N} \to F(A)$$

fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir. Yani elemanları fonksiyonlar olan diziye fonksiyonlar dizisi denir. Örneğin, $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to F([0,1]) \\ n &\to f_n(x) = x^n \end{aligned}$$

bir fonksiyon dizisidir. Dolayısıyla n' ye bağlı bir dizi olduğu için yakınsaklık problemi ortaya çıkar.

Yakınsaklık incelemek için metrik uzay tanımını verelim.

Tanım 3.7. X boş olmayan bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d' ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir (Kocak, 2009).

Örnek 3.5. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y| \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir ve $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrik uzaydır. $\mathbb{R}$ üzerindeki bu d metriğine standart veya alışılmış metrik denir (Kocak, 2009). Aksi belirtilmedikçe $\mathbb{R}$ üzerindeki metrik alışılmış metriktir.

Noktasal ve düzgün yakınsama tanımlarını verelim.

Tanım 3.8. $E \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) $(f_n : E \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ dizisi E üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır gerek ve yeter şart

$$\forall \varepsilon > 0 \; ve \; \forall x \in E \; için \; bir \; n_0 \in \mathbb{N} \; öyle \; ki \; \forall n \geq n_0 \; için \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.2}$$

dır. (Musayev ve ark., 2003).

Fonksiyon dizisinin sahip olduğu özelliklerin limit fonksiyonu için korunmasında yeterli koşulların bulunması önem taşımaktadır. Bu problem incelenirken düzgün yakınsaklık kavramı ortaya çıkar.

Tanım 3.9. $E \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : E \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ fonksiyon dizisi ve bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0 \; ve \; \forall x \in E$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε'a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna E üzerinde düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir. (Musayev ve ark., 2003).

Sürekli fonksiyon uzayında yakınsamayı inceleyelim.

Tanım 3.10. $d_\infty(x, y) = maks \{|x(t) - y(t)| | t \in [a, b]\}$ olmak üzere $(C[a, b], d_\infty)$ metrik uzayı ve (f_n) dizisi verilsin.

i. Her $t \in [a, b]$ için $\mathbb{R}$' de $(f_n(t))$ dizisi $f(t)$' ye yakınsıyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir.
ii. $(C[a, b], d_\infty)$ metrik uzayında (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsıyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir (Kocak, 2009).

Tanım 3.11. f_n ve f fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli olsunlar. (f_n) dizisinin $C[a, b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $c_n = \max\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ eşitliği ile tanımlanan (c_n) reel sayı dizisinin sıfır dizisi olmasıdır.

Tanım 3.12. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, b]$ aralığını

$$a < x_1 < x_2 <\cdots< x_{n-1} < b$$

özelliğini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim. Uygunluğunu sağlamak için a sayısını x_0, b sayısını x_n ile gösterelim.

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

kümesine $[a, b]$ aralığının parçalanması veya bölüntüsü denir.

$[x_0, x_1], [, x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ve $(x_0, x_1), (, x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ aralıklarına sırasıyla kapalı alt aralıklar ve açık alt aralıklar denir.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 3.13. f, $[a, b]$ üzerinde tanımlı, sınırlı bir fonksiyon ve P' de bu aralığın herhangi bir parçalanması olsun. $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ olmak üzere, eğer

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x_k = I$$

limiti varsa, bu limite f' nin a dan b'ye kadar Riemann integrali denir ve

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir. Bu limit şu anlama gelir.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \|P\| < \delta$ bağıntısını sağlayan her bir P parçalanması için

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

dır (Balcı, 2012).

Teorem 3.1. f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı, sınırlı bir fonksiyon ve P'de bu aralığın herhangi bir parçalanması olsun.

$$Ü(f,P) = \sum_{k=1}^{n}(maks\{f(x)|x_{k-1} \leq x \leq x_k\})\Delta x_k$$
$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n}(min\{f(x)|x_{k-1} \leq x \leq x_k\})\Delta x_k$$

ifadelerine sırasıyla f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen üst Darboux toplamı ve alt Darboux toplamı denir.
$f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun.
f' nin $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$Ü(f,P) - A(f,P) < \varepsilon$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığının bir P parçalanmasının var olmasıdır (Balcı, 2012).

Riemann integrali tanımlanırken $[a,b]$ integrasyon aralığında f fonksiyonu sınırlıdır. Başka bir deyişle bir f fonksiyonunun bir aralıkta integralinden bahsetmek için bu aralıkta fonksiyonun sınırlı olması gerekir. Fakat birçok fonksiyon $(-\infty,a]$, $[a,\infty)$ veya $(-\infty,\infty)$ aralıkları üzerinde tanımlıdır. Ayrıca birçok fonksiyon da bazı noktalarda düşey asimtotlara sahip olup sonsuz süreksizliğe sahiptir. Bu durumda genelleştirilmiş integral kavramı ortaya çıkar.

Tanım 3.14. a bir reel sayı ve f fonksiyonu her bir $t \geq a$ için $[a,t]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx \tag{3.4}$$

ifadesine f' nin $[a,\infty)$ üzerindeki birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir.

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx \tag{3.5}$$

ile gösterilir. Eğer (3.4)' teki limit varsa (3.5) integrali yakınsak, limit yoksa integral ıraksaktır denir (Balcı, 2012).

Tanım 3.15. f fonksiyonu $[a, b)$ aralığının her bir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$

olsun.

Bu takdirde

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

integraline ikinci çeşit genelleştirilmiş integral denir (Balcı, 2012).

Tanım 3.16. Bir integral hem birinci çeşit genelleştirilmiş integralin hem de ikinci çeşit genelleştirilmiş integralin özelliklerine sahip ise yani fonksiyon hem sınırsız bir aralık üzerinde tanımlı hem de bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sonsuz süreksizliğe sahip ise bu integrale üçüncü çeşit veya karmaşık tip genelleştirilmiş integral denir (Balcı, 2012).

Genelleştirilmiş integral olup Euler integralleri olarak bilinen iki önemli integral Gamma ve Beta integralleridir. Biz burada Gamma integralini ele alacağız.

Tanım 3.17. Genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak bilinen Gamma fonksiyonu 1730 yılında Euler tarafından

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1.2.3 \ldots n}{z(z+1) \ldots (z+n)} n^z, \qquad z \neq 0 \tag{3.6}$$

olarak tanımlanmıştır.

Gamma fonksiyonu negatif tam sayılarda tanımsızdır fakat tam sayı olmayan değerlerde ve hatta kompleks sayılarda bile tanımlıdır. (3.6) ifadesinde z yerine $z+1$ alırsak;

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3\ldots n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+1+n)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3\ldots n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \frac{nz}{(z+1+n)} n^{z} \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

elde edilir. Gamma fonksiyonunun ikinci tanımı aşağıdaki gibi verilir.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du, \quad Re(z) > 0.$$

(Podlubny, 1999).

Önerme 3.1. Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1.

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n.(n+1)} n = 1$$

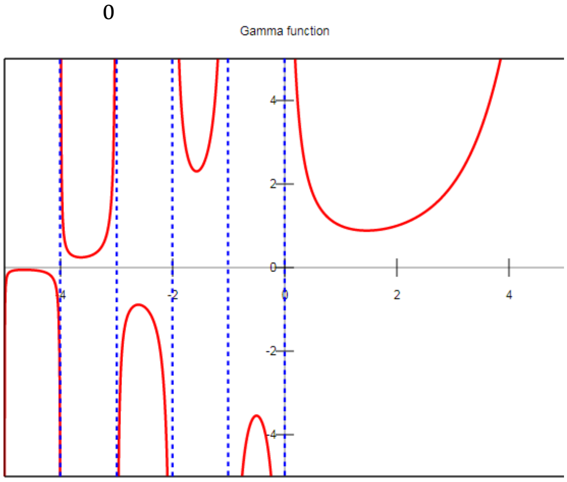
$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$$

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1) = (n-1)!$$

2.

$$\int_0^\infty u^n e^{-u} du = n! = \int_0^\infty u^{(n+1)-1} e^{-u} du = \Gamma(n+1), \qquad n \in \mathbb{N}$$



Şekil 1 Gamma Fonksiyonu Grafiği

Teorem 3.2.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

integrali $n > 0$ için yakınsak, $n \leq 0$ için ıraksaktır (Balcı, 2012).

İspat. Verilen integrali

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \tag{3.6}$$

biçiminde iki integralin toplamı şeklinde yazalım.

1. $n \geq 1$ ise (3.6) eşitliğinin sağındaki ilk integral bir belirli integraldir. Çünkü integrant $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Sağdaki ikinci integral ise birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. Limit testinden
$$\lim_{x\to\infty} x^2(x^{n-1}e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = 0$$
olduğundan yakınsaktır.

2. $0 < n < 1$ ise (3.6) eşitliğinin sağındaki ilk integral bir ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. Limit testinden
$$\lim_{x\to\infty} x^{1-n}(x^{n-1}e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 1$$
olduğundan bu integral yakınsaktır. İkinci integral birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. Karşılaştırma testinin limit formundan
$$\lim_{x\to\infty} x^2(x^{n-1}e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = 0$$
olduğundan integral yakınsaktır.

3. $n = 0$ için (3.6) eşitliği
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$$
biçimini alır.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{x} x = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

olduğundan birinci integral ıraksaktır. Şu halde $\Gamma(n)$ integrali $n = 0$ için ıraksaktır.

4. $n < 0$ olsun.

$$\lim_{x\to\infty} x(x^{n-1}e^{-x}) = \infty$$

olduğundan (3.6) eşitliğinin sağındaki ilk integral ıraksaktır. Sonuç olarak Gamma integrali $n > 0$ için yakınsak, $n \leq 0$ için ıraksaktır (Balcı, 2012).

3.1. Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 3.1.1. $(X, +, .)$ ve $(Y, \oplus, \odot)$ aynı F cismi (ℝ veya ℂ) üzerinde tanımlı iki vektör uzayı olmak üzere;

$$T: (X, +, \cdot) \longrightarrow (Y, \oplus, \odot)$$

dönüşümü operatör olarak adlandırılır. Yani, X' den alınan her bir elemana Y' de bir eleman karşılık getiren bir T kuralı varsa bu durumda X uzayı üzerinde bir operatör tanımlanmış olur ve $T(x) = y$ veya $Tx = y$ ile gösterilir. X uzayı T operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(T)$ olarak gösterilir. Bu operatörün görüntü kümesi ise $R(T)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Örnek 3.1.1. $B[a, b]$ kümesi, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonların kümesi olup iki sınırlı fonksiyonun toplamı ve sınırlı reel değerli bir fonksiyonun skalerle çarpımı işlemi altında bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere bu uzay üzerinde

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \ & B[a, b] \to \mathbb{R}_0^+ \\ & f \ \to \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \end{aligned}$$

ile norm fonksiyonu tanımlanır. Sınırlı bir fonksiyonun mutlaka bir supremum değeri olduğundan bu ifade anlamlıdır.

1912 yılında Sergei Natanovich Bernstein tarafından tanımlanan Bernstein polinomları

$$B_n \ : B[0,1] \ \to \ C[0,1],$$

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}, n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$$

formundadır. B_n dönüşümü $[0,1]$ aralığında sınırlı fonksiyonların uzayı ve sürekli fonksiyon uzayları arasında dönüşüm yapan bir operatördür ve $B_n(f; x) = g(x)$ ile gösterilir (Lorentz, 1953).

Tanım 3.1.2. $(X,+,\cdot)$ ve $(Y,\oplus,\odot)$ lineer uzaylar ve $T:(X,+,\cdot)\to(Y,\oplus,\odot)$ operatör olmak üzere, $\alpha,\beta\in F$ ve $x,y\in X$ için

$$T(\alpha\cdot x+\beta\cdot y)=\alpha\odot T(x)\oplus\beta\odot T(y)$$

eşitliği sağlanırsa o zaman T operatörüne lineer operatör denir (Lindstrφm, 2017).

Önerme 3.1.1.
$\mathcal{L}=\mathcal{L}(X,Y)=\{L:X\to Y : L\ lineer\ operatör\}$ kümesi F cismi üzerinde

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(X,Y)\times\mathcal{L}(X,Y)&\to\mathcal{L}(X,Y)\\ (L,T)&\to (L+T)(x)=L(x)+T(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot\ :\ F\times\mathcal{L}(X,Y)&\to\mathcal{L}(X,Y)\\ (c,L)&\to(cL)(x)=cL(x)\end{aligned}$$

işlemleriyle bir vektör uzayı oluşturur. $L\in\mathcal{L}(X,Y)$ olmak üzere

$$L(\theta_X)=\theta_Y$$

özelliğini sağlar. Gerçekten $\alpha,\beta\in F$ ve $x,y\in X$ olmak üzere $L\in\mathcal{L}(X,Y)$ olduğundan

$$L(\alpha\cdot x+\beta\cdot y)=\alpha\odot L(x)\oplus\beta\odot L(y)$$

özelliği sağlanır. O halde $\beta=-\alpha$ ve $y=x$ seçilirse

$$L(\alpha\cdot x-\alpha\cdot x)=\alpha\odot L(x)\oplus(-\alpha)\odot L(x)$$

olup $L(\theta_X)=\theta_Y$ elde edilir (Bayraktar, 2017).

Tanım 3.1.3. $(X,+,\cdot)$ ve $(Y,\oplus,\odot)$ reel değerli fonksiyonların lineer uzayları olmak üzere, $L:(X,+,\cdot)\rightarrow(Y,\oplus,\odot)$ operatörü için $x\geq 0$ özelliğindeki her $x\in X$ için $L(x)\geq 0$ oluyorsa L operatörüne pozitif operatör denir. Operatörün pozitifliği tanımı, operatörün lineerliği şartı altında $x\leq 0$ özelliğindeki her $x\in X$ vektörü için $L(x)\leq 0$ olması ile denktir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 3.1.4. Hem lineerlik hem de pozitiflik şartını sağlayan operatöre lineer pozitif operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Lemma 3.1.1 Eğer L lineer pozitif operatör ise her t için $g(t)\geq f(t)$ olduğunda

$$L(g;x)\geq L(f;x)$$

sağlanır ve bu özelliğe monotonluk özelliği denir.

İspat. $f,g\in C[a,b]$ olmak üzere her t için $g(t)\geq f(t)$ olsun. Bu durumda $g(t)-f(t)\geq 0$ olur. L lineer pozitif operatör olduğundan

$$\begin{aligned} g(t)-f(t)\geq 0 &\Rightarrow L(g(t)-f(t);x)\geq L(0;x)\\ &\Rightarrow L(g;x)-L(f;x)\geq 0\\ &\Rightarrow L(g;x)\geq L(f;x)\end{aligned}$$

elde edilir(Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 3.1.5. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\left(L_n(f;x)\right)$ dizisine lineer pozitif operatörler dizisi denir.

Operatörün sınırlılığı ve sürekliliğini incelemek için vektör uzayı üzerinde norm yapısını kurmaya ihtiyaç vardır.

Tanım 3.1.6. $(X,\|.\|_1)\ ve\ (Y,\|.\|_2)$ iki normlu uzay ve $T:X\rightarrow Y$ operatör olsun. $\forall x\in X$ için $\|Tx\|_2\leq M\|x\|_1$ olacak şekilde $M>0$ sayısı mevcut ise T operatörüne X' de sınırlı operatör denir.

$$\|T\|_{X\rightarrow Y}=inf\{M\ |\|Tx\|_2\leq M\|x\|_1\}$$

sayısına T operatörünün normu denir ve $\|T\|_{X\rightarrow Y}$ ile gösterilir.

Operatörün sınırlılığı ve fonksiyonun sınırlılığı kavramları farklıdır. Gerçekten de

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x$$

fonksiyonunu alalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M|x| \Rightarrow |x| \leq M|x|$$

olup operatör anlamında sınırlı olur. Ancak fonksiyonun sınırlılığı için her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı var mıdır sorusuna cevap aramalıyız.
Buradan $|x| \leq M$ olacak şekilde M bulunamaz. Dolayısıyla f fonksiyonu sınırlı değildir (Bayraktar, 2017).

Tanım 3.1.7. $(X, \|.\|_1)$ ve $(Y, \|.\|_2)$ iki normlu uzay ve $T: X \to Y$ operatör olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere

$$\forall \varepsilon > 0 \; için \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \; \ni \|f - f_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|Tf - Tf_0\|_2 < \varepsilon$$

sağlanırsa T operatörüne $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.
Eğer T operatörü yukarıdaki eşitsizliği her $x \in X$ için sağlarsa o zaman T operatörü X üzerinde süreklidir denir (Bayraktar, 2017).

Teorem 3.1.1. $(X, \|.\|_1)$ ve $(Y, \|.\|_2)$ iki normlu uzay ve $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda L operatörü için sınırlılık ve süreklilik denktir (Lindstrɸm, 2017).

3.2. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Yaklaşım teorisi bir fonksiyonun daha basit, kullanışlı fonksiyonlar cinsinden nasıl ifade edileceğini araştırır. 1885 yılında Alman matematikçi Karl Weierstrass sürekli bir fonksiyona polinomlar dizisi ile yaklaşılabileceğini aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Teorem 3.2.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde (p_n) polinomlar dizisi vardır. Yani; $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayan bir (p_n) polinomlar dizisi vardır.
Başka bir ifadeyle,
1. $P[a,b]$, $C[a,b]$' de yoğundur.
2. (p_n), $P[a,b]$' de n. dereceden polinomlar dizisi olmak üzere;

$$\forall \varepsilon > 0 \ ve \ \forall f \in C[a,b] \text{ için } |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$$

sağlanır (DeVore ve Lorentz, 1993).

Bu teoremin cebirsel ve topolojik anlamda birçok ispatı vardır (DeVore ve Lorentz, 1993), (Natanson, 1964). Dönemin birçok matematikçisi tarafından ispatlar ele alınmıştır. C. Runge, H. Lebesgue, L. Fejer bu isimlerden bazılarıdır. 1912 yılında S. N. Bernstein $[0,1]$ aralığı üzerinde Bernstein polinomlarını tanımlayarak bu teoremin ispatını cebirsel anlamda vermiştir.

Weierstrass yaklaşım teoremi $[a,b]$ aralığında verilir. Bernstein polinomları ise $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlıdır. Ancak bu genellikten bir şey kaybettirmez. Çünkü, herhangi bir $[a,b]$ aralığı $y = \frac{x-a}{b-a}$ lineer dönüşümü ile $[0,1]$ aralığına dönüştürülebilmektedir.

Bernstein polinomlarının kullanışlı yapısı mühendislik, fizik, istatistik, bilgisayar teknolojileri bilim dallarında uygulamalarıyla aktif bir şekilde çalışılmaktadır. Citröen ve Renault firmasında Bernstein polinomlarının kullanılması bu polinomların önemini ortaya çıkarmıştır. Bu önem sayesinde polinomların değişik modifikasyonları elde edilmeye çalışılmıştır. 1950' li yıllarda sonlu ve kapalı aralık üzerinde tanımlı operatörler için düzgün yakınsaklığı veren H.Bohman-Korovkin teoremi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 3.2.2. (H. Bohman-P. P. Korovkin, 1951-1960)

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi ve $(\alpha_n(x)), (\beta_n(x))$ ve $(\gamma_n(x))$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olsun. $\forall x \in [a,b]$ için,

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x) \tag{3.9}$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x) \tag{3.10}$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x) \tag{3.11}$$

koşulları sağlanırsa bu durumda $(L_n(f))$ lineer operatörler dizisi $[a,b]$ aralığı üzerinde birim operatöre düzgün olarak yakınsar yani, $(L_n(f))$ lineer operatörler dizisi kendisini oluşturan f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Burada f, $[a,b]$' de sürekli ve tüm reel eksende sınırlı bir fonksiyondur.

İspat. $e_i(x) = x^i, i = 0,1,2$ olmak üzere öncelikle teoremin hipotezini yeniden ifade edelim. Yani (3.9), (3.10) ve (3.11) ifadelerini

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_0;.) - e_0\|_\infty = 0 = \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n\|_\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_1;.) - e_1\|_\infty = 0 = \lim_{n\to\infty} \|\beta_n\|_\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_2;.) - e_2\|_\infty = 0 = \lim_{n\to\infty} \|\gamma_n\|_\infty$$

olarak yazalım.

$$\forall f \in C[a,b] \; için \; \lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\infty = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

f tüm reel eksende sınırlı olduğundan $\forall x \in [a,b]$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq M + M = 2M \tag{3.12}$$

olacaktır. $[a,b]$ aralığında süreklilik ve düzgün süreklilik denk olup f fonksiyonu $[a,b]$' de sürekli olduğundan $a \leq x \leq b$ ve t bu aralığın dışında bir değer olmak üzere

$$|t - x| < \delta \text{ olduğunda } |f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.13}$$

olur.

(3.12) ve (3.13)' ten

$$|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t), \;\; x \in [a,b] \; ve \; \psi(t) = (t-x)^2$$

yazılır. Çünkü $x \in [a,b]$ ve $\psi(t) = (t-x)^2$ olmak üzere

$|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t)$

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ (3.14)

olacağından

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M \tag{3.15}$$

sağlanır. Böylece $\forall x \in [a,b]$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{3.16}$$

gerçeklenir.

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olduğundan monotonluk özelliğinden,

$$|L_n(f;x)| \leq L_n(|f|;x) \tag{3.17}$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t);x) - f(x)| &= |L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)| \\
&= |L_n(f(t)-f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)| \\
&\leq |L_n(f(t)-f(x);x)| + |L_n(f(x);x) - f(x)| \\
&\leq L_n|f(t)-f(x);x| + |f(x)(L_n(\mathbf{1};x) - 1)| \\
&\leq L_n|f(t)-f(x);x| + \max_{x\in[a,b]}|f(x)||(L_n(\mathbf{1};x) - \mathbf{1})|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Hipotezden dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_\infty \|(L_n(\mathbf{1};.) - \mathbf{1}\|_\infty = 0, \qquad (\mathbf{1}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1})$$

olur. O halde

$$L_n(|f(t) - f(x)|; x) \rightrightarrows 0$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. (3.16), (3.17) özelliklerinden

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) \\ &\leq \left| L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right)\right| \\ &= |L_n(\varepsilon; x)| + \left| L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right)\right| \\ &= |\varepsilon L_n(1; x)| + \left|\tfrac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x)\right| = I \end{aligned} \tag{3.18}$$

bulunur. (3.18) ifadesindeki $(t-x)^2$ terimini açarsak

$$\begin{aligned} I &= \varepsilon|L_n(1;x)| + \tfrac{2M}{\delta^2}|L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)| \\ &= \varepsilon|L_n(1;x)| + \frac{2M}{\delta^2}|L_n(t^2;x) - x^2 - 2x(L_n(t;x) - x) + x^2L_n(1;x) - x^2| \\ &= \varepsilon|L_n(1;x)| + \tfrac{2M}{\delta^2}(|L_n(t^2;x) - x^2| + |2x||L_n(t;x) - x| + |x^2||L_n(1;x) - 1|) \end{aligned}$$

yazılır. $x \in [a,b]$ olduğundan $|x| \leq d$ olacak şekilde bir $d \in \mathbb{R}$ vardır ve $|x^2| \leq d^2$ olacağından

$$\begin{aligned} I &= \varepsilon|L_n(1;x)| + \frac{2M}{\delta^2}(|L_n(t^2;x) - x^2| + |2x||L_n(t;x) - x| + |x^2||L_n(1;x) - 1|) \\ &\leq \varepsilon|L_n(1;x)| + \frac{2M}{\delta^2}(\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2 + d^2\varepsilon_3) = \varepsilon^* \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| < \varepsilon^*$$

olup her iki tarafın maksimumu alınırsa

$$\|L_n f - f\|_\infty < \varepsilon^*$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$L_n f \rightrightarrows f$$

düzgün yakınsaması mevcuttur.

3.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşım teorisinde yaklaşımın hızını, hata üst ve alt sınırını belirlemek için süreklilik modülü kullanılır. Bu modül keyfi sınırlı fonksiyonlar için tanımlanabilir. ancak önemli özellikleri sürekli fonksiyonlar için geçerlidir.

Tanım 3.3.1. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Keyfi bir $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |t-x|<\delta}} |f(t) - f(x)|$$

olarak tanımlanan ω fonksiyonuna f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir. Tanımdan görüldüğü üzere $\delta > 0$ için $\omega(.;\delta)$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyondur.

Teorem 3.3.1. Süreklilik modülü için aşağıdakiler sağlanır.

1. $\delta_1, \delta_2 > 0$ ve $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(.;\delta_1) \leq \omega(.;\delta_2)$,
2. $m \geq 1$ bir doğal sayı olmak üzere $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$ dir,
3. Keyfi $\lambda > 0$ için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\delta)$ sağlanır,
4. (δ_n) sıfıra yakınsayan bir reel sayı dizisi olmak üzere $\omega(f;\delta_n) \geq C_f \cdot \delta_n$, (Burada C_f, f' ye bağlı bir sabittir.)
5. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0.$$

İspat.

1. $\delta_1, \delta_2 > 0$ ve $\delta_1 \leq \delta_2$ olsun. $|t-x| < \delta_1 \leq \delta_2$ olup $\omega(.;\delta_1) \leq \omega(.;\delta_2)$ sağlanır.

2. $m \geq 1$ bir doğal sayı olmak üzere $\omega(f;m\delta) = \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |t-x|<m\delta}} |f(t) - f(x)|$

   ifadesinde

$t = x + mh$ alınırsa;

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |t-x|<m\delta}} |f(t) - f(x)| = \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |mh|<m\delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

$$= \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |h|<\delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} f(x + (k+1)h) - f(x + kh) \right|$$

yazılır ve

$$\omega(f; m\delta) \leq \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |h|<\delta}} \sum_{k=0}^{m-1} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |h|<\delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)|$$

$$= m \cdot \omega(f; \delta)$$

olarak bulunur ki bu da istenendir.

3. Keyfi $\lambda > 0$ alalım. $[\![\lambda]\!]$, λ sayısının tam değeri olmak üzere $[\![\lambda]\!]$ ile λ pozitif reel sayısı arasında

$$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!] + 1$$

eşitsizliği mevcuttur ve $[\![\lambda]\!] + 1$ pozitif bir tam sayıdır. $\omega(.; \delta)$ fonksiyonu monoton azalmayan olduğundan

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\![\lambda]\!] + 1)\delta) \leq ([\![\lambda]\!] + 1)\omega(f; \delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta)$$

olur.

4. $\omega(f; 1) = \omega\left(f; \frac{1}{\delta_n} \cdot \delta_n\right) \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n}\right)\omega(f; \delta_n) = \frac{\delta_n + 1}{\delta_n}\omega(f; \delta_n)$

yazılır. (δ_n) sıfıra yakınsayan bir reel sayı dizisi olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla $\delta_n < c$ olacak şekilde $c > 0$ vardır.

$$\omega(f; 1) \leq \frac{c}{\delta_n}\omega(f; \delta_n) \Rightarrow \omega(f; \delta_n) \geq C_f \cdot \delta_n, \quad C_f = \frac{\omega(f; 1)}{c}$$

elde edilir.

5. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığı kompakt aralık olup bu aralıkta süreklilik ve düzgün süreklilik denktir. Dolayısıyla

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \eta > 0 \ni |t - x| < \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. Bu durumda süreklilik modülünün monotonluğundan $\delta < \eta$ olduğunda $\omega(f; \delta) < \varepsilon$ olur. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \eta > 0 \ni \delta < \eta$ iken $\omega(f; \delta) < \varepsilon$ olur. Böylece

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta) = 0$$

elde edilir.

Yukarıda özellikleri verilen süreklilik modülü klasik süreklilik modülüdür. Klasik süreklilik modülü sonlu aralıklar üzerinde anlamlıdır. Sınırsız aralıklar ve bölgeler üzerinde tanımlı fonksiyonlar için ayrı bir süreklilik modülüne ihtiyaç duyulur. Ağırlıklı uzaylarda kullanılan süreklilik modülü bir sonraki bölümde verilecektir.

3.4. Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Korovkin teoremi sonlu aralık üzerinde tanımlı fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı operatörler için verilmiştir. Ancak sınırsız aralıklar üzerinde tanımlı operatörler için Korovkin teoremi geçerli değildir. 1976 yılında A. D. Gadziev, Korovkin teoreminin tüm reel eksende geçerli olan formunu aşağıdaki gibi vermiştir.
φ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ olsun. Bu durumda M_f pozitif bir sabit olmak üzere,

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \left\{ f \,\middle|\, |f(x)| \leq M_f \rho(x),\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

ve

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \left\{ f \in B_\rho(\mathbb{R}) \,\middle|\, f, \mathbb{R}'de\ sürekli \right\}$$

fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Bu sınıflar fonksiyonların toplamı ve skalerle çarpma işlemleri altında vektör uzaydır.

$$\|f\|_\rho = sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

normu ile birer normlu uzaydır. Burada ρ' ya ağırlık fonksiyonu $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ağırlıklı fonksiyon uzayları denir. Ayrıca $k_f \in \mathbb{R}$ sadece f' ye bağlı bir sabit olmak üzere

$$C_\rho^k(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) \,\middle|\, \lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f \right\}$$

olarak tanımlanan fonksiyon uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının alt uzayıdır.

Teorem 3.4.1. φ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ olsun. Bu durumda

i. $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki, bu operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(\varphi^\nu;\cdot) - \varphi^\nu(\cdot)\|_\rho = 0, \quad \nu = 0, 1, 2 \tag{3.19}$$

şartları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f^*;\cdot) - f^*(\cdot)\|_\rho \geq 1$$

olur.

ii. $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi (3.19) koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f;\cdot) - f(\cdot)\|_\rho = 0$$

sağlanır (Gadziev,1976).

3.5. Ağırlıklı Uzaylarda Süreklilik Modülü

Ağırlıklı uzaylarda kullandığımız süreklilik modülü ise N. İspir tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (İspir, 2002). $x \in [0,\infty)$ ve $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ olmak üzere, her $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

olarak tanımlanan Ω fonksiyonuna $C_\rho^k[0,\infty)$ uzayında f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir.

Lemma 3.4.1. (Gadziev ve İspir, 1999) $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ ve Ω ağırlıklı uzaylarda tanımlı süreklilik modülü olsun. Bu durumda

1. $\Omega(\cdot;\delta)$ fonksiyonu δ' ya göre pozitiftir ve monoton artan bir fonksiyondur.

2. Her $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ için
$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(f;\delta) = 0$$
dır.

Önerme 3.4.1 $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ ve Ω ağırlıklı uzaylarda tanımlı süreklilik modülü olsun. Herhangi bir m doğal sayısı için

$$\Omega(f;m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

olup herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

dır.

İspat. $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ ve Ω ağırlıklı uzaylarda tanımlı süreklilik modülü olsun. Herhangi bir m doğal sayısı için

$$
\begin{aligned}
|f(x+mh)-f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{m} f(x+kh)-f(x+(k-1)h)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{f(x+kh)-f(x+(k-1)h)}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)}(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2) \\
&= (1+h^2)\Omega(f;\delta)\sum_{k=1}^{m}(1+(x+(k-1)h)^2) \\
&\leq (1+h^2)\Omega(f;\delta)2[1+x^2+(mh)^2]\sum_{k=1}^{m} 1 \\
&= 2m(1+x^2)(1+h^2)(1+(mh)^2)\Omega(f;\delta)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$\frac{|f(x+mh)-f(x)|}{(1+x^2)\,(1+(mh)^2)} \leq 2m(1+h^2)\Omega(f;\delta)$$

elde edilir. Böylece

$$\Omega(f;m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

olur ki istenendir. Keyfi $\lambda > 0$ alalım. $[\![\lambda]\!]$ ile λ pozitif reel sayısı arasında

$$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!] + 1$$

eşitsizliği mevcuttur ve $[\![\lambda]\!] + 1$ pozitif bir tam sayıdır. Herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$
\begin{aligned}
\Omega(f;\lambda\delta) &\leq \Omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta) \\
&\leq 2([\![\lambda]\!]+1)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta) \\
&\leq 2(\lambda+1)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.5. Klasik Gamma Operatörleri

Sınırsız aralıklar üzerinde tanımlanan operatörlerden birisi Gamma operatörleridir. Lupaş ve Müller (Lupas ve Müller, 1967) tarafından $x \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, genelleştirilmiş integrali yakınsak kılan f'ler için

$$G_n(f;x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}\,u^n f\left(\frac{n}{u}\right)du$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha sonra Mazhar tarafından farklı bir modifiyesi ele alınmıştır. $n > 1, x > 0$ ve

$$g_n(x,u) = \frac{x^{n+1}}{n!}e^{-xu}u^n$$

olmak üzere

$$F_n(f;x) = \int_0^\infty g_n(x,u)\,du \int_0^\infty g_{n-1}(u,t)\,f(t)dt$$

olarak tanımlamıştır (Mazhar, 1991). Son yıllarda Gamma operatörlerinin yakınsaklık özellikleri Zeng (Zeng, 2005) tarafından incelenmiştir. (Karslı, 2007) ve (Karslı, 2010) makalelerinde klasik Gamma operatörlerinden, faydalanarak modifiyeleri elde edilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Klasik Gamma operatörleri lineer pozitif operatörlerdir. Gerçekten, bu integrali mutlak yakınsak yapan f ve g' ler ve $\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
G_n(\alpha f + \gamma g;x) &= \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}\,u^n(\alpha f + \gamma g)\left(\frac{n}{u}\right)du\\
&= \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}\,u^n(\alpha f)\left(\frac{n}{u}\right)du + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}\,u^n(\gamma g)\left(\frac{n}{u}\right)du\\
&= \frac{\alpha x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}\,u^n f\left(\frac{n}{u}\right)du + \frac{\gamma x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}\,u^n g\left(\frac{n}{u}\right)du\\
&= \alpha G_n(f;x) + \gamma G_n(g;x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca f' ler pozitif olsun. $x \in (0,\infty)$ için e^{-xu} ve u^n ifadeleri pozitif olduğundan $G_n(f;x) \geq 0$ olup G_n operatörleri pozitiftir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Buradaki sonuçlar Deveci ve ark. tarafından 2020 yılında Mathematical Methods in the Applied Sciences dergisinde ‘Approximation by Gamma Type Operators’ adlı makale ve Acar ve ark. tarafından 2020 yılında Advanced in Difference Equations dergisinde ‘Gamma Operators Reproducing Exponential Functions’ adlı makale olarak yayımlanmıştır.

4.1. Sabit Fonksiyon ve $e^{2\mu\cdot}$, $\mu > 0$, Fonksiyonlarını Koruyan Gamma Tipli Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin İnşası

Gamma operatörlerinin yeni inşasında $\mu > 0$ olmak üzere $\mathbf{1}$ ve $e^{2\mu\cdot}$ fonksiyonlarını korumasını amaçladık ve bu operatörü aşağıdaki biçimde tanımladık.
$x \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$G_n^{\mu}(f;x) = \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\beta(x;n,\mu)u}\, u^n f\left(\frac{x^2u}{n}\right)du \tag{3.20}$$

dır. Burada β fonksiyonunu $G_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = 1$ ve $G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x) = e^{2\mu x}$ şartlarını gerçekleterek elde ettik. Gerçekten de, ilk olarak $G_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = 1$ şartını sağlatalım.

$$G_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\beta(x;n,\mu)u}\, u^n du$$

ifadesinde $\beta(x;n,\mu)u = t \Rightarrow \beta(x;n,\mu)du = dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} G_n^{\mu}(\mathbf{1};x) &= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\beta(x;n,\mu)}\right)^n \frac{dt}{\beta(x;n,\mu)} \\ &= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{t^n}{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}dt \\ &= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\beta^{n+1}(x;n,\mu)\, n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^n dt \end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 3.1.'in 2. şıkkı kullanılırsa

$$G_n^{\mu}(\mathbf{1};x)=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\beta^{n+1}(x;n,\mu)\,n!}\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^n dt$$
$$=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^n dt=\frac{1}{n!}n!=1$$

bulunur. Yani,

$$G_n^{\mu}(\mathbf{1};x)=\mathbf{1} \tag{3.21}$$

dir. İkinci olarak da $G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=e^{2\mu x}$ şartını sağlatalım. $x\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty}e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n e^{2\mu\frac{x^2u}{n}}du$$
$$=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty}e^{-\left(\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}\right)u}\,u^n du$$

ifadesinde $\left(\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}\right)u=t\Rightarrow\left(\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}\right)du=dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty}e^{-t}\left(\frac{t}{\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}}\right)^n\frac{dt}{\left(\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}\right)}$$
$$=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\left(\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}n!}\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^n dt$$
$$=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\left(\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}n!}n!$$

buluruz ve buradan da

$$G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\left(\beta(x;n,\mu)-2\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}=e^{2\mu x} \tag{3.22}$$

elde ederiz. β fonksiyonunu elde etmeye çalışalım.

$$\beta^{n+1}(x;n,\mu) = e^{2\mu x}\left(\beta(x;n,\mu) - 2\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \beta(x;n,\mu) = e^{\frac{2\mu x}{n+1}}\left(\beta(x;n,\mu) - 2\mu\frac{x^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \beta(x;n,\mu) = e^{\frac{2\mu x}{n+1}}\beta(x;n,\mu) - e^{\frac{2\mu x}{n+1}}2\mu\frac{x^2}{n}$$

$$\Rightarrow \beta(x;n,\mu)\left(e^{\frac{2\mu x}{n+1}} - 1\right) = e^{\frac{2\mu x}{n+1}}2\mu\frac{x^2}{n}$$

$$\Rightarrow \beta(x;n,\mu) = \frac{e^{\frac{2\mu x}{n+1}}2\mu\frac{x^2}{n}}{e^{\frac{2\mu x}{n+1}} - 1}.$$

Bu ifadenin limitine bakacak olursak

$$\lim_{n\to\infty}\beta(x;n,\mu) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{2\mu x}{n+1}}2\mu\frac{x^2}{n}}{e^{\frac{2\mu x}{n+1}} - 1} = x$$

olur.

Yeni inşa ettiğimiz G_n^μ operatörleri her $n \in \mathbb{N}$ için lineer ve pozitiftir. Gerçekten, bu integrali mutlak yakınsak yapan f ve g' ler ve $\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$G_n^\mu(\alpha f + \gamma g;x) = \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n(\alpha f + \gamma g)\left(\frac{x^2u}{n}\right)du$$

$$= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n(\alpha f)\left(\frac{x^2u}{n}\right)du$$

$$+\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n(\gamma g)\left(\frac{x^2u}{n}\right)du$$

olur. $\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$ olduğundan integralden bağımsızdır.

$$G_n^\mu(\alpha f + \gamma g;x) = \frac{\alpha\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n f\left(\frac{x^2u}{n}\right)du$$

$$+\frac{\gamma\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n g\left(\frac{x^2u}{n}\right)du$$

(3.20)’ den

$$G_n^{\mu}(\alpha f+\gamma g;x)=\alpha G_n^{\mu}(f;x)+\gamma G_n^{\mu}(g;x)$$

elde edilir. Ayrıca f’ ler pozitif olsun. $x\in(0,\infty)$ için $e^{-\beta(x;n,\mu)u}$ ve u^n ifadeleri pozitif oldğundan $G_n^{\mu}(f;x)\geq 0$ olup G_n^{μ} operatörleri pozitiftir.

Şimdi exponansiyel momentleri verelim.

Lemma 4.1.1. $\mu>0$, $x\in(0\,,\infty)$ ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. (3.20)’ de verilen operatörün

$$G_n^{\mu}(\mathbf{1};x)=\mathbf{1} \text{ ve } G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=e^{2\mu x}$$

şartlarını sağladığını biliyoruz. Ayrıca

$$G_n^{\mu}(\mathbf{1};x)=\mathbf{1},$$
$$G_n^{\mu}(e^{\mu t};x)=\left(\frac{\beta(x;n,\mu)}{\beta(x;n,\mu)-\mu\frac{x^2}{n}}\right)^{n+1},$$
$$G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=e^{2\mu x}$$

eşitlikleri de sağlanır.

İspat. (3.21) ve (3.22)’ den $G_n^{\mu}(\mathbf{1};x)=\mathbf{1}$ ve $G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=e^{2\mu x}$ olduğunu biliyoruz. $e^{\mu\cdot}$ fonksiyonunun G_n^{μ} operatörü altında görüntüsünü inceleyelim.

$$G_n^{\mu}(e^{\mu t};x)=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty}e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n e^{\mu\frac{x^2u}{n}}du$$
$$=\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty}e^{-\left(\beta(x;n,\mu)-\mu\frac{x^2}{n}\right)u}\,u^n du$$

ifadesinde $\left(\beta(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)u=t\Rightarrow\left(\beta(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)du=dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$G_n^{\mu}(e^{\mu t};x) = \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\beta(x;n,\mu)-\mu\frac{x^2}{n}}\right)^n \frac{dt}{\left(\beta(x;n,\mu)-\mu\frac{x^2}{n}\right)}$$

$$= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\left(\beta(x;n,\mu)-\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1} n!}\int_0^{\infty} e^{-t}t^n\ dt$$

$$= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\left(\beta(x;n,\mu)-\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1} n!} n!$$

elde edilir. Yani;

$$G_n^{\mu}(e^{\mu t};x) = \left(\frac{\beta(x;n,\mu)}{\beta(x;n,\mu)-\mu\frac{x^2}{n}}\right)^{n+1}$$

olur.

Şimdi polinomsal momentleri verelim.

Lemma 4.1.2. $\mu > 0$, $x \in (0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $e_i(x) = x^i, i \in \mathbb{N}$ olmak üzere, bu durumda aşağıdakiler elde edilir.

$$G_n^{\mu}(e_0;x) = \mathbf{1} \tag{3.23}$$

$$G_n^{\mu}(e_1;x) = \frac{(n+1)}{n}\frac{x^2}{\beta(x;n,\mu)} \tag{3.24}$$

$$G_n^{\mu}(e_2;x) = \frac{(n+2)(n+1)}{\beta^2(x;n,\mu)}\frac{x^4}{n^2} \tag{3.25}$$

Bunlara ek olarak, $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$m_n^s(x) := G_n^{\mu}((t-x)^s;x) \tag{3.26}$$

ile merkezi momentleri gösterelim.

Buradan

$$\lim_{n\to\infty} nm_n^1(x) = -\,x^2\mu \tag{3.27}$$

$$\lim_{n\to\infty} nm_n^2(x) = x^2 \tag{3.28}$$

elde ederiz.

İspat. (3.19)’ daki operatörün tanımından

$$G_n^\mu(e_0;x) = \mathbf{1}$$

elde edilir. Yine operatörün (3.19) tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} G_n^\mu(e_1;x) &= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n\left(\frac{x^2u}{n}\right)du \\ &= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^{n+1}\left(\frac{x^2}{n}\right)du \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca $\beta(x;n,\mu)u = t \Rightarrow \beta(x;n,\mu)du = dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$G_n^\mu(e_1;x) = \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{\beta(x;n,\mu)}\right)^{n+1}\left(\frac{x^2}{n}\right)\frac{dt}{\beta(x;n,\mu)}$$

$$= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\beta^{n+2}(x;n,\mu)\,n!}\left(\frac{x^2}{n}\right)\int_0^\infty e^{-t}\,t^{n+1}dt$$

yazılır.

Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve Önerme 3.1.'in 2. şıkkı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G_n^{\mu}(e_1;x) &= \frac{1}{\beta(x;n,\mu)\,n!}\left(\frac{x^2}{n}\right)\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{n+1}dt \\
&= \frac{1}{\beta(x;n,\mu)\,n!}\left(\frac{x^2}{n}\right)(n+1)! \\
&= \frac{1}{\beta(x;n,\mu)}\left(\frac{x^2}{n}\right)\frac{(n+1)n!}{n!} \\
&= \frac{(n+1)}{n}\frac{x^2}{\beta(x;n,\mu)}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
G_n^{\mu}(e_2;x) &= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n\left(\frac{x^2u}{n}\right)^2 du \\
&= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^{n+2}\frac{x^4}{n^2}du
\end{aligned}$$

ifadesinde $\beta(x;n,\mu)u = t \Rightarrow \beta(x;n,\mu)du = dt$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$G_n^{\mu}(e_2;x) = \frac{x^4}{n^2}\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\beta(x;n,\mu)}\right)^{n+2}\frac{dt}{\beta(x;n,\mu)}$$

bulunur ve düzenlemeler yapılırsa

$$G_n^{\mu}(e_2;x) = \frac{x^4}{n^2}\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\beta^{n+3}(x;n,\mu)n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{n+2}dt$$

elde edilir. Önerme 3.1.'in 2. şıkkı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G_n^{\mu}(e_2;x) &= \frac{x^4}{n^2}\frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\beta^{n+3}(x;n,\mu)n!}(n+2)! \\
&= \frac{x^4}{n^2}\frac{1}{\beta^2(x;n,\mu)}\frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{\beta^2(x;n,\mu)}\frac{x^4}{n^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Merkezi momentleri hesaplayalım. (3.26) tanımı, G_n^μ operatörlerinin lineerliği ve (3.21), (3.24) eşitlikleri kullanılırsa

$$m_n^1(x) := G_n^\mu\big((t-x);x\big) = G_n^\mu(t;x) - G_n^\mu(x;x)$$

olup,

$$G_n^\mu(t;x) - G_n^\mu(x;x) = \frac{(n+1)}{n}\frac{x^2}{\beta(x;n,\mu)} - x\,G_n^\mu(\mathbf{1};x) = \frac{(n+1)}{n}\frac{x^2}{\beta(x;n,\mu)} - x$$

bulunur ve $\beta(x;n,\mu) = \frac{e^{\frac{2\mu x}{n+1}}2\mu\frac{x^2}{n}}{e^{\frac{2\mu x}{n+1}}-1}$ yerine yazılırsa

$$m_n^1(x) := G_n^\mu\big((t-x);x\big) = \frac{(n+1)}{n}\frac{x^2}{\left(\frac{e^{\frac{2\mu x}{n+1}}2\mu\frac{x^2}{n}}{e^{\frac{2\mu x}{n+1}}-1}\right)} - x$$

olur ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} n m_n^1(x) = -x^2\mu$$

elde edilir. İkinci merkezi momenti hesaplayalım. (3.26) tanımı, G_n^μ operatörlerinin lineerliği ve (3.23), (3.24), (3.25) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} m_n^s(x) &:= G_n^\mu((t-x)^2;x) = G_n^\mu(t^2 - 2tx - x^2;x) \\ &= G_n^\mu(t^2;x) - 2xG_n^\mu(t;x) - x^2G_n^\mu(\mathbf{1};x) \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{\beta^2(x;n,\mu)}\frac{x^4}{n^2} - 2x\left(\frac{(n+1)}{n}\frac{x^2}{\beta(x;n,\mu)} - x\right) - x^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} n m_n^2(x) = x^2$$

olarak bulunur.

Lemma 4.1.3. Her $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ ve $x \in (0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} G_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right) = e^{-\lambda x} \tag{3.29}$$

bulunur.

İspat. G_n^{μ} lineer pozitif operatörlerin (3.19)' da verilen tanımından

$$G_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right) = \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\beta(x;n,\mu)u}\,u^n e^{-\lambda\frac{x^2u}{n}}du$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$G_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right) = \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\left(\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}\right)u}\,u^n du$$

elde edilir. $\left(\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}\right)u = t \Rightarrow \left(\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}\right)du = dt$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\begin{aligned}
G_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right) &= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}}\right)^n \frac{dt}{\left(\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}\right)}\\
&= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\left(\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}\right)^{n+1} n!}\int_0^{\infty} e^{-t}t^n\,dt\\
&= \frac{\beta^{n+1}(x;n,\mu)}{\left(\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}\right)^{n+1} n!}n!\\
&= \left(\frac{\beta(x;n,\mu)}{\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} G_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta(x;n,\mu)}{\beta(x;n,\mu)+\lambda\frac{x^2}{n}}\right)^{n+1} = e^{-\lambda x}$$

sağlanır.

4.2. Sabit Fonksiyon ve $e^{2\mu \cdot}, \mu > 0$ Fonksiyonlarını Koruyan Gamma Tipli Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Bu bölümde $\left(G_n^{\mu}(f)\right)$ lineer pozitif operatörler dizisinin ağırlıklı fonksiyon uzayına ait f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını ve yakınsaklık oranını elde ettik. İlk sonuç, ağırlıklı uzaya ait olmayan fonksiyonlar için $G_n^{\mu}(f)$ operatörlerinin düzgün yakınsaklığıdır. Ağırlıklı olmayan uzay ise $\lim_{x\to\infty} f(x)$ var ve sonlu olma özelliğini sağlayan $C[0,\infty)$'un alt uzayıdır. Böyle fonksiyonların uzayı $\|\cdot\|_{\infty}$ supremum normuna sahip olup $C_*[0,\infty)$ ile gösterilir.

Boyanov ve Veselinov' un teoremine göre $C_*[0,\infty)$ uzayına ait olan fonksiyonlar için lineer pozitif operatörler dizisinin düzgün yakınsaklığını kontrol etmek aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.2.1. (Boyanov ve Veselinov, 1970) $A_n: C_*[0,\infty) \to C_*[0,\infty)$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n\to\infty} A_n(e^{-kt};x) = e^{-kx}, \qquad k = 0,1,2$$

düzgün olarak $[0,\infty)$' da yukarıdaki şartları sağlar $\Leftrightarrow$ $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f;x) = f(x)$$

$[0,\infty)$' da düzgün olarak yakınsar.

Bu teoremi kullanmak için aşağıdaki uyarıyı verelim.

Uyarı 4.2.1 $n \in \mathbb{N}, \mu > 0$ olsun. $x, u \in [0, \infty)$ olmak üzere

$$K(x,u) := \frac{1}{n!}\, \beta^{n+1}(x;n,\mu) u^n e^{-\beta(x;n,\mu)u}$$

alalım. Bu durumda

$$G_n^{\mu}(f;x) = \int_0^{\infty} K(x,u)\, f\left(\frac{x^2 u}{n}\right) du, \qquad G_n^{\mu}(\boldsymbol{e_0};x) = 1$$

olduğu ve $\beta^{n+1}(x;n,\mu)$, u^n ve $e^{-\beta(x;n,\mu)u}$ fonksiyonlarını göz önüne aldığımızda $K(x,u)$ sınırlıdır. Yani, $x, u > 0$ için $K(x,u) \leq C$ dir. $f \in C[0,\infty)$, $f \neq \boldsymbol{0}$ ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda $\exists M > 0$ sayısı vardır öyleki $\forall x \geq M$ için $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ‘dir. $a \coloneqq \frac{\varepsilon}{2C\|f\|_\infty}$ ve $x \geq \left(\frac{nM}{a}\right)^{1/2}$ olsun.

$$\int_a^{\infty} K(x,u)\, du \leq \int_0^{\infty} K(x,u)\, du = 1$$

ve

$$\frac{x^2 u}{n} \geq \frac{x^2 a}{n} \geq M$$

olduğundan böylece $\forall u \geq a$ için $\left|f\left(\frac{x^2 u}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\left|G_n^{\mu}(f;x)\right| &\leq \int_0^{\infty} K(x,u) \left|f\left(\frac{x^2 u}{n}\right)\right| du \\
&\leq \int_0^{a} K(x,u)\|f\|_\infty du + \int_a^{\infty} K(x,u)\frac{\varepsilon}{2} du \\
&\leq aC\|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^{\infty} K(x,u)\, du \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Yani, $\forall x \geq \left(\frac{nM}{a}\right)^{1/2}$ için $\left|G_n^{\mu}(f;x)\right| \leq \varepsilon$ dir.

Böylece;

$$\lim_{x\to\infty} G_n^{\mu}(f;x) = 0$$

olur. Dolayısıyla; $G_n^{\mu}(f;x) \in C_*[0,\infty)$ olup $G_n^{\mu}: C_*[0,\infty) \to C_*[0,\infty)$ dönüşüm yapan bir operatördür.

Teorem 4.2.2. $\mu > 0$ olsun. $G_n^{\mu} : C_*[0,\infty) \to C_*[0,\infty)$ lineer pozitif operatörler dizisi ve $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$G_n^{\mu}(f;x) \rightrightarrows f(x), \;\; n \to \infty$$

yakınsaması $[0,\infty)$' da düzgündür.

İspat. İspat boyunca $f_k(x) = e^{-kx},\; k = 0,1,2$ şeklindedir. Teorem 4.2.1' den

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \left|G_n^{\mu}(f_\lambda(t);x) - f_\lambda(x)\right|, \quad \lambda = 0{,}1{,}2 \text{ için}$$

kontrol etmeliyiz. Lemma 4.1.1' den $G_n^{\mu}(f_0(t);x) = G_n^{\mu}(e_0(t);x) = \mathbf{1}$ olup

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \left|G_n^{\mu}(\mathbf{1};x) - \mathbf{1}\right| = 0$$

elde edilir. (3.29)' dan seri açılımlarıyla

$$\begin{aligned}\left\|G_n^{\mu}(f_1) - f_1\right\|_\infty \le & \frac{2}{n}(2\mu+1)e^{-2} + \frac{1283}{4n^2}(2\mu+1)e^{-4} \\ & + \frac{9}{n^2}(\mu+1)e^{-3} + \frac{2}{n^2}8e^{-2} + O(n^{-3}) := \beta_n\end{aligned}$$

bulunur ve bu da gerçekten $O(n^{-1})$ dir. Burada eşitsizliğin sağ tarafında seri açılımında n-yinci terim için α_n diyecek olursak ve c sabit olmak üzere

$$\alpha_n \le \frac{1}{n^n}\frac{n^n}{e^n}c = \frac{c}{e^n}$$

olur.

Son olarak benzer düşünceyle

$$\left\|G_n^{\mu}(f_2)-f_2\right\|_{\infty} \leq \frac{2(\mu+1)}{n}e^{-2}+\frac{32}{n^2}(\mu+1)^2e^{-4}$$
$$+\frac{9}{2n^2}(\mu+1)e^{-3}+\frac{2}{n^2}(\mu+1)e^{-2}+\mathcal{O}(n^{-3}) := \gamma_n$$

elde edilir ki bu da yine $O(n^{-1})$ dir. (β_n) ve (γ_n) düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olduğundan istenilen düzgün yakınsama sonucunu elde ederiz.

Teorem 4.2.1' deki şartları sağlayan lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık oranı için bir üst sınır A. Holhos (Holhos, 2008) tarafından aşağıdaki süreklilik modülüyle ifade edilmiştir.

Her $\delta > 0$ ve $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\omega^*(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t\geq 0 \\ |e^{-x}-e^{-t}|\leq\delta}} |f(x)-f(t)|$$

dir. Klasik manadaki süreklilik modülü yani $\omega(.\,;\delta)$ile aralarındaki ilişki şöyledir:

$$\omega^*(f;\delta) = \omega(\Phi(f);\delta).$$

Burada $\Phi: C_*[0,\infty) \to C[0,1]$ aşağıdaki şekilde tanımlandığı gibi bir izometrik izomorfizmdir.

$f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\Phi(f)(t) = \begin{cases} f(-lnt), & 0 < t \leq 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x), & t = 0 \end{cases}.$$

dir.

Holhos tarafından verilen eşitsizlik aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 4.2.3. (Holhos, 2008) $A_n: C_*[0,\infty) \to C_*[0,\infty)$ lineer pozitif operatörler dizisi ve

$$\|A_n(f_0) - f_0\|_\infty = \alpha_n ,$$
$$\|A_n(f_1) - f_1\|_\infty = \beta_n ,$$
$$\|A_n(f_2) - f_2\|_\infty = \gamma_n ,$$

olsun. (α_n), (β_n) ve (γ_n) dizilerinin düzgün olarak sıfıra yakınsama hipotezi altında $f \in C_*[0,\infty)$ için aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\|A_n(f) - f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \alpha_n + (2 + \alpha_n)\omega^*\left(f; \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}\right).$$

Teorem 4.2.3' ün bir sonucu olarak $\left\|G_n^\mu(e_0) - e_0\right\|_\infty = 0$ olduğundan aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.2.1. $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\left\|G_n^\mu(f) - f\right\|_\infty \leq 2\omega^*\left(f; \sqrt{2\beta_n + \gamma_n}\right)$$

dır. Burada β_n ve γ_n Teorem 4.2.2' nin ispatında olduğu gibidir. Bu son ifade (β_n) ve (γ_n) düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olduğundan $G_n^\mu(f) \rightrightarrows f$ düzgün yakınsamasını ifade eder. Dahası (β_n) ve (γ_n) dizileri $O(n^{-1})$ olduğundan düzgün yakınsamanın oranı ise $\frac{1}{\sqrt{n}}$ olacaktır.

Ağırlıklı fonksiyon uzaylarında düzgün yakınsaklık ve yakınsaklık oranı ayrıca tanımlanır.

$\varphi(x) = 1 + e^{2\mu x}, x \in \mathbb{R}^+$ olsun. Aşağıdaki fonksiyon sınıflarını ele alalım.

$$B_\varphi(\mathbb{R}^+) = \left\{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \,\middle|\, |f(x)| \leq M_f \varphi(x), x \geq 0\right\} \tag{3.30}$$

$$C_\varphi(\mathbb{R}^+) = C(\mathbb{R}^+) \cap B_\varphi(\mathbb{R}^+) \tag{3.31}$$

$$C_\varphi^k(\mathbb{R}^+) = \left\{f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+) \,\middle|\, \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k_f \text{ var ve sonlu}\right\} \tag{3.32}$$

Burada M_f ve k_f yalnızca f' ye bağlı sabitlerdir. Yukarıda üç uzay fonksiyonların toplamı ve skalerle çarpımı altında vektör uzayı olup

$$\|f\|_{\varphi} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$$

normuyla birer normlu uzaydır.

Uyarı 4.2.2. $f \in C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ için $G_n^{\mu}(f)$ operatörünün tanımından

$$\left\|G_n^{\mu}(f)\right\|_{\varphi} \leq \|f\|_{\varphi}$$

elde edilir. (G_n^{μ}) lineer pozitif operatörler dizisi $C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$' dan $C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$' a bir yaklaşım sunar.

Yukarıdaki (3.30), (3.31) ve (3.32) uzayları göz önüne alındığında lineer pozitif operatörler dizisinin sınırsız aralıklar üzerinde ağırlıklı yaklaşımı Gadjiev tarafından sunulmuştur (Gadjiev, 1976). Benzer yolla aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.2.4. Her bir $f \in C_{\varphi}^{k}(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|G_n^{\mu}(f) - f\right\|_{\varphi} = 0$$

sağlanır.

İspat. Gadjiev' in sunduğu ispata göre,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|G_n^{\mu}(e^{k\mu\cdot}) - e^{k\mu\cdot}\right\|_{\varphi} = 0, \qquad k = 0, 1, 2 \text{ için}$$

şartlarının sağlanması G_n^{μ} operatörlerinin düzgün yakınsaklığını ispatlamak için yeterlidir. (3.21) ve (3.22)' den G_n^{μ} operatörleri $G_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = 1$ ve $G_n^{\mu}(e^{2\mu t};x) = e^{2\mu x}$ sağladığından $k = 0$ ve $k = 2$ durumu direk olarak sağlanır.

İspatı tamamlamak için $k = 1$ durumunu inceleyelim.

$$\frac{G_n^{\mu}(e^{\mu\cdot}) - e^{\mu\cdot}}{1 + e^{2\mu x}} = -\frac{1}{2n}\frac{e^{\mu x}\mu^2 x^2}{1 + e^{2\mu x}} + \frac{1}{8n^2}\frac{e^{\mu x}\mu^2 x^2(\mu^2 x^2 + 4)}{1 + e^{2\mu x}} + O(n^{-3})$$

bulunur. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty}\left\|G_n^{\mu}(e^{\mu\cdot}) - e^{\mu\cdot}\right\|_{\varphi} = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^+}\frac{\left|\left(\frac{\beta(x;n,\mu)}{\beta(x;n,\mu) - \mu\frac{x^2}{n}}\right)^{n+1} - e^{\mu x}\right|}{\varphi(x)} = 0.$$

olarak bulunur.

Ağırlıklı uzaylarda noktasal yakınsaklık oranını tanımlamak için G_n^{μ} operatörleri için Voronovskaya teoremini elde edelim.

Teorem 4.2.5. $f \in C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ ve f herhangi bir $x \in \mathbb{R}^+$ noktasında ikinci mertebeden türeve sahip ve f'' , $x \in \mathbb{R}^+$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left[G_n^{\mu}(f;x) - f(x)\right] = -2x^2\mu f'(x) + x^2 f''(x) \tag{3.33}$$

İspat. Taylor açılımı ve ortalama değer teoreminden x ve t arasında öyle bir ζ vardır ki

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{f''(x)(t - x)^2}{2} + h(t,x)(t - x)^2 \tag{3.34}$$

yazılır. Burada

$$h(t,x) = \frac{f''(\zeta) - f''(x)}{2}$$

dir ve süreklidir. $t \to x$ iken $h(t,x) \to 0$ dır.

(3.34) eşitliğinin her iki yanına G_n^{μ} operatörlerini uygulayacak olursak

$$G_n^{\mu}(f;x) - f(x) = f'(x)m_n^1(x) + \frac{f''(x)}{2}m_n^2(x) + G_n^{\mu}(h(t,x)(t-x)^2;x)$$

elde edilir ve buradan her iki tarafı n ile çarparsak

$$n\left[G_n^{\mu}(f;x) - f(x)\right] = f'(x)nm_n^1(x) + \frac{f''(x)}{2}nm_n^2(x) + nG_n^{\mu}(h(t,x)(t-x)^2;x)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.28)' den

$$\lim_{n\to\infty} nm_n^1(x) = -x^2\mu$$
$$\lim_{n\to\infty} nm_n^2(x) = x^2$$

olduğunu biliyoruz. (Acar ve ark, 2017)' de bulunan sayfa 1402'deki eşitsizlikten

$$|h(t,x)(t-x)^2| \leq \varepsilon m_n^2(x) + \frac{M}{\delta^2}m_n^4(x)$$

olur ve $m_n^4(x) = O(n^{-2})$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} nG_n^{\mu}(h(t,x)(t-x)^2;x) = 0$$

elde edilir.

4.3. Karşılaştırmalar, Nümerik ve Grafiksel Örnekler

Teorem 4.3.1. $f \in C^2(0,\infty)$ olsun. $x \in (0,\infty)$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ olduğunu varsayalım öyle ki $n \geq n_0$ için

$$f(x) \leq G_n^{\mu}(f;x) \leq G_n(f;x) \tag{3.35}$$

şartını sağlansın. Bu durumda

$$f''(x) \geq 2\mu f'(x) \geq 0 \tag{3.36}$$

sağlanır. Tersine; (3.36) eşitsizliği verilen bir $x \in (0,\infty)$ noktasında sağlanırsa, bu durumda (3.35) eşitsizliği sağlanır.

İspat. Hipotezimizdeki

$$f(x) \leq G_n^{\mu}(f;x) \leq G_n(f;x)$$

eşitsizliğinde her tarafa $-f(x)$ ekleyip daha sonra her tarafı $2n$ ile çarparsak

$$0 \leq \left(G_n^{\mu}(f;x) - f(x)\right) \leq \left(G_n(f;x) - f(x)\right)$$

elde ederiz. Daha sonra (3.33)' ü kullanarak

$$0 \leq -2\mu f'(x) + f''(x) \ \leq f''(x)$$

buluruz. Böylece istenilen eşitsizliği elde ederiz. Tersi için (3.36) eşitsizliğini kullanarak

$$0 \leq 2\mu f'(x) \leq f''(x) \Rightarrow 0 \geq -2\mu f'(x) \geq -f''(x)$$

olur ve her tarafa $f''(x)$ eklenirse

$$0 \leq -2\mu f'(x) + f''(x) \leq f''(x)$$

elde edilir.

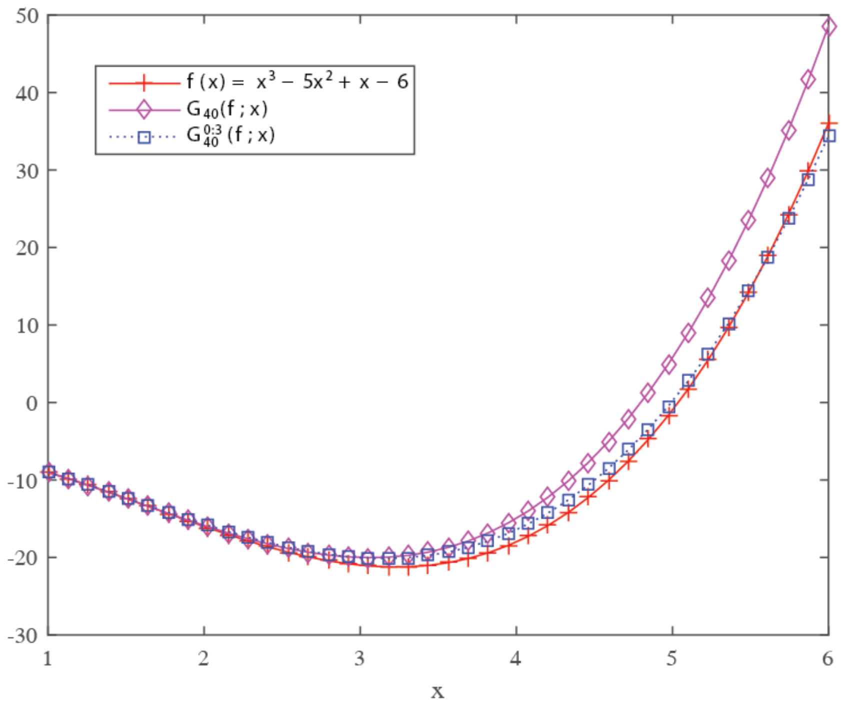
(3.35)' ten

$$f(x) \leq G_n^{\mu}(f;x) \leq G_n(f;x)$$

sağlanır.

MATLAB yardımıyla nümerik örnekler ve grafikler yapılmıştır. Burada; G_n ile verilen klasik Gamma operatörü, G_n^{μ} ile verilen yeni tanımlanan Gamma operatörleri verilmiş olup karşılaştırma amaçlanmıştır. Ayrıca n' nin farklı değerleri için yeni tanımlanan Gamma operatörlerinin davranışını incelemek için de grafikler çizilmiştir. Hedeflenen fonksiyona yaklaşım yaparken hata miktarı tabloda verilmiştir.

Örnek 4.3.1.



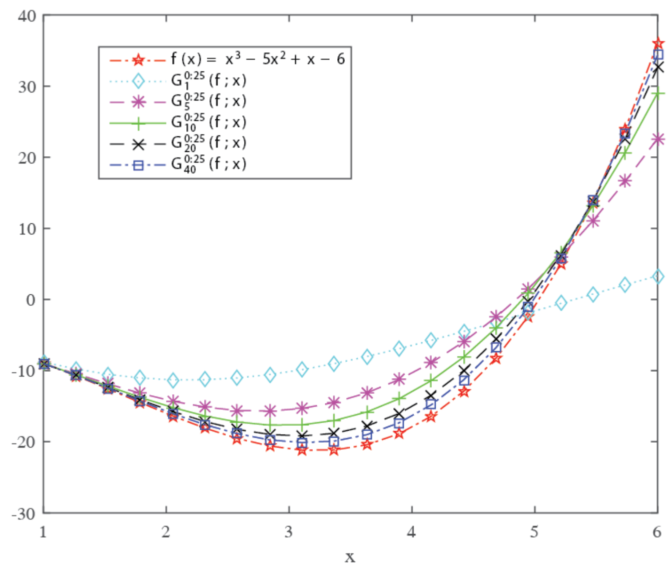
Yukarıdaki grafikte $f(x) = x^3 - 5x^2 + x - 6$ kırmızı artı ile, Klasik Gamma operatörü G_n mor dörtgen ile, yeni tanımlanan Gamma operatörü G_n^{μ} mavi kare ile gösterilmiştir. Aynı n değeri kullanılmasına rağmen yeni tanımlanan operatörde bulunan $\mu = 0{,}3$ değeri alınmıştır. Yeni tanımlanan Gamma operatörü amaçlanan fonksiyona klasik Gamma operatöründen daha iyi bir yaklaşım sunar.

Örnek 4.3.2.

n	RMS Error for $G_n(f;x)$	RMS Error for $G_n^{\mu}(f;x)$
1	5.064254e+00	1.519713e-01
5	1.453463e+00	7.507534e-02
10	7.560564e-01	4.639801e-02
20	5.502076e-01	2.654623e-02
30	9.495942e-02	9.862906e-03
40	6.939498e-02	4.435551e-03

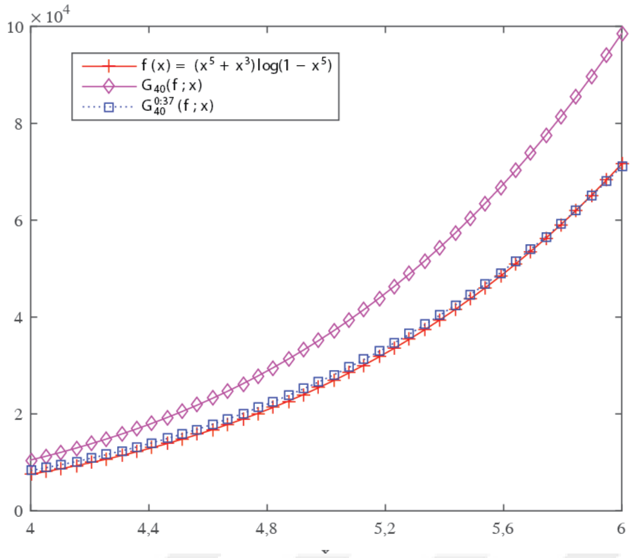
Burada RMS Error ile gösterilmek istenen ortalama karekök hatasıdır.

Yukarıdaki tabloda nümerik olarak Klasik Gamma operatörleri ve yeni tanımlanan Gamma operatörlerinin yaklaşmada ne kadar hata verdiğine yer verilmiştir. Aynı n değeri için yeni tanımlanan Gamma operatörü G_n^{μ}, klasik Gamma operatörü olan G_n operatörüne göre fonksiyona daha yakın değerler verir. Hata miktarı yeni tanımlanan Gamma operatörleri olan (G_n^{μ}) lineer pozitif operatörler dizisinin, klasik Gamma operatörü olan (G_n) lineer pozitif operatörler dizisine göre daha azdır.



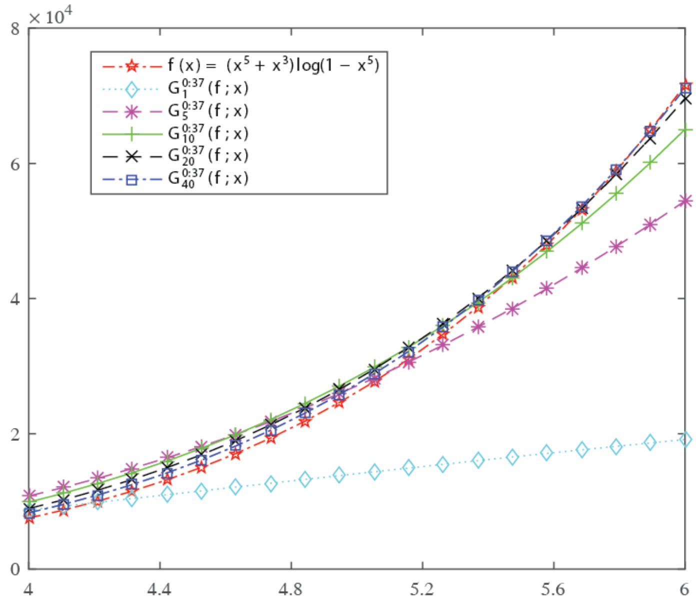
Yukarıdaki grafikte ise $\mu = 0{,}25$ ve $n = 1, 5, 10, 20, 40$ değerleri göz önüne alınmıştır. Klasik Gamma operatörüne göre n değerleri arttıkça amaçlanan fonksiyona yaklaşım, yeni tanımlanan Gamma operatörlerinde çok daha iyidir.

Örnek 4.3.3.



Şimdi ise test fonksiyonu olarak $f\colon[4,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^5+x^3)log(1-x^5)$ alalım. Bu grafikte; yeni tanımlanan Gamma operatörleri olan (G_n^{μ})' nün, klasik Gamma operatörü olan (G_n)' e göre hata miktarı daha azdır.

Örnek 4.3.4.



Son grafikte ise bir önceki örnekte verilen test fonksiyonunda n değerleri arttıkça yeni tanımlanan Gamma operatörleri olan (G_n^{μ})' nün hedeflenen fonksiyona daha çok yaklaştığı görülür.

4.4. $e^{\mu\cdot}$ ve $e^{2\mu\cdot}, \mu > 0$, Üstel Fonksiyonlarını Koruyan Gamma Tipli Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin İnşası

Gamma operatörlerinin yeni inşasında $\mu > 0$ olmak üzere $e^{\mu\cdot}$ ve $e^{2\mu\cdot}$ fonksiyonlarını korumasını amaçladık ve bu operatörleri aşağıdaki biçimde tanımladık. $x \in \mathbb{R}^{+} = (0, \infty)\,, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\Gamma_n^{\mu}(f;x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\,u^n e^{-\mu\frac{x^2u}{n}} f\left(\frac{x^2u}{n}\right)du \tag{3.37}$$

dur. Burada γ fonksiyonunu $\Gamma_n^{\mu}(e^{\mu t};x) = e^{\mu x}$ ve $\Gamma_n^{\mu}(e^{2\mu t};x) = e^{2\mu x}$ şartlarını gerçekleterek elde ettik. Gerçekten de, ilk olarak $\Gamma_n^{\mu}(e^{\mu t};x) = e^{\mu x}$ şartını sağlatalım.

$$\Gamma_n^{\mu}(e^{\mu t};x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\,u^n e^{-\mu\frac{x^2u}{n}} e^{\mu\frac{x^2u}{n}}du = e^{\mu x}$$

$$= \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\,u^n du = e^{\mu x}$$

ifadesinde $\gamma_n(x)u = t \Rightarrow \gamma_n(x)du = dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\Gamma_n^{\mu}(e^{\mu t};x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\gamma_n(x)}\right)^n \frac{dt}{\gamma_n(x)}$$

$$= \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\,\gamma_n^{n+1}(x)}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^n dt$$

elde ederiz.

Önerme 3.1’ in 2. şıkkını kullanırsak

$$\Gamma_n^{\mu}(e^{\mu t};x)=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\,\gamma_n^{n+1}(x)}n!=e^{\mu x} \tag{3.38}$$

buluruz ve zaten istenilen budur. İkinci olarak da $\Gamma_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=e^{2\mu x}$ şartını sağlatalım.

$$\begin{aligned}\Gamma_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)&=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\,u^n e^{-\mu\frac{x^2u}{n}}e^{2\mu\frac{x^2u}{n}}du\\&=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\,u^n e^{\mu\frac{x^2u}{n}}du\\&=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)u}\,u^n du\end{aligned}$$

elde ederiz ve $\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)u=t\Rightarrow\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)du=dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)&=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)}\right)^n\frac{dt}{\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)}\\&=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^n dt\end{aligned}$$

bulunur. Önerme 3.1’ in 2. şıkkını kullanırsak

$$\Gamma_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}n!$$

olur. İkinci şart için eşitliği yazalım.

$$\Gamma_n^{\mu}(e^{2\mu t};x)=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}=e^{2\mu x} \tag{3.39}$$

Buradan γ fonksiyonunu bulalım.

$$e^{2\mu x}=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}$$

eşitliği kullanılıp, üstel fonksiyonlarda sadeleşme yapılırsa

$$e^{\mu x}=\frac{\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}$$

bulunur. Her iki tarafın $\left(\frac{1}{n+1}\right)$. kuvveti alınırsa

$$e^{\frac{\mu x}{n+1}}=\frac{\gamma_n(x)}{\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)}$$

olur. Buradan

$$\gamma_n(x)=e^{\frac{\mu x}{n+1}}\left(\gamma_n(x)-\mu\frac{x^2}{n}\right)=e^{\frac{\mu x}{n+1}}\gamma_n(x)-e^{\frac{\mu x}{n+1}}\mu\frac{x^2}{n}$$

olup

$$\gamma_n(x)\left(e^{\frac{\mu x}{n+1}}-1\right)=\mu\frac{x^2}{n}e^{\frac{\mu x}{n+1}}$$

elde edilir ve $\gamma(x)$ çekilirse

$$\gamma_n(x)=\frac{\mu\frac{x^2}{n}e^{\frac{\mu x}{n+1}}}{e^{\frac{\mu x}{n+1}}-1} \tag{3.40}$$

olarak bulunur. Burada $n\to\infty$ için $\gamma_n(x)\to x$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Γ_n^{μ} operatörü lineer ve pozitiftir. Gerçekten; bu integrali yakınsak yapan f ve g' ler ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\Gamma_n^{\mu}(\alpha f + \beta g; x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}}(\alpha f + \beta g)\left(\frac{x^2 u}{n}\right)du$$
$$= \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}}(\alpha f)\left(\frac{x^2 u}{n}\right)du$$
$$+ \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}}(\beta g)\left(\frac{x^2 u}{n}\right)du$$

olup $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ reel sabitleri integralden bağımsızdır ve

$$\Gamma_n^{\mu}(\alpha f + \beta g; x) = \alpha\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}} f\left(\frac{x^2 u}{n}\right)du$$
$$+\beta\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}} g\left(\frac{x^2 u}{n}\right)du$$

elde edilir. (3.37)' den

$$\Gamma_n^{\mu}(\alpha f + \beta g; x) = \alpha\Gamma_n^{\mu}(f; x) + \beta\Gamma_n^{\mu}(g; x)$$

bulunur. Ayrıca f' ler pozitif olsun. $x \in (0, \infty)$ için $e^{-\gamma_n(x)u} \geq 0$, $e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}} \geq 0$ ve $u^n \geq 0$ olduğundan $\Gamma_n^{\mu}(f; x) \geq 0$ olup Γ_n^{μ} pozitiftir.

$\Gamma_n^{\mu}(.\,; x)$ operatörü altında sabit fonksiyonların görüntüsüne bakalım.

$$\Gamma_n^{\mu}(\mathbf{1}; x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}} du$$

$$\Gamma_n^{\mu}(\mathbf{1};x) \; = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)u}\, u^n du$$

bulunur ve $\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)u = t \Rightarrow \left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)du = dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\Gamma_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1} n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^n dt$$

olur. Önerme 3.1' in 2. şıkkını kullanırsak

$$\Gamma_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1} n!} n! \tag{3.41}$$

bulunur. Buradan

$$\Gamma_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}} \longrightarrow \mathbf{1}, \qquad n \longrightarrow \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla Γ_n^{μ} operatörü limit durumunda sabit fonksiyonları korur.

Sonuç 4.4.1. $\mu > 0$, $x \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. γ_n, (3.40)'da belirtildiği gibi olmak üzere bu durumda

$$\Gamma_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}},$$

$$\Gamma_n^{\mu}(e^{\mu t};x) = e^{\mu x},$$

$$\Gamma_n^{\mu}(e^{2\mu t};x) = e^{2\mu x}$$

sağlanır.

Şimdi polinomsal momentleri hesaplayalım.

Lemma 4.4.1. $\mu > 0$, $x \in (0\,,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $e_i(x) = x^i,\ i \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda aşağıdakiler elde edilir.

$$\Gamma_n^{\mu}(t;x) = \frac{n+1}{n}\frac{x^2 e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+2}} \tag{3.42}$$

$$\Gamma_n^{\mu}(t^2;x) = \frac{(n+2)(n+1)}{n^2}\frac{x^4 e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+3}} \tag{3.43}$$

Bunlara ek olarak $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$m_n^s(x) := \Gamma_n^{\mu}((t-x)^s;x) \tag{3.44}$$

ile merkezi momentleri gösterecek olursak

$$\lim_{n\to\infty} n m_n^1(x) = -\frac{3}{2}x^2\mu \tag{3.45}$$

$$\lim_{n\to\infty} n m_n^2(x) = x^2 \tag{3.46}$$

buluruz.

İspat. (3.37)' deki operatörün tanımından hareketle hesaplamalara geçelim.

$$\Gamma_n^{\mu}(t;x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}}\left(\frac{x^2 u}{n}\right)du$$

$$= \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\left(\frac{x^2}{n}\right)\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\, u^{n+1} e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}}du$$

$$= \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\left(\frac{x^2}{n}\right)\int_0^{\infty} e^{-\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)u}\, u^{n+1}du$$

$\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)u=t \Rightarrow \left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)du=dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\Gamma_n^{\mu}(t;x)=\frac{x^2e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{nn!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)}\right)^{n+1}\frac{dt}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)}$$

$$=\frac{x^2e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\,n\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+2}}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{n+1}dt$$

elde edilir. Önerme 3.1 ‘in 2.şıkkı kullanılırsa

$$\Gamma_n^{\mu}(t;x)=\frac{x^2e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\,n\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+2}}(n+1)!$$

$$=\frac{x^2e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\,n\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+2}}(n+1)n!$$

$$=\frac{n+1}{n}\frac{x^2e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+2}}$$

bulunur. İkinci momenti benzer yolla hesaplayalım.

$$\Gamma_n^{\mu}(t^2;x)=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n(x)u}\,u^n e^{-\mu\frac{x^2u}{n}}\left(\frac{x^2u}{n}\right)^2 du$$

$$=\frac{x^4e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n^2n!}\int_0^{\infty} e^{-\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)u}\,u^{n+2}du$$

ifadesinde $\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)u=t \Rightarrow \left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)du=dt$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$\Gamma_n^{\mu}(t^2;x)=\frac{x^4e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n^2n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)}\right)^{n+2}\frac{dt}{\left(\gamma_n(x)+\mu\frac{x^2}{n}\right)}$$

olur.

$$\Gamma_n^{\mu}(t^2;x) = \frac{x^4 e^{\mu x} \gamma_n^{n+1}(x)}{n^2 n! \left(\gamma_n(x) + \mu \frac{x^2}{n}\right)^{n+3}} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{n+2} dt$$

$$= \frac{x^4 e^{\mu x} \gamma_n^{n+1}(x)}{n^2 n! \left(\gamma_n(x) + \mu \frac{x^2}{n}\right)^{n+3}} (n+2)!$$

$$= \frac{x^4 e^{\mu x} \gamma_n^{n+1}(x)}{n^2 n! \left(\gamma_n(x) + \mu \frac{x^2}{n}\right)^{n+3}} (n+2)(n+1)n!$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \frac{x^4 e^{\mu x} \gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu \frac{x^2}{n}\right)^{n+3}}$$

elde edilir ve momentler hesaplanmış olur. Şimdi ise (3.44)' te ifade edilen merkezi moment hesaplamalarına geçelim. Birinci merkezi moment için (3.41) ve (3.42)'den faydalanarak

$$m_n^1(x) := \Gamma_n^{\mu}\big((t-x);x\big) = \Gamma_n^{\mu}(t;x) - x\Gamma_n^{\mu}(1;x)$$

$$= \frac{n+1}{n} \frac{x^2 e^{\mu x} \gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu \frac{x^2}{n}\right)^{n+2}} - x\Gamma_n^{\mu}(1;x)$$

olup $\Gamma_n^{\mu}(.\,;x)$ limit durumda sabit fonksiyonları koruduğu için

$$\lim_{n\to\infty} n m_n^1(x) = -\frac{3}{2} x^2 \mu$$

bulunur. İkinci merkezi moment için (3.41) ve (3.43)' ten

$$m_n^2(x) \coloneqq \Gamma_n^{\mu}((t-x)^2;x) = \Gamma_n^{\mu}(t^2;x) - 2x\Gamma_n^{\mu}(t;x) + x^2\Gamma_n^{\mu}(1;x)$$

$$= \left(\frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \frac{x^4 e^{\mu x} \gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu \frac{x^2}{n}\right)^{n+3}} \right) - 2x \left(\frac{n+1}{n} \frac{x^2 e^{\mu x} \gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu \frac{x^2}{n}\right)^{n+2}} \right) + x^2 \Gamma_n^{\mu}(1;x)$$

olur.

Limit durumunda

$$\lim_{n\to\infty} n m_n^2(x) = x^2$$

bulunur.

Uyarı 4.4.1. $n \to \infty$ için

$$\Gamma_n^{\mu}(\mathbf{1};x) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}} \longrightarrow \mathbf{1}$$

$$\Gamma_n^{\mu}(t;x) = \frac{n+1}{n}\frac{x^2 e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+2}} \to x$$

$$\Gamma_n^{\mu}(t^2;x) = \frac{(n+2)(n+1)}{n^2}\frac{x^4 e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x) + \mu\frac{x^2}{n}\right)^{n+3}} \to x^2$$

sağlanır.

Lemma 4.4.2. Her $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ $f_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \Gamma_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right) = e^{-\lambda x}$$

sağlanır.

İspat. (3.37)' deki operatörün tanımından

$$\Gamma_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right) = \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^\infty e^{-\gamma_n(x)u}\, u^n e^{-\mu\frac{x^2 u}{n}} e^{\frac{-\lambda x^2 u}{n}} du$$

$$= \frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^\infty e^{-\left(\gamma_n(x)+(\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}\right)u}\, u^n du$$

ifadesinde $\left(\gamma_n(x) + (\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}\right)u = t \Rightarrow \left(\gamma_n(x) + (\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}\right)du = dt$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\Gamma_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right)=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!}\int_0^{\infty}e^{-t}\left(\frac{t}{\left(\gamma_n(x)+(\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}\right)}\right)^n\frac{dt}{\left(\gamma_n(x)+(\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}\right)}$$

$$=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{n!\left(\gamma_n(x)+(\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^n dt$$

$$=\frac{e^{\mu x}\gamma_n^{n+1}(x)}{\left(\gamma_n(x)+(\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}}\ ,\lambda\in\mathbb{R}$$

bulunur. $n\to\infty$ için $\gamma_n(x)\to x$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n^{\mu}\left(e^{-\lambda t};x\right)=e^{\mu x}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\gamma_n(x)}{\gamma_n(x)+(\mu+\lambda)\frac{x^2}{n}}\right)^{n+1}=e^{\mu x}e^{-(\mu+\lambda)x}=e^{-\lambda x}$$

elde edilir.

4.5. $e^{\mu\cdot}$ ve $e^{2\mu\cdot}$, $\mu>0$, Üstel Fonksiyonlarını Koruyan Gamma Tipli Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

4.5.1. Γ_n^{μ} Operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı

Bu alt bölümde Γ_n^{μ} operatörlerinin düzgün yakınsaklığını araştıracağız. Bunun için öncelikle aşağıdaki fonksiyon uzaylarını göz önüne alalım.

$$C[0,\infty)=\{f:[0,\infty)\to\mathbb{R}|\ f \text{ fonksiyonu } [0,\infty) \text{ üzerinde sürekli}\}$$

$$C_*[0,\infty)=\left\{f\in C[0,\infty)\middle|\ \lim_{x\to\infty}f(x) \text{ var ve sonlu}\right\}$$

Bu uzaylar fonksiyonların toplamı ve skalerle çarpımı işlemleriyle vektör uzayı oluşturur ve $\|f\|_{\infty}=\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f(x)|$ normu ile birer normlu uzaydır.

Boyanov ve Veselinov' un teoremine göre $C_*[0,\infty)$ uzayına ait olan fonksiyonlar için lineer pozitif operatörler dizisinin düzgün yakınsaklığını kontrol etmek aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.5.1.1. (Boyanov ve Veselinov, 1970) $A_n: C_*[0,\infty) \to C_*[0,\infty)$ lineer pozitif operatörler dizisi, $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ $f_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f_\lambda(t); x) = f_\lambda(x), \ \ \lambda = 0, 1, 2$$

düzgün olarak $[0,\infty)$' da yukarıdaki şartları sağlar gerek ve yeter şart $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f; x) = f(x)$$

$[0,\infty)$' da düzgün olarak yakınsar.

Teorem 4.5.1.2. $\mu > 0$ olsun. $\Gamma_n^\mu : C_*(\mathbb{R}^+) \to C_*(\mathbb{R}^+)$ lineer pozitif operatörler dizisi ve $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\Gamma_n^\mu(f; x) \rightrightarrows f(x), \ \ n \to \infty$$

yakınsaması $\mathbb{R}^+$ da düzgündür.

İspat. $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}, \lambda = 0, 1, 2$ için olsun. Teorem 4.5.1.1' den

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \left|\Gamma_n^\mu(f_\lambda(t); x) - f_\lambda(x)\right|, \qquad \lambda = 0,1,2 \text{ için}$$

kontrol etmeliyiz. (3.37) operatörün tanımı ve (3.41)' den

$$sup_{x\in[0,\infty)} \left|\Gamma_n^\mu(f_0(t); x) - f_0(x)\right| = \frac{\mu^2 x^2(\mu^6 x^6 - 12\mu^5 x^5 + 26\mu^4 x^4)}{24n^4}$$

$$+\frac{\mu^2 x^2(42\mu^3 x^3 - 42\mu^2 x^2 - 72\mu x - 24)}{24n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \coloneqq \alpha_n$$

bulunur. Ek olarak Lemma 4.5.1.2’den

$$\begin{aligned}\left\|\Gamma_n^{\mu}(f_1)-f_1\right\|_{\infty} \leq & \frac{2e^{-2}}{n}(\mu+1)(2\mu+1)+\frac{1283e^{-4}}{12n^2}(\mu+1)(12\mu^3+24\mu^2+15\mu+3)\\ & -\frac{9e^{-3}}{8n^2}(\mu+1)(24\mu^2+28\mu+8)-\frac{e^{-2}}{6n^2}(\mu+1)(24\mu+12)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ & \coloneqq \beta_n\end{aligned}$$

elde edilir ve $O(n^{-1})$ dir. Son olarak, benzer mantıkla

$$\begin{aligned}\left\|\Gamma_n^{\mu}(f_2)-f_2\right\|_{\infty} \leq & \frac{e^{-2}}{n}(\mu+2)(\mu+1)+\frac{8e^{-4}}{3n^2}(\mu+2)(3\mu^3+12\mu^2+5\mu+6)\\ & -\frac{9e^{-3}}{16n^2}(\mu+2)(6\mu^2+14\mu+8)-\frac{e^{-2}}{6n^2}(\mu+2)(6\mu+6)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ & \coloneqq \sigma_n\end{aligned}$$

dır ve $O(n^{-1})$ dir. (β_n) ve (σ_n) düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

4.5.2. Yakınsaklık Oranı

Teorem 4.5.1.1’ deki şartları sağlayan lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık oranı için bir üst sınır Holhos tarafından aşağıdaki süreklilik modülüyle ifade edilmiştir.

Her $\delta > 0$ ve $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\omega^*(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |e^{-x}-e^{-t}|\leq\delta}} |f(x)-f(t)|$$

dir.

Klasik manadaki süreklilik modülü yani $\omega(.\,;\delta)$ ile aralarındaki ilişki şöyledir

$$\omega^*(f;\delta) = \omega(\Phi(f);\delta).$$

Burada $\Phi\colon C_*[0,\infty) \to C[0,1]$ aşağıdaki şekilde tanımlandığı gibi bir izometrik izomorfizmdir: $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\Phi(f)(t) = \begin{cases} f(-lnt), & 0 < t \le 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x), & t = 0 \end{cases}$$

dır.

Holhos tarafından verilen yukarıda bahsedilen eşitsizlik aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.5.2.1. $A_n\colon C_*[0,\infty) \to C_*[0,\infty)$ pozitif lineer operatörlerin dizisi ve

$$\|A_n(f_0) - f_0\|_\infty = \alpha_n\,,$$
$$\|A_n(f_1) - f_1\|_\infty = \beta_n\,,$$
$$\|A_n(f_2) - f_2\|_\infty = \sigma_n\,,$$

olsun. (α_n), (β_n) ve (σ_n) dizilerinin düzgün olarak sıfıra yakınsama hipotezi altında $f \in C_*[0,\infty)$ için aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\|A_n(f) - f\|_\infty \le \|f\|_\infty \alpha_n + (2+\alpha_n)\omega^*\left(f;\sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \sigma_n}\right).$$

Teorem 4.5.2.1' in sonucu olarak aşağıdakine ulaşırız.

Sonuç 4.5.2.1. $f \in C_*[0,\infty)$ için

$$\left\|\Gamma_n^\mu(f) - f\right\|_\infty \le 2\omega^*\left(f;\sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \sigma_n}\right)$$

olur ve burada (α_n), (β_n) ve (σ_n) dizileri Teorem 4.5.1.2'de olduğu gibidir. (β_n) ve (σ_n) düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olduğundan $\Gamma_n^\mu(f) \to f$ düzgün yakınsaması mevcuttur. Ek olarak (β_n) ve (σ_n) dizileri $O(n^{-1})$ dir dolayısıyla düzgün yakınsaklığın oranı $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dir.

4.5.3. Ağırlıklı Yaklaşım

Ağırlıklı fonksiyon uzaylarında düzgün yakınsaklık ve yakınsaklık oranı ayrıca tanımlanır:
$\varphi(x) = 1 + e^{2\mu x}, x \in \mathbb{R}^+$ olsun. Aşağıdaki fonksiyon sınıflarını ele alalım:

$$B_\varphi(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \middle| \; |f(x)| \leq M_f \varphi(x), x \geq 0 \right\}$$

$$C_\varphi(\mathbb{R}^+) = C(\mathbb{R}^+) \cap B_\varphi(\mathbb{R}^+)$$

$$C_\varphi^k(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \; \in C_\varphi(\mathbb{R}^+) \middle| \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k_f \text{ var ve sonlu} \right\}$$

Burada M_f ve k_f yalnızca f' ye bağlı sabitlerdir. Yukarıda üç uzay vektör uzayı olup

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$$

normuyla birer normlu uzaydır.

Uyarı 4.5.3.1 $f \; \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için (3.37)'deki operatörün tanımından

$$\left\| \Gamma_n^\mu(f) \right\|_\varphi \leq C\|f\|_\varphi$$

elde edilir. $\left(\Gamma_n^\mu\right)$ operatörler dizisi $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$' dan $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$' a bir yaklaşım sunar.

Yukarıdaki uzaylar göz önüne alındığında lineer pozitif operatörler dizisinin sınırsız aralıklar üzerinde ağırlıklı yaklaşımı Gadziev tarafından sunulmuştur. Benzer yolla aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.5.3.1. Her bir $f \in C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \Gamma_n^\mu(f) - f \right\|_\varphi = 0$$

sağlanır.

İspat. Gadjiev' in sunduğu ispata göre

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\Gamma_n^{\mu}(e^{k\mu\cdot}) - e^{k\mu\cdot}\right\|_{\varphi} = 0, k = 0, 1, 2 \text{ için}$$

şartlarının sağlanması Γ_n^{μ} operatörlerinin düzgün yakınsaklığını ispatlamak için yeterlidir. (3.38) ve (3.39)' dan $k = 1$ ve $k = 2$ durumu direk olarak sağlanır. Son olarak ispatı tamamlamak için $k = 0$ durumunu gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\Gamma_n^{\mu}(e_0) - e_0\right\|_{\varphi} = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.5.4. Noktasal Yakınsaklık

Ağırlıklı uzaylarda noktasal yakınsaklık oranını tanımlamak için Γ_n^{μ} operatörleri için Voronovskaya teoremini elde edelim.

Teorem 4.5.4.1 $f \in C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ ve f herhangi bir $x \in \mathbb{R}^+$ noktasında ikinci mertebeden türeve sahip ve f'' , $x \in \mathbb{R}^+$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left[\Gamma_n^{\mu}(f;x) - f(x)\right] = -3x^2\mu f'(x) + 2x^2 f''(x) \tag{3.47}$$

İspat. Taylor açılımı ve ortalama değer teoreminden x ve t arasında bir ζ vardır öyle ki

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)(t-x)^2}{2} + h(t,x)(t-x)^2 \tag{3.48}$$

yazılır. Burada

$$h(t,x) = \frac{f''(\zeta) - f''(x)}{2}$$

süreklidir ve $t \to x$ iken $h(t,x) \to 0$ dır.

(3.48) eşitliğinin her iki yanına Γ_n^{μ} operatörlerini uygulayacak olursak

$$\Gamma_n^{\mu}(f;x) - f(x) = f'(x)m_n^1(x) + \frac{f''(x)}{2}m_n^2(x) + \Gamma_n^{\mu}(h(t,x)(t-x)^2;x)$$

olur. Her iki tarafı n ile çarparsak

$$n\big[\Gamma_n^{\mu}(f;x) - f(x)\big] = f'(x)nm_n^1(x) + \frac{f''(x)}{2}nm_n^2(x) + n\Gamma_n^{\mu}(h(t,x)(t-x)^2;x)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.45) ve (3.46)' dan

$$\lim_{n\to\infty} nm_n^1(x) = -\tfrac{3}{2}x^2\mu,$$
$$\lim_{n\to\infty} nm_n^2(x) = x^2$$

olduğunu biliyoruz. (Acar ve ark, 2017)' de sayfa 1402'de bulunan eşitsizlikten

$$|h(t,x)(t-x)^2| \le \varepsilon m_n^2(x) + \frac{M}{\delta^2}m_n^4(x)$$

ve $m_n^4(x) = O(n^{-2})$ olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\lim_{n\to\infty} n\Gamma_n^{\mu}(h(t,x)(t-x)^2;x) = 0$$

Böylece istenilen sonuca ulaşırız.

4.6. Karşılaştırmalar, Nümerik Örnekler ve Grafikler

Teorem 4.6.1. $f \in C^2(0,\infty)$ alalım. $x \in (0,\infty)$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ olduğunu varsayalım öyle ki $n \geq n_0$ için

$$f(x) \leq \Gamma_n^{\mu}(f;x) \leq G_n(f;x) \tag{3.49}$$

olsun. Bu durumda

$$f''(x) \geq 3\mu f'(x) \geq 0 \tag{3.50}$$

sağlanır. Tersine; (3.50)' de verilen eşitsizlik bir $x \in (0,\infty)$ noktasında sağlanırsa, bu durumda (3.49) sağlanır.

İspat. (3.49) eşitsizliğinde her tarafa $-f(x)$ ekleyip daha sonra her tarafı $2n$ ile çarparsak

$$0 \leq 2n\left(\Gamma_n^{\mu}(f;x) - f(x)\right) \leq 2n\big(G_n(f;x) - f(x)\big)$$

elde ederiz. Daha sonra Teorem 4.5.4.1' i kullanarak

$$0 \leq -2\mu f'(x) + f''(x) \leq f''(x)$$

buluruz. Böylece istenilen eşitsizliği elde ederiz. Tersi için

$$0 \leq 3\mu f'(x) \leq f''(x) \Rightarrow 0 \geq -3\mu f'(x) \geq -f''(x)$$

olur ve her tarafa $f''(x)$ eklenirse

$$0 \leq -2\mu f'(x) + f''(x) \leq f''(x)$$

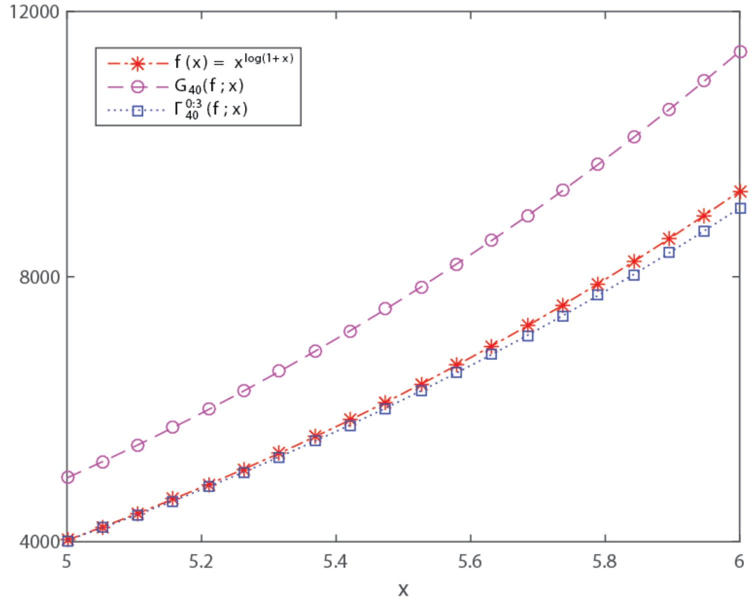
elde edilir ve hipotezden

$$f(x) \leq \Gamma_n^{\mu}(f;x) \leq G_n(f;x)$$

sağlanır.

MATLAB yardımıyla nümerik örnekler ve grafikler yapılmıştır. Burada; klasik Gamma operatörü olan G_n ve yeni tanımlanan Gamma operatörleri olan Γ_n^{μ} verilmiş olup karşılaştırma amaçlanmıştır. Ayrıca n' nin farklı değerleri için yeni tanımlanan Gamma operatörleri Γ_n^{μ}'nün davranışını incelemek için grafikler çizilmiştir.

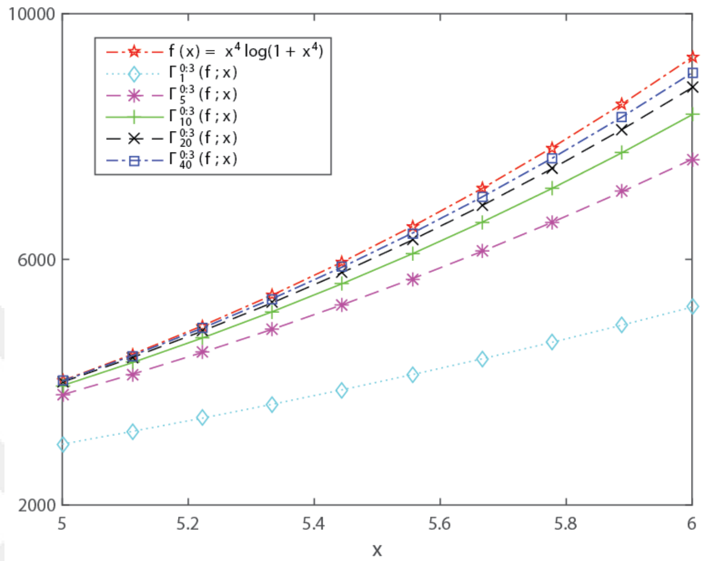
Örnek 4.6.1.1.



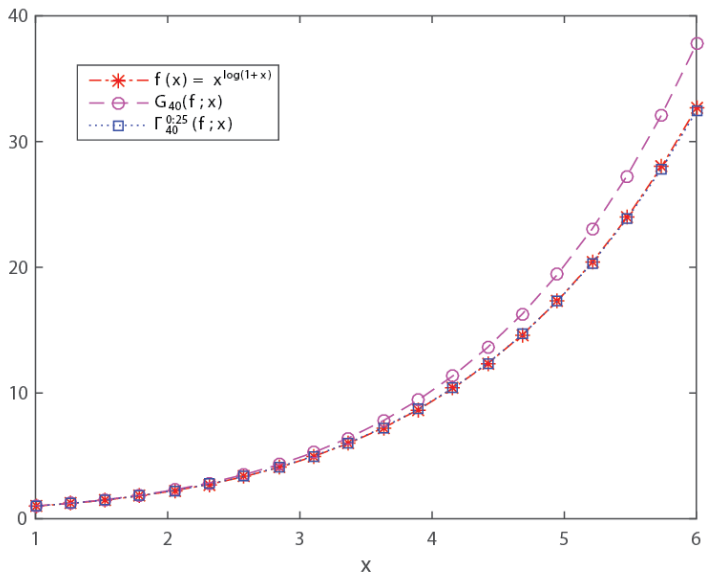
Yukarıdaki grafikte klasik Gamma operatörü, yeni tanımlanan Gamma operatörü ve yaklaşılmak istenen fonksiyon görülmektedir. Test fonksiyonu olarak $f(x) = x^{\log(1+x)}$ kırmızı yıldız ile, klasik Gamma operatörü G_n mor çemberli şerit ile, yeni tanımlanan Gamma operatörü Γ_n^{μ} ise mavi kare şerit ile gösterilmiştir. Aynı $n = 40$ değeri alınmasına rağmen yeni tanımlanan Gamma operatöründe bulunan $\mu = 0.3$ olarak alınmıştır. Yeni tanımlanan Gamma operatörü, amaçlanan fonksiyona klasik Gamma operatöründen daha yakın olup daha iyi bir yaklaşım sunar.

Örnek 4.6.1.2.

Aşağıdaki grafikte ise $\mu = 0{,}3$ ve $n = 1, 5, 10, 20, 40$ değerleri göz önüne alınmıştır. Test fonksiyonu olarak $f(x) = x^4 log(1 + x^2)$ kırmızı yıldız şerit ile gösterilmiştir. Yeni tanımlanan Gamma operatörlerinde n değerleri arttıkça amaçlanan fonksiyona yaklaşım, klasik Gamma operatörüne göre çok daha iyidir.

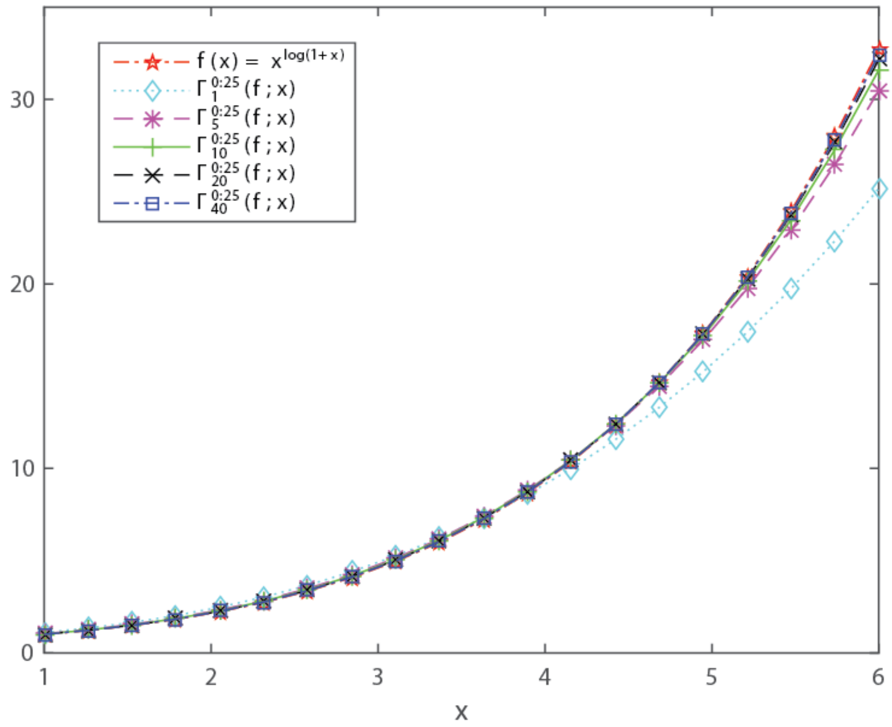


Örnek 4.6.1.3.



Şimdi ise test fonksiyonu olarak $f: [1,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{log(1+x)}$ alalım. Aynı $n = 40$ değeri ve $\mu = 0{,}25$ alınmıştır. Bu grafikte; yeni tanımlanan Gamma operatörleri olan (Γ_n^{μ}) lineer pozitif operatörler dizisi, klasik Gamma operatörü olan (G_n) lineer pozitif operatörüne göre daha iyi yaklaşmaktadır.

Örnek 4.6.1.4.



Son grafikte ise; n değerleri arttıkça yeni tanımlanan Gamma operatörleri olan (Γ_n^{μ}) lineer pozitif operatörler dizisinin hedeflenen fonksiyona daha çok yaklaştığı görülür. Artan $n = 1, 5, 10, 20, 40$ değerleri ve $\mu = 0{,}25$ değeri alınmıştır.

KAYNAKLAR

Acar, T., Aral, A. ve Gonska, H., 2017, On Szász-Mirakyan operators preserving $e^{ax}, x > 0$, *Mediterranean J. Math*., 14(1), 6-14.

Acar, T., Aral, A., Morales, D.C. ve Garrancho, P., 2017, Szasz-Mirakyan type operators which fix exponentials, *Results Math.*,,72(3), 93-104.

Altomera, F. ve Campiti, M., 1994, Korovkin type Approximation Theory and its Applications, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Balcı, M., 2012, Genel Matematik-1, Sürat Üniversite Yayınları, İzmir.

Bayraktar, M., 2017, Fonksiyonel Analiz, Korza Yayıncılık, Ankara.

Bernstein, S. N., Demonstation du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul de probablities, *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 1912, 13, 1-2.

Boyanov, B. D., Veselinov, V. M., 1970, A note on the approximation of functions an infinite interval by linear positive operators, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Anal.*, 14(62), 9-13.

Durrmeyer, J. L., 1967Une formule d'inversion de la Transformee Laplace, applications a la Theorie des Moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciences de I' Universite de Paris.

Gadziev, A. D., 1976, Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems, *Mat Zametki*, (20)5, 781-786.

Gadziev, A.D. ve İspir, N., 1999, 'On a Sequence of Linear Positive Operators in Weighted Spaces', *Proc. Inst. Math. Mech.*, 11, 45-56.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Hacıyev, A.D., 1995, , Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

Holhos, A., 2008, The rate of convergence of positive linear operators in weighted spaces, *Automat. Comput. Appl. Math.*, 17(2), 239-246.

İspir, N., 2002, Szász Tipi Operatörlerle Polinom Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım, Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 3(3), 421-425.

Kantorovich, L. V., 1930, Sur certains developments suivant les polynomes de la forms de S. Bernstein I, II, Dokal Akad Nauk SSSR, 595-600, 563-568.

Karsli, H., 2007, Rate of Convergence of New Gamma Type Operators for Functions with Derivatives of Bounded Variation, *Math. Comput. Modelling.*,, 617-624.

Karsli, H., Ozarslan, M. A., 2010, Direct local and global approximation results for operators of gamma type, *Hacettepe J. Math. Stat.*, 241-253.

Kocak, M., 2011, Genel Topolojie Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Kampüs Yayıncılık, Eskişehir.

Korovkin, P. P., On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, DOKL. Akad. Nouk. SSR, 1959, 90, 961-964.

Lindstrom, T. L., 2017, Spaces An Introduction to Real Analysis, American Mathematical Society, America.

Lorentz, G. G., 1953, Bernstein Polynomials, University of Toronto Press, Toronto.

Lupas, A., Müller, M., 1967, Approximations eigenschaften der Gamma operatoren, *Math. Hung.*, 98, 208-226.

Maddox, I. J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University press, Cambridge.

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, USA.

Szász, O. M., 1950, Generalizations of S. Bernstein' s polynomial to the infinite interval, J. Res. Nat. Bur. Standars. 45, 239-245.

Weierstrass, K. Ülber die analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Functionen einer reelen Veranderlichen. *Sitzunger. Akad.* Berlin, 1885, 633-639, 789-805.

Zeng, X. M., 2005, Approximation properties of Gamma operators, *Journal of Mathematical Analysis and Application,* 389-401.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Şerife Nur KARAMAN
Uyruğu	**:**	Türkiye
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Karatay – 1996
Telefon	**:**	0534 254 28 30
Faks	**:**	
e-mail	**:**	serifenur.deveci@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Atatürk Anadolu Sağlık Meslek Lisesi, Selçuklu, Konya**	**2010-2014**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2014-2018**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2018- Halen**

TEZDEN ÇIKAN MAKALELER

Deveci, S. N., Acar, T., Alagoz, O., 2020, Approximation by Gamma Type Operators, Mathematical Methods in the Applied Sciences.

Acar, T., Morsaleen, M., Deveci, S. N., 2020, Gamma Operators Reproducing Exponential Functions, Advances in Difference Equations.