ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FIBONACCI DİZİLERİ VE FIBONACCI MATRİSLERİNİN DETERMİNANTLARI, NORMLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

HASAN HÜSEYİN GÜLEÇ

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Galip OTURANÇ
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışmada, Fibonacci sayıları ile ilgili tanımlar verilmiş ve bu sayıların sağladığı özellikler incelenmiştir. Ayrıca, Fibonacci ve Lucas sayılarından elde edilen matrislerin determinantları üzerinde durulmuş ve Fibonacci sayılarından oluşan bazı matrislerin normları incelenmiştir. Daha sonra Fibonacci sayı dizisi ile ilgili yeni özellikler verilmiş ve başka bir sınır şartı tanımlanarak elde edilen matrislerin determinantları incelenmiştir.

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON THE DETERMINANTS, NORMS OF FIBONACCI SEQUENCE AND FIBONACCI MATRICES

HASAN HÜSEYİN GÜLEÇ

SELCUK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Galip OTURANÇ
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

In this study, we have given the definitions of related the Fibonacci numbers and we have investigated the properties of this numbers. Furthermore, we have studied on determinants of matrices which is involved Fibonacci and Lucas numbers and we have investigated norms of some matrices which is depend on Fibonacci numbers. After we have given new properties related with the Fibonacci sequence and we have investigated determinants of matrices which is obtained using different boundary conditions.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Fibonacci sayıları ile ilgili tanımlar verilmiş ve bu sayıların sağladığı özellikler incelenmiştir. Ayrıca, Fibonacci ve Lucas sayılarından elde edilen matrislerin determinantları üzerinde durulmuş ve Fibonacci sayılarından oluşan bazı matrislerin normları incelenmiştir. Daha sonra Fibonacci sayı dizisi ile ilgili yeni özellikler verilmiş ve başka bir sınır şartı tanımlanarak elde edilen matrislerin determinantları incelenmiştir.

Birinci bölümde, Fibonacci sayılarının tarihçesinden bahsedilmiş ve bu sayılarla ilgili yapılmış olan çalışmaların oluşturduğu literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde, Fibonacci sayıları ve Fibonacci dizisi tanımları verilip, bu sayılarla ilgili diğer gerekli olan bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas sayılarından elde edilen matrislerin determinantları incelenmiş ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Daha sonra Fibonacci sayılarıyla oluşturulan bazı matrislerin normları üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde ise, Fibonacci sayı dizisinin sağladığı yeni özellikler bulunmuştur. Ayrıca, yeni sınır şartları tanımlanarak oluşturulan matrislerin determinantları incelenmiştir.

Bu çalışmada emeği geçen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya, çalışmam boyunca desteğini hiç esirgemeyen aileme ve katkılarından dolayı Sayın Halil MAZLUM'a teşekkür ederim.

Hasan Hüseyin GÜLEÇ
2007

İÇİNDEKİLER

I. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci 12.-13. yüzyıllarda yaşamış İtalyan matematikçidir. Pisa şehrinde doğan Leonardo çocukluğunu Cezayir`de geçirmiştir. İlk matematik bilgilerini Müslüman eğitimcilerden almış olup küçük yaşta Arap sayı sistemini öğrenmiştir. Ülkesindeki kullanılan roma sisteminin hantallığı yanında Arap sayı sisteminin mükemmelliğini gören Fibonacci 1201'de "Liber Abaci" isimli kitabını yazmıştır. Bu kitap Arap sayı sisteminin batı Avrupa'ya girmesinde büyük rol oynamıştır. Bu kitapta bulunan bir problem, ortaçağ matematiğine büyük katkılarda bulunan Fibonacci'yi 600 yıl sonra 19. yüzyılın başlarından günümüze meşhur hale gelmesine sebep olmuştur.

Bu problem "Tavşan Problemi'dir. Ergin bir tavşanın her ay yeni bir yavru çifti verdiği ve yeni doğan bir çiftin bir ay zarfında erginliğe eriştiği varsayımıyla yavru olan bir tavşan çiftinden başlayıp bir yılda çiftlerin sayısı ne olur? Buna göre belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir (aylara göre üremeyi gösteren çizelge yorum yapmayı kolaylaştıracaktır). O halde tavşan çifti sayıları aylara göre bir yıl içinde 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olacaktır. Fibonacci kendisi bu sayı dizisi üzerinde bir çalışma yapmamıştır. Hatta bu sayı dizisi üzerinde 19. yüzyılın başlarına kadar ciddi bir araştırma yapılmadığı da belirtilmektedir. Ancak bundan sonra bu dizi üzerinde yapılan araştırma sayısı Fibonacci'nin tavşanlarının sayısı gibi artmıştır. Hatta Fibonacci Derneği bile kurulmuştur. Bu derneğin 1963 yılından bu yana yayınladığı dergide (the Fibonacci Quarterly) bu sayı dizisi ile ilgili yapılan ilginç araştırmalar yayınlanmaktadır. Bazısı bilinen, bazısı öne sürülüp ispatlanamayan ve bilinmeyip keşfedilmesi beklenen birçok özelliğe sahip Fibonacci dizileri hala birçok matematikçi tarafından araştırılmaktadır.

Son yıllarda Fibonacci sayıları ile ilgili çok araştırma yapılmıştır. Kalman [2], genelleştirilmiş Fibonacci dizileri ve matrisleri gösterimini tanımlamış ve bu sayılar yardımıyla tanımlanan matrisleri kullanarak, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için yeni bir formül vermiştir. Er [3], [2]'de tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci dizileri ve matrisleri gösterimini genişletmiş ve bu gösterimi kullanarak, doğrudan elde edilen Fibonacci sayılarının toplamını göstermiştir. Lee [4], $g_n^{(k)}$ Fibonacci sayıları ile $l_n^{(k)}$ Lucas sayıları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Takahashi [5], büyük dereceli

Fibonacci sayılarını hesaplamak için Lucas'ın çözümlerine dayanan hızlı bir algoritma geliştirmiştir. Ayrıca Lucas sayıları algoritmasındaki adım sayısı bu çalışmayla daha aza indirgenmiştir. Karaduman [6] ve [7], genelleştirilmiş mertebesi k olan Fibonacci sayılarının (k) serisinden elde edilen matrislerin determinantlarını araştırmıştır. Taşçı ve Kılıç [8], matrislerde Lucas sayılarının yeni bir genellemesini vermiştir. Aynı zamanda k. mertebeden genelleştirilmiş Lucas dizileri ve Fibonacci dizileri arasındaki ilişkiyi sunmuştur. Öcal, Tuğlu ve Altınışık [9], k genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının kararlı ve sürekli bir temsilini vermiştir. Aynı zamanda bu diziler için Binet formülünü elde etmiştir.

Bu çalışmada, Fibonacci sayıları ile ilgili tanımlar verilmiş ve bu sayıların sağladığı özellikler incelenmiştir. Ayrıca, Fibonacci ve Lucas sayılarından elde edilen matrislerin determinantları üzerinde durulmuş ve Fibonacci sayılarından oluşan bazı matrislerin normları incelenmiştir. Daha sonra Fibonacci sayı dizisi ile ilgili yeni özellikler verilmiş ve başka bir sınır şartı tanımlanarak elde edilen matrislerin determinantları incelenmiştir.

II. FIBONACCI SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ

2.1. Fibonacci Sayıları

Tanım 2.1.1. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

şeklinde tanımlanan sayılara ***Fibonacci Sayıları*** denir. Bazı Fibonacci sayıları,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

tabloda görüldüğü gibidir. Fibonacci sayılarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $n \in Z^+$ için $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

2. $n \in Z^+$ için $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

3. $m, n \in Z^+$ için $F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{m+n+1}$

4. $m, n, r \in Z^+$ için $F_{m+n-2} F_{m+r-1} - F_{m+n-1} F_{m+r-2} = (-1)^{m+r-2} F_{n-r}$

5. $n \in Z^+$ için $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

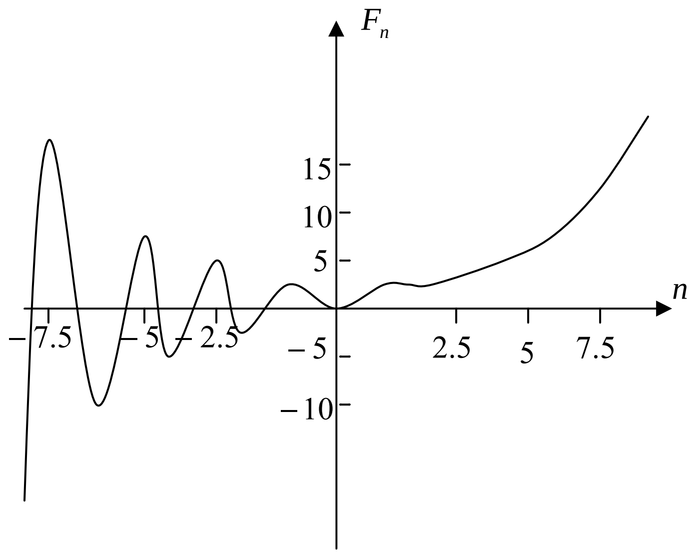
dir. Böylece kapalı form

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

olarak verilir ve bu formül Binet Fibonacci formülü olarak bilinir. [.] nint fonksiyonu ve ϕ altın oran olmak üzere, başka bir kapalı form ise

$$F_n = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right]$$

dir. Aşağıdaki şekil 2.1.1 de Fibonacci sayılarının seyri gösterilmektedir.



Şekil 2.1.1

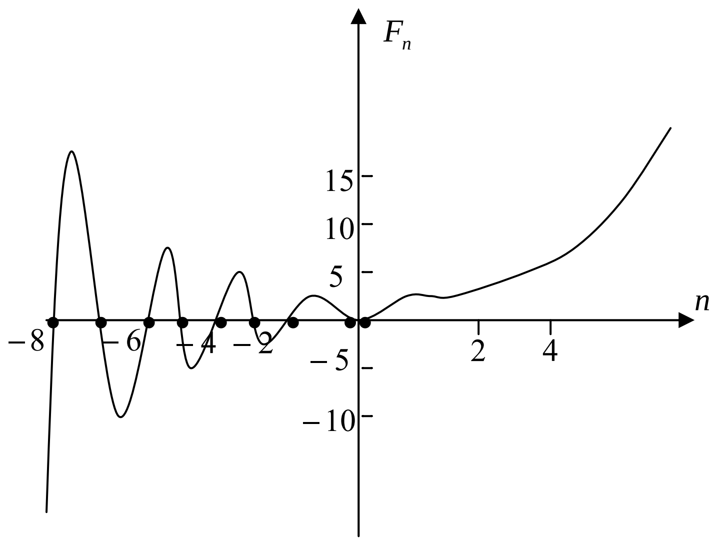
Negatif Fibonacci sayıları,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

eşitliği ile bulunur. Fibonacci sayılarını daha genel olarak,

$$F_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu - \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^\nu \cos(\nu\pi)\right]$$

şeklinde yazabiliriz.



Şekil 2.1.2

Fibonacci fonksiyonu $x=0$ da ve bütün n negatif tamsayıları için $n+0.5$ olacak şekildeki sonsuz sayıdaki negatif değerler de sıfır çözümüne sahiptir. Buradaki çözümler, ϕ altın oran olmak üzere

$$\phi^{2x} = \cos(\pi x)$$

olarak verilir. İlk birkaç kök;

$$0,\ x = -0.183802...,\ -1.570776...,\ -2.470426...,\ -3.510851...,\ ...$$

şeklindedir.

Fibonacci sayıları için, [.] tam değer fonksiyonu ve ϕ altın oran olmak üzere

$$F_{n+1} = \left[\frac{F_n(1+\sqrt{5})+1}{2}\right] = \left[\phi F_n + 1/2\right]$$

eşitliği geçerlidir. $k>2$ için

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & \cdots & F_{n+k} \\ F_{n+k+1} & F_{n+k+2} & \cdots & F_{n+2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n+k(k-1)+1} & F_{n+k(k-1)+2} & \cdots & F_{n+k^2} \end{vmatrix} = 0$$

dir. Özel olarak, $k=1$ için bu determinantın değeri F_{n+1} dir. Ayrıca, $|i-j|=1$ için elemanları $a_{ii}=1$ ve $a_{ij}=\sqrt{-1}$ olacak şekilde tanımlanan A_n matrisi için

$$\det(A_n) = F_{n+1}$$

dir.

Tanım 2.1.2. Tanım 2.1.1 ile verilen sayıların oluşturduğu sayı dizisine ***Fibonacci dizisi*** denir. Fibonacci dizisinin temel özelliği dizideki sayılardan her biri kendinden önce gelen iki sayının toplamıdır.

Fibonacci sayılarının bir diğer önemli özelliği ise dizideki bir terimin kendisinden önceki terime oranının altın oran denilen ve irrasyonel bir sayı olan $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$=1,61803398... sayısına dizininin terimleri ilerledikçe yakınsamasıdır ve 15. terimden sonra maksimum yakınsamayı vermesidir. 15. terimden sonraki her terim, kendisinden önceki terime bölündüğünde bu oranı vermektedir. Fibonacci dizisinin ilginç bir özelliği de üçüncü, altıncı, dokuzuncu,… terimlerinin 2'nin katı oluşudur. Yani, dizinin her üç teriminden biri, periyodik olarak, 2'nin katıdır.

Tanım 2.1.3. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n-1} \in C$ ve $H_n = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisi olsun H_n (i, j). elemanı $a_{ij} = \alpha_{i+j-1}$ ise H_n matrisine ***Hankel matrisi*** denir. Hankel matrisini açık yazacak olursak,

$$H_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots & \alpha_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \cdots & \alpha_{2n-1} \end{bmatrix}$$

olur.

Tanım 2.1.4. $A = (a_{ij})$ bir kare matris olsun. Eğer A matrisinin (i, j). elemanı $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ şeklinde tanımlı ise, A matrisine ***Hilbert matrisi*** denir. Yani,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad A_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 2.1.5. (a_k), $k \geq 1$ için $a_k \neq 0$ olacak şekilde bir tamsayı dizisi olsun. (i, j). elemanı $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{i+j+1}}$ olan matrise (a_k) dizisine bağlı ***Reciprocal Hankel matrisi*** denir ve $R_n(a_k)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. F_k, k. Fibonacci sayısı olmak üzere (F_k) dizisinden elde edilen $R_n(F_k)$ Reciprocal Hankel matrisine ***Filbert matrisi*** denir.

Tanım 2.1.7. F_n, n. Fibonacci sayısı ve k pozitif tamsayı olmak üzere

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{F_{n-i+1}}{F_i}$$

şeklinde tanımlı sayılara ***Fibonomial katsayılar*** denir.

Tanım 2.1.8. F_k, k. Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$t_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \ (a \in IR) \\ \dfrac{1}{F(i-j)} & i \neq j \end{cases}$$

eşitliğinden elde edilen elemanlarla oluşturulan matrise ***FToeplitz matris*** denir [10].

Tanım 2.1.9. F_k, k. Fibonacci sayısı ve H_n $n \times n$ bir kare matris olmak üzere, elemanları

$$h_{ij} = 1/(F_i + F_j)$$

olacak şekilde tanımlanan H_n matrisine ***hemen hemen FHankel matris*** denir [10].

Tanım 2.1.10. $j - i > 1$ için $a_{ij} = 0$ ise, $A_n = (a_{ij})$ $n \times n$ matrisine ***alt Hessenberg matris*** denir. Yani,

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

dir [9].

Örnek 2.1.1. $R_3(F_k)$ Filbert matrisi

$$R_3(F_k)=\begin{bmatrix} \frac{1}{F_1} & \frac{1}{F_2} & \frac{1}{F_3} \\ \frac{1}{F_2} & \frac{1}{F_3} & \frac{1}{F_4} \\ \frac{1}{F_3} & \frac{1}{F_4} & \frac{1}{F_5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

dir.

$A_n=(a_{ij})$, bir $n\times n$ hilbert matrisi olmak üzere

$$\det A_n=\frac{(1!2!\cdots(n-1)!)^4}{1!2!\cdots(2n-1)!}$$

dır. Buradan Hilbert matrisinin tersinin bulunduğu açıkça görülmektedir.

B_n, (i,j). elemanı,

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}(i+j)\binom{n+i-1}{n-j}\binom{n+j-1}{n-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2$$

şeklinde tanımlanan $n\times n$ bir kare matris olsun. Bu takdirde $B=(\alpha_{ij})$, Hilbert matrisinin tersidir.

Örnek 2.1.2. Aşağıda Hilbert martinin tersine örnekler verilmiştir.

$$B_2=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & 4200 \\ -140 & 1680 & 4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

Örnek 2.1.3. Bazı fibonomial katsayı örnekleri aşağıdaki gibidir.

$$\left(\binom{0}{0}\right)=1 \quad , \quad \left(\binom{n}{0}\right)=1$$

$$\left(\binom{3}{2}\right)=\prod_{i=1}^{2}\frac{F_{3-i+1}}{F_i}=\frac{F_3F_2}{F_1F_2}=2$$

$$\left(\!\!\binom{5}{3}\!\!\right) = \prod_{i=1}^{3} \frac{F_{5-i+1}}{F_i} = \frac{F_5 F_4 F_3}{F_1 F_2 F_3} = \frac{5.3.2}{1.1.2} = 15$$

$W(n)$, (i, j). elmanı,

$$w_{ij}(n) = (-1)^{e(n,i,j)} F_{i+j-1} \left(\left(\!\!\binom{n+i-1}{n-j}\!\!\right) \left(\!\!\binom{n+j-1}{n-i}\!\!\right) \left(\!\!\binom{i+j-2}{i-1}\!\!\right) \right)^2$$

şeklinde tanımlı $n \times n$ bir kare matris olsun. Bu takdirde $W(n) = (w_{ij}(n))$ matrisi $R_n(F_k)$ Filbert matrisinin tersidir ve $w_{ij}(n)$ elemanları birer tamsayıdır. Burada

$$e(n,i,j) = n(i+j+1) + \binom{i}{2} + \binom{j}{2} + 1$$

biçiminde tanımlıdır.

Örnek 2.1.4. $W(2) = (w_{ij}(2))$ matrisini bulalım.

$$w_{ij}(2) = (-1)^{e(2,i,j)} F_{i+j-1} \left(\left(\!\!\binom{2+i-1}{2-j}\!\!\right) \left(\!\!\binom{2+j-1}{2-i}\!\!\right) \left(\!\!\binom{i+j-2}{i-1}\!\!\right) \right)^2$$

$$w_{11}(2) = (-1)^{e(2,1,1)} F_1 \left(\left(\!\!\binom{2}{1}\!\!\right) \left(\!\!\binom{2}{1}\!\!\right) \left(\!\!\binom{0}{0}\!\!\right) \right)^2 = (-1)^7 F_1 F_2^2 = -1$$

$$w_{12}(2) = (-1)^{e(2,1,2)} F_2 \left(\left(\!\!\binom{2}{1}\!\!\right) \left(\!\!\binom{3}{0}\!\!\right) \left(\!\!\binom{1}{0}\!\!\right) \right)^2 = (-1)^{10} F_2 F_3 = 2$$

$$w_{22}(2) = (-1)^{e(2,2,2)} F_2 \left(\left(\!\!\binom{3}{0}\!\!\right) \left(\!\!\binom{3}{0}\!\!\right) \left(\!\!\binom{2}{1}\!\!\right) \right)^2 = (-1)^{13} F_3 F_2^2 = -2$$

$$W(2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

olur. Gerçekten,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & -1+1 \\ 2-2 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

III. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARIYLA ELDE EDİLEN MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI VE NORMLARI

3.1. Fibonacci Sayılarıyla Oluşturulan Bazı Matrislerin Determinantları

Bu bölümde Fibonacci sayılarından elde edilen bazı matrisler ve genelleştirilmiş *k*. mertebeden Fibonacci sayılarının *k* dizisinden elde edilen matrislerin determinantlarını inceleyeceğiz.

Genelleştirilmiş *k*. mertebeden Fibonacci sayılarının *k* dizisi, $1 \le j \le k$ için c_j, katsayı sabiti olmak üzere

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}, \; 1-k \le n \le 0$$

sınır şartıyla birlikte,

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \;, \; n > 0, \; 1 \le i \le k \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır. g_n^i, *i*. dizinin *n*. terimidir. $k = 2$ ve $c_j = 1$ için genelleştirilmiş *k*. mertebeden Fibonacci dizisi geleneksel Fibonacci dizisine indirgenir [3].

A, $k \times k$ kare matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır [2].

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan matris çarpımının bir özelliğinden,

$$\left[\; g_{n+1}^i g_n^i \cdots g_{n-k+2}^i \;\right]^T = A\left[\; g_n^i g_{n-1}^i \cdots g_{n-k+1}^i \;\right]^T \tag{3}$$

olur. Bununla beraber genelleştirilmiş *k*. mertebeden Fibonacci dizisinin *k* dizisiyle çalışmak için aşağıdaki G_n kare matrisini alalım [3].

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

(3) denkleminden,

$$G_{n+1} = AG_n \tag{4}$$

elde edilir. Daha sonra bazı n'ler için

$$n=1 \text{ için} \quad G_2 = AG_1$$
$$n=2 \text{ için} \quad G_3 = AG_2$$
$$n=3 \text{ için} \quad G_4 = AG_3$$
$$\vdots$$

olur ve buradan

$$G_3 = AG_2 = A(AG_1) = A^2G_1$$
$$G_4 = AG_3 = A(A^2G_1) = A^3G_1$$
$$G_5 = AG_4 = A(A^3G_1) = A^4G_1$$
$$\vdots$$
$$G_n = AG_{n-1} = A(A^{n-2}G_1) = A^{n-1}G_1$$
$$G_{n+1} = AG_n = A(A^{n-1}G_1) = A^nG_1$$
$$G_{n+1} = A^nG_1 \tag{5}$$

bulunur. Şimdi (2) denkleminden $G_1 = A$ olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten $n=1$ için,

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^k \\ g_0^1 & g_0^2 & g_0^3 & \cdots & g_0^k \\ g_{-1}^1 & g_{-1}^2 & g_{-1}^3 & \cdots & g_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{-k+3}^1 & g_{-k+3}^2 & g_{-k+3}^3 & \cdots & g_{-k+3}^k \\ g_{-k+2}^1 & g_{-k+2}^2 & g_{-k+2}^3 & \cdots & g_{-k+2}^k \end{bmatrix}$$

dir. Buradan G_1 matrisinin elemanlarını (2) denklemini kullanarak bulalım. (2) denklemindeki verilen sınır şartından:

$n=0$ için, $g_0^1=1$ dir. $i=1$ olduğundan, $g_0^2=0, g_0^3=0, g_0^4=0, \cdots, g_0^k=0$

$n=-1$ için, $g_{-1}^2=1$ dir. $i=2$ olduğundan, $g_{-1}^1=0, g_{-1}^3=0, g_{-1}^4=0, \cdots, g_{-1}^k=0$

$n=-2$ için, $g_{-2}^3=1$ dir. $i=3$ olduğundan, $g_{-2}^1=0, g_{-2}^2=0, g_{-2}^4=0, \cdots, g_{-2}^k=0$

$\vdots$

$n=3-k$ için, $g_{-k+3}^{k-2}=1$ dir. $i=k-2$ olduğundan, $g_{-k+3}^1=0, \cdots, g_{-k+3}^{k-1}=0, g_{-k+3}^k=0$

$n=2-k$ için, $g_{-k+2}^{k-1}=1$ dir. $i=k-1$ olduğundan, $g_{-k+2}^1=0, \cdots, g_{-k+2}^{k-2}=0, g_{-k+2}^k=0$

$n=1-k$ için, $g_{-k+1}^k=1$ dir. $i=k$ olduğundan, $g_{-k+1}^1=0, \cdots, g_{-k+1}^{k-2}=0, g_{-k+1}^{k-1}=0$

dir. Şimdi bulunan bu elemanları (2) denkleminde yerine yazalım. Birinci satır için,

$$g_1^i=\sum_{j=1}^{k} c_j g_{1-j}^i, \quad n=1, \quad 1\le i\le k$$

olur. Buradan da birinci satır elemanları,

$$g_1^1=c_1g_0^1+c_2g_{-1}^1+c_3g_{-2}^1+\cdots+c_{k-1}g_{-k+2}^1+c_kg_{-k+1}^1 \qquad \Rightarrow \qquad g_1^1=c_1$$

$$g_1^2=c_1g_0^2+c_2g_{-1}^2+c_3g_{-2}^2+\cdots+c_{k-1}g_{-k+2}^2+c_kg_{-k+1}^2 \qquad \Rightarrow \qquad g_1^2=c_2$$

$$g_1^3=c_1g_0^3+c_2g_{-1}^3+c_3g_{-2}^3+\cdots+c_{k-1}g_{-k+2}^3+c_kg_{-k+1}^3 \qquad \Rightarrow \qquad g_1^3=c_3$$

$$\vdots$$

$$g_1^{k-1}=c_1g_0^{k-1}+c_2g_{-1}^{k-1}+c_3g_{-2}^{k-1}+\cdots+c_{k-1}g_{-k+2}^{k-1}+c_kg_{-k+1}^{k-1} \qquad \Rightarrow \qquad g_1^{k-1}=c_{k-1}$$

$$g_1^k=c_1g_0^k+c_2g_{-1}^k+c_3g_{-2}^k+\cdots+c_{k-1}g_{-k+2}^k+c_kg_{-k+1}^k \qquad \Rightarrow \qquad g_1^k=c_k$$

olarak elde edilir. İkinci satırda $g_0^1=1$, diğer elemanlar sıfırdır. Üçüncü satırda $g_{-1}^2=1$, diğer elemanlar sıfırdır. Dördüncü satırda $g_{-2}^3=1$, diğer elemanlar sıfırdır. Bu şekilde devam ederek, $(k-1)$. satırda $g_{-k+3}^{k-2}=1$, diğer elemanlar sıfırdır ve k. satırda da $g_{-k+2}^{k-1}=1$, diğer elemanlar sıfırdır.

O halde, bulunan elemanlar G_1 matrisinde yerine yazılırsa,

$$G_1 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

elde edilir. Bu nedenle (4) ve (5) denklemlerinden $G_n = A^n$ olduğu görülür. Buradan

$$G_{n+1} = G_n G_1 = G_1 G_n$$

veya (6)

$$G_{n+1} = A^{n+1}$$

olur. Başka bir deyişle G_1, matris çarpımı altında değişmelidir. Böylece,

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{i} &= c_i g_n^1 + g_n^{i+1} \quad , \; 1 \le i \le k-1 \\ g_{n+1}^{k} &= c_k g_n^1 \end{aligned} \tag{7}$$

yazılabilir ve (6) denklemi daha genel olarak

$$G_{r+c} = G_r G_c$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak, G_{r+c} 'nin bir elemanı G_r 'nin bir satırı ve G_c 'nin bir sütununun çarpımıdır. Yani,

$$g_{r+c}^{i} = \sum_{j=1}^{k} g_r^j g_{c-j+1}^i$$

dir. Özellikle, $r = c = n$ ise $G_{2n} = G_n^2$ dir.

Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayılarının toplamı, $n \ge 0$ için

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} g_i^1 \tag{8}$$

şeklinde tanımlanır [3]. B, $(k+1)\times(k+1)$ kare matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & A & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

Ayrıca E_n, $(k+1)\times(k+1)$ kare matrisi de,

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_{n-1} & & & & \\ S_{n-2} & & G_n & & \\ \vdots & & & & \\ S_{n-k} & & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. Buradan

$$S_{n+1} = g_{n+1}^1 + S_n \tag{9}$$

olur. (7) ve (9) denklemlerinden

$$E_{n+1} = E_n B \tag{10}$$

$$E_{n+1} = E_1 B^n \tag{11}$$

elde edilir. $1 \le i \le k$ için $S_{-i} = 0$ olduğundan $E_1 = B$ ve genel olarak $E_n = B^n$ olur. Buradan (10) ve (11) denklemlerinden

$$E_{n+1} = E_1 E_n = E_n E_1 \tag{12}$$

olduğu görülür ki, E_1 matris çarpımı altında değişmelidir. (12) denkleminin bir uygulaması olarak genelleştirilmiş *k*. mertebeden Fibonacci sayılarının toplamı;

$$S_n = 1 + \sum_{i=1}^{k} S_{n-i} \tag{13}$$

denklemini sağlar [3]. Buradan

$$g_n^1 = 1 + \sum_{i=2}^{k} S_{n-i} \tag{14}$$

olup, $k = 2$ olduğunda (14) denklemi

$$g_n^1 = 1 + S_{n-2}$$

olur. Eğer (2) denkleminde $c_1 = c_2 = 1$ ise,

$$F_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} F_i \tag{15}$$

iyi bilinen sonucu elde edilir [1]. Burada, F_n standart Fibonacci dizisinin *n*. terimidir.

Teorem 3.1.1.

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & aksi\,halde \end{cases}, \; 1-k \le n \le 0$$

sınır şartıyla birlikte,

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \;,\; n > 0,\; 1 \le i \le k$$

olmak üzere, eğer $c_j = 1$ ve

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

ise

$$\det G_n = \begin{cases} (-1)^n, & k \;\; çift \;\; ise \\ \;\;1 \;\;\;\;, & k \;\; tek \;\; ise \end{cases}$$

dir [6].

İspat: Her *k* için

$$G_1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi, $(k-1)$ adım elementer satır işlemlerinden sonra aşağıdaki üçgen matris formuna dönüşür:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bu yüzden $\det G_1 = \det A = 1.(-1)^{k-1}$ dir. Diğer taraftan $G_n = A^n$ olduğundan

$$\begin{aligned} \det G_n &= (\det A)^n \\ &= ((-1)^{k-1})^n \end{aligned} \tag{16}$$

olur. Bundan dolayı eğer k çift ise $(k-1)$ tek olacağından $(-1)^{k-1} = -1$ olur. Bu nedenle (16) denkleminden $\det G_n = (-1)^n$ olur. Eğer k tek ise $(k-1)$ çift olacağından $(-1)^{k-1} = 1$ olur ve (16) denkleminden $\det G_n = 1$ olur. □

Şimdi (2) denklemindeki $n > 0$ şartını hesaba katmazsak, genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayılarının k dizisi, $1 \le j \le k$ için c_j, katsayı sabiti olmak üzere

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & aksi\,halde \end{cases}, \; 1-k \le n \le 0$$

sınır şartıyla birlikte,

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \;, \quad 1 \le i \le k \tag{17}$$

şeklinde tanımlanır. Burada g_n^i, i. dizinin n. terimidir. $k = 2$ ve $c_j = 1$ için genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci dizisi $g_0^1 = 1$, $g_1^1 = 1$ şartları ile geleneksel Fibonacci dizisine indirgenir.

Aşağıdaki $k \times k$ G_n, B ve C kare matrislerinin gösterimleri şöyledir [6]:

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{k-2} & 2^{k-1} \\ 2^0 & 2^0 & 2^1 & \cdots & 2^{k-3} & 2^{k-2} \\ 0 & 2^0 & 2^0 & \cdots & 2^{k-4} & 2^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^0 & 2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^0 & 2^0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi $G_1 = B$ olduğu (17) denkleminden açıkça görülebilir. Sonra da tümevarımla,

$$G_{n+1} = BC^n \tag{18}$$

yazılabilir. Fakat *B*, matris çarpımı altında değişmeli değildir.

Teorem 3.1.2. Eğer,

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

ise

$$\det G_n = \begin{cases} 1 \;, & k \ tek \ ise \\ (-1)^n, & k \ çift \ ise \end{cases}$$

dir [6].

İspat: $G_n = G_1 C^{n-1} = BC^{n-1}$ olduğundan

$$\det G_n = \det G_1 (\det C)^{n-1} \tag{19}$$

Böylece $(k-1)$ basamağı elementer satır işlemlerinden sonra G_1, aşağıdaki üçgen matris formuna dönüşür:

$$\begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{k-2} & 2^{k-1} \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -2^{k-3} & -2^{k-2} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -2^{k-4} & -2^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -2^0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bu yüzden $\det G_1 = 1 \cdot (-1)^{k-1}$ olur. Bununla birlikte C 'nin diğer dizileriyle birlikte ilk dizisinin yerini alan C aşağıdaki üçgen matris formuna indirgenir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylece $\det C = (-1)^{k-1}$ olur. (19) denkleminden $\det G_n = (-1)^{k-1}((-1)^{k-1})^{n-1}$ olur. Diğer taraftan k çift ise $(-1)^{k-1} = -1$, eğer k tek ise $(-1)^{k-1} = 1$ elde edilir. Bu yüzden,

$$\det G_n = \begin{cases} 1 \ , & k \ \ tek \ \ ise \\ (-1)^n, & k \ \ çift \ \ ise \end{cases}$$

dir. □

Böylece (2) ve (17) denklemlerinden, $n > 0$ şartının G_n matrisinin determinantının değerini değiştirmediği görülür. Fakat bununla, G_1 matrisinin matris çarpımı altında değişmeli olup olmadığını bilemeyiz. Eğer $n > 0$ şartını göz ardı etmezsek, G_1 matrisi matris çarpımı altında değişmeli olur. Aksi takdirde olmaz.

Örnek 3.1.1. G_n, B ve C $k \times k$ kare matrisleri, 3×3 kare matris olsun. Bu taktirde G_n'in determinantı, k tek olduğu için 1 dir. Gerçekten,

g[t] : $G_{n+1} = BC^n$ matris çarpımındaki adım sayısı,

det (G[t]) : $G_1, G_2, \cdots, G_{10}$ matrislerinin determinantları,

G[t] : $G_1, G_2, \cdots, G_{10}$ matrisleri,

olmak üzere:

```
with(linalg):
B:=matrix(3,3,[1,2,4,1,1,2,0,1,1]);
C:=matrix(3,3,[0,0,1,1,0,1,0,1,1]);
G[1]:=B;
print(g[1],det(G[1]),G[1]);
for t from 2 to 10 do
G[t]:=multiply(G[t-1],C);
print(g[t],det(G[t]),G[t]);
od:
```

Maple programı çalıştırılırsa;

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; G_1 := B; \; g_1, 1, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_2, 1, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad g_3, 1, \begin{bmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \qquad g_4, 1, \begin{bmatrix} 7 & 13 & 24 \\ 4 & 7 & 13 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix};$$

$$g_5, 1, \begin{bmatrix} 13 & 24 & 44 \\ 7 & 13 & 24 \\ 4 & 7 & 13 \end{bmatrix}; \qquad g_6, 1, \begin{bmatrix} 24 & 44 & 81 \\ 13 & 24 & 44 \\ 7 & 13 & 24 \end{bmatrix}; \qquad g_7, 1, \begin{bmatrix} 44 & 81 & 149 \\ 24 & 44 & 81 \\ 13 & 24 & 44 \end{bmatrix};$$

$$g_8, 1, \begin{bmatrix} 81 & 149 & 274 \\ 44 & 81 & 149 \\ 24 & 44 & 81 \end{bmatrix}; \; g_9, 1, \begin{bmatrix} 149 & 274 & 504 \\ 81 & 149 & 274 \\ 44 & 81 & 149 \end{bmatrix}; \; g_{10}, 1, \begin{bmatrix} 274 & 504 & 927 \\ 149 & 274 & 504 \\ 81 & 149 & 274 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.2. G_n, B ve C $k \times k$ kare matrisleri 4×4 kare matris olsun. Bu taktirde G_n'in determinantı, k çift olduğu için $(-1)^n$ $(n = 0,1,2,3,\cdots)$ dir. Gerçekten,

g[t] : $G_{n+1} = BC^n$ matris çarpımındaki adım sayısı,

det (G[t]) : $G_1, G_2, \cdots, G_{10}$ matrislerinin determinantları,

G[t] : $G_1, G_2, \cdots, G_{10}$ matrisleri,

olmak üzere:

```
with(linalg):
B:=matrix(4,4,[1,2,4,8,1,1,2,4,0,1,1,2,0,0,1,1]);
C:=matrix(4,4,[0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1]);
G[1]:=B;
print(g[1],det(G[1]),G[1]);
for t from 2 to 10 do
G[t]:=multiply(G[t-1],C);
print(g[t],det(G[t]),G[t]);
od:
```

Maple programı çalıştırılırsa;

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; G_1 := B; g_1, -1, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$g_2, 1, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad g_3, -1, \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 & 29 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad g_4, 1, \begin{bmatrix} 8 & 15 & 29 & 56 \\ 4 & 8 & 15 & 29 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix};$$

$$g_5,-1,\begin{bmatrix}15 & 29 & 56 & 108\\ 8 & 15 & 29 & 56\\ 4 & 8 & 15 & 29\\ 2 & 4 & 8 & 15\end{bmatrix}; \qquad g_6,1,\begin{bmatrix}29 & 56 & 108 & 208\\ 15 & 29 & 56 & 108\\ 8 & 15 & 29 & 56\\ 4 & 8 & 15 & 29\end{bmatrix};$$

$$g_7,-1,\begin{bmatrix}56 & 108 & 208 & 401\\ 29 & 56 & 108 & 208\\ 15 & 29 & 56 & 108\\ 8 & 15 & 29 & 56\end{bmatrix}; \quad g_8,1,\begin{bmatrix}108 & 208 & 401 & 773\\ 56 & 108 & 208 & 401\\ 29 & 56 & 108 & 208\\ 15 & 29 & 56 & 108\end{bmatrix};$$

$$g_9,-1,\begin{bmatrix}208 & 401 & 773 & 1490\\ 108 & 208 & 401 & 773\\ 56 & 108 & 208 & 401\\ 29 & 56 & 108 & 208\end{bmatrix}; g_{10},1,\begin{bmatrix}401 & 773 & 1490 & 2872\\ 208 & 401 & 773 & 1490\\ 108 & 208 & 401 & 773\\ 56 & 108 & 208 & 401\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi (2) denkleminde, $c_j \neq 1$ olduğunda G_n 'nin determinantını araştıralım.

Teorem 3.1.3.

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}, \; 1-k \leq n \leq 0$$

sınır şartıyla birlikte,

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \,, \quad n > 0\,,\; 1 \leq i \leq k$$

olmak üzere, eğer

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

ise

$$\det G_n = \begin{cases} (-1)^n (c_k)^n, & k \;\; çift \;\; ise \\ (c_k)^n \;\;, & k \;\; tek \;\; ise \end{cases}$$

dir [7].

İspat: Her k için

$$G_1 = A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sırasıyla G_1 'in kalan sütunlarını G_1 'in k. sütunu ile yer değiştirirsek, G_1 matrisi,

$$\begin{bmatrix} c_k & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde üçgen matris formuna indirgenir. Buradan

$$\det G_1 = \det A = c_k(-1)^{k-1}$$

bulunur ve diğer taraftan $G_n = A^n$ olduğundan

$$\begin{aligned} \det G_n &= (\det A)^n \\ &= ((-1)^{k-1} c_k)^n \end{aligned} \tag{20}$$

elde edilir. Bu yüzden eğer k çift ise $(k-1)$ tek olduğundan $(-1)^{k-1} = -1$ olur. Böylece (20) denkleminden $\det G_n = (-1)^n (c_k)^n$ bulunur. Eğer k tek ise $(k-1)$ çift olduğundan $(-1)^{k-1} = 1$ ve (16) denkleminden $\det G_n = (c_k)^n$ olarak bulunur. □

Şimdi (2) denklemindeki $n > 0$ şartını hesaba katmazsak, genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayılarının k dizisi, $1 \le j \le k$ için c_j, katsayı sabiti olmak üzere

$$g_m^i = \begin{cases} 1, & i = 1-m \\ 0, & aksi\,halde \end{cases}, \quad 1-k \le m \le 0$$

sınır şartıyla birlikte,

$$g_m^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{m-j}^i \,, \quad 1 \le i \le k$$

şeklinde tanımlanır. g_m^i, i. dizinin m. terimidir. $k = 2$ ve $c_j = 1$ için genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci dizisi, $g_0^1 = 1$, $g_1^1 = 1$ başlangıç verileriyle birlikte geleneksel Fibonacci dizisine indirgenir. Buradan tümevarımla

$$G_n = A^{n-1} G_1 \tag{21}$$

yazılabilir.

Teorem 3.1.4. Eğer

$$G_m = \begin{bmatrix} g_m^1 & g_m^2 & \cdots & g_m^k \\ g_{m-1}^1 & g_{m-1}^2 & \cdots & g_{m-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m-k+1}^1 & g_{m-k+1}^2 & \cdots & g_{m-k+1}^k \end{bmatrix}$$

ise

$$\det G_m = \begin{cases} (c_k)^m \,, & k \ \ tek \ \ ise \\ (-1)^m (c_k)^m \,, & k \ \ çift \ \ ise \end{cases}$$

dir [7].

İspat: Dikkat edilmelidir ki, (2) denklemindeki $n > 0$ şartı göz ardı edildiğinde her k için $A \neq G_1$ olur. Böylece,

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \\ 1 & g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^{k-2} & g_1^{k-1} \\ 0 & 1 & g_1^1 & \cdots & g_1^{k-3} & g_1^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_1^1 & g_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_0^1 & g_1^1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Şimdi G_1 in ilk satırıyla diğer satırlarını yer değiştirirsek,

$$G_1^{'} = \begin{bmatrix} 1 & g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^{k-2} & g_1^{k-1} \\ 0 & 1 & g_1^1 & \cdots & g_1^{k-3} & g_1^{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & g_1^{k-4} & g_1^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_0^1 & g_1^1 \\ g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $\det G_1 = (-1)^{k-1}\det(G_1^{'})$ bulunur. Elemanter satır işlemleriyle, $G_1^{'}$ matrisi,

$$G_1^{'} = \begin{bmatrix} 1 & g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^{k-2} & g_1^{k-1} \\ 0 & 1 & g_1^1 & \cdots & g_1^{k-3} & g_1^{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & g_1^{k-4} & g_1^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_k \end{bmatrix}$$

şeklinde üçgen matris formuna dönüşür. Böylece $\det G_1^{'} = c_k$ ve $\det G_1 = (-1)^{k-1}c_k$ olur. $G_m = (A)^{m-1}G_1$ ve Teorem 3.1.3'den $\det A = c_k(-1)^{k-1}$ olduğu için $\det G_m = (c_k(-1)^{k-1})^{m-1}c_k(-1)^{k-1}$ yazılabilir. Eğer *k* çift ise $(-1)^{k-1} = -1$ ve eğer *k* tek ise $(-1)^{k-1} = 1$ dir. O halde,

$$\det G_m = \begin{cases} (c_k)^m & , \quad k \ \ tek \ ise \\ (-1)^m (c_k)^m , & k \ \ çift \ ise \end{cases}$$

olur. □

Hatırlatma. Dikkat edilmelidir ki, eğer $n > 0$ şartı hesaba katılırsa, G_1 matrisi matris çarpımı altında değişmelidir. Aksi takdirde değildir. Ayrıca Teorem 3.1.4'den $G_1 \neq A$ iken G_n ve G_m'nin determinantları bütün *k*'lar için aynıdır. Böylece, G_n ve G_m'nin determinantlarının c_k'ya bağlı olduğu görülür.

3.2. Lucas Sayılarıyla Oluşturulan Bazı Matrislerin Determinantları

Bu bölümde Lucas sayıları ile ilgili genel bir bilgi verilip, bölüm 3.1 de incelenen Fibonacci sayılarıyla oluşturulan matrislerin determinantları ile ilgili yapılan çalışmalara paralel olarak Lucas sayılarıyla da benzer incelemeler yapılmıştır. Daha sonra Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Genelleştirilmiş *k*. mertebeden Lucas sayılarının *k* dizisi,

$$l_n^i = \begin{cases} 2, & i = 2-n \\ -1, & i = 1-n \qquad 1-k \le n \le 0 \\ 0, & aksi\,halde \end{cases} \tag{22}$$

sınır şartıyla birlikte,

$$l_n^i = \sum_{j=1}^{k} l_{n-j}^i \ , \quad n > 0,\ 1 \le i \le k \tag{23}$$

şeklinde tanımlanır. l_n^i, *i*. dizinin *n*. terimidir. $i = 1$ ve $k = 2$ olduğunda genelleştirilmiş *k*. mertebeden Lucas dizisi, bilinen negatif Fibonacci dizisine indirgenir. Yani, her $n \in Z^+$ için $l_n^1 = -F_{n+1}$ dir.

$i = 3$ ve $k = 4$ seçildiğinde genelleştirilmiş *k*. mertebeden Lucas dizisi

$$\ldots,\ l_{-2}^3 = -1,\ l_{-1}^3 = 2,\ l_0^3 = 0,\ l_1^3 = 1,\ l_2^3 = 2,\ l_3^3 = 5,\ l_4^3 = 8,\ l_5^3 = 16,\ l_6^3 = 31, \ldots$$

şeklinde yazılabilir. (23) denkleminden, genelleştirilmiş *k*. mertebeden Lucas dizisi için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} l_{n+1}^i \\ l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ \vdots \\ l_{n-k+1}^i \\ l_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ l_{n-2}^i \\ \vdots \\ l_{n-k}^i \\ l_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \tag{25}$$

eşitliği yazılabilir. Bununla beraber genelleştirilmiş *k*. mertebeden Lucas dizisinin *k* dizisiyle çalışmak için

$$H_n = \begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 & \cdots & l_n^k \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & \cdots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+1}^1 & l_{n-k+1}^2 & \cdots & l_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \tag{26}$$

$k \times k$ kare matrisini alalım. (25) denkleminden,

$$H_{n+1} = AH_n \tag{27}$$

elde edilir [8].

Lemma 3.2.1.

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, A ve H_n sırasıyla (24) ve (26) denklemlerindeki gibi olsun. Bu taktirde

$$H_{n+1} = A^n H_1$$

dir [8].

İspat: (27) denkleminden $H_{n+1} = AH_n$ dir. Buradan tümevarım metodunu ve matris çarpımının bir özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} H_2 &= A \cdot H_1 \\ H_3 &= A \cdot H_2 = A^2 \cdot H_1 \\ H_4 &= A \cdot H_3 = A^3 \cdot H_1 \\ &\vdots \\ H_n &= A \cdot H_{n-1} = A^{n-1} \cdot H_1 \\ H_{n+1} &= A \cdot H_n = A^n \cdot H_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

olmak üzere, $H_1 = A \cdot K$ dır. Bu yüzden

$$H_{n+1} = A^{n+1} K$$

dir. □

Teorem 3.2.1. Eğer

$$H_n = \begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 & \cdots & l_n^k \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & \cdots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+1}^1 & l_{n-k+1}^2 & \cdots & l_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

ise

$$\det H_{n+1} = \begin{cases} (-1)^{n+1}, & k \text{ çift ise} \\ -1 \;\;, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir [8].

İspat: Lemma 3.2.1'den $H_{n+1} = A^{n+1} K$ dir. Buradan

$$\det H_{n+1} = (\det A)^{n+1} . \det K$$

olur. $\det A = (-1)^{k+1}$ ve $\det K = (-1)^k$ olduğundan,

$$\det H_{n+1} = ((-1)^{k+1})^{n+1}.(-1)^{k}$$

olur. Buradan da

$$\det H_{n+1} = \begin{cases} (-1)^{n+1}, & k \text{ çift ise} \\ -1 \quad , & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. □

Şimdi *k*. mertebeden genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri arasındaki ilişkiyi gösteren Teoremi verelim.

Teorem 3.2.2. Eğer

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}, \quad H_n = \begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 & \cdots & l_n^k \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & \cdots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+1}^1 & l_{n-k+1}^2 & \cdots & l_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

ve

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

ise

$$H_n = G_n K$$

dir [8].

İspat: [3]'de Er, $G_n = A^n$ olduğunu göstermişti. Ayrıca $H_n = A^n K$ olduğunu da Lemma 3.2.1'den biliyoruz. Böylece,

$$H_n = G_n K$$

olur. □

Teorem 3.2.2'de $k=2$ için,

$$\begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 \\ l_{n-1}^1 & l_{n-2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 \\ g_{n-1}^1 & g_{n-2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $l_n^2 = 2g_n^1 - g_n^2$ olur. Her $n \in Z$ için $g_n^1 = g_{n+1}^2$ olduğundan $l_n^2 = 2g_{n+1}^2 - g_n^2$ elde edilir. Burada l_n^2 ve g_n^2 sırasıyla alışılmış Lucas ve Fibonacci sayılarıdır.

Böylece, Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bağıntı genelleştirilmiş oldu. Yani, $L_n = 2F_{n+1} - F_n$ elde edildi (bk. sy. 176, [11]).

Örnek 3.2.1. H_{n+1}, A ve K $k \times k$ kare matrisleri 3×3 kare matris olsun. Bu taktirde H_{n+1}'in determinantı, k tek olduğu için -1 dir. Gerçekten,

h[t] : $H_{n+1} = A^{n+1}K$ matris çarpımındaki adım sayısı,

det (H[t]) : $H_1, H_2, \cdots, H_{10}$ matrislerinin determinantları,

H[t] : $H_1, H_2, \cdots, H_{10}$ matrisleri,

olmak üzere:

```
with(linalg):
A:=matrix(3,3,[1,1,1,1,0,0,0,1,0]);
K:=matrix(3,3,[-1,2,0,0,-1,2,0,0,-1]);
H[1]:=multiply(A,K):
print(h[1],det(H[1]),H[1]);
for t from 2 to 10 do
H[t]:=multiply(H[t-1],A);
print(h[t],det(H[t]),H[t]);
od:
```

Maple programı çalıştırılırsa;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad K := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad h_1, -1, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$h_2,-1,\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix};\ h_3,-1,\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix};\qquad h_4,-1,\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$h_5,-1,\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix};\ h_6,-1,\begin{bmatrix}-2 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad h_7,-1,\begin{bmatrix}-4 & -3 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$h_8,-1,\begin{bmatrix}-7 & -6 & -4\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix};h_9,-1,\begin{bmatrix}-13 & -11 & -7\\ 7 & 6 & 4\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix};h_{10},-1,\begin{bmatrix}-24 & -20 & -13\\ 13 & 11 & 7\\ 7 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 3.2.2. H_{n+1}, A ve K $k\times k$ kare matrisleri 4×4 kare matris olsun. Bu taktirde H_{n+1}'in determinantı, k çift olduğu için $(-1)^{n+1}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ dir. Gerçekten,

h[t] : $H_{n+1}=A^{n+1}K$ matris çarpımındaki adım sayısı,

det (H[t]) : $H_1,H_2,\cdots,H_{10}$ matrislerinin determinantları,

H[t] : $H_1,H_2,\cdots,H_{10}$ matrisleri,

olmak üzere:

```
with(linalg):
A:=matrix(4,4,[1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0]);
K:=matrix(4,4,[-1,2,0,0,0,-1,2,0,0,0,-1,2,0,0,0,-1]);
H[1]:=multiply(A,K):
print(h[1],det(H[1]),H[1]);
for t from 2 to 10 do
H[t]:=multiply(H[t-1],A);
print(h[t],det(H[t]),H[t]);
od:
```

Maple programı çalıştırılırsa;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad K := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad h_1, -1, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$h_2, 1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \; h_3, -1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad h_4, 1, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$h_5, -1, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad h_6, 1, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \; h_7, -1, \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$h_8, 1, \begin{bmatrix} -4 & -4 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; h_9, -1, \begin{bmatrix} -8 & -7 & -6 & -4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$h_{10}, 1, \begin{bmatrix} -15 & -14 & -12 & -8 \\ 8 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

3.3. *k*-Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Sayılarının Determinant Temsilleri

$k \geq 2$ olmak üzere, *k*-Fibonacci dizisi $\{g_n^{(k)}\}$

$$g_1^{(k)} = g_2^{(k)} = \cdots = g_{k-2}^{(k)} = 0, \quad g_{k-1}^{(k)} = g_k^{(k)} = 1 \tag{29}$$

ve $n > k \geq 2$ için,

$$g_n^{(k)} = g_{n-1}^{(k)} + g_{n-2}^{(k)} + \cdots + g_{n-k}^{(k)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $g_n^{(k)}$, *n*. *k*-genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır. Örneğin, 4- genelleştirilmiş Fibonacci dizisi,

$$0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, \ldots$$

dır.

$n \geq 1$ için k-genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{l_n^{(k)}\}$

$$l_n^{(k)} = g_{n-1}^{(k)} + g_{n+k-1}^{(k)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l_n^{(k)}$, n. k-genelleştirilmiş Lucas sayısıdır. Örneğin, 4-genelleştirilmiş Lucas dizisi,

$$1, 2, 4, 9, 16, 31, 60, \ldots$$

dir.

Teorem 3.3.1. A_n $n \times n$ matrisi, her $n \geq 1$ için alt Hessenberg matrisi ve $\det(A_0) = 1$ olsun. Bu taktirde, $n \geq 2$ için

$$\det(A_1) = a_{11}$$

ve

$$\det(A_n) = a_{n,n} \det(A_{n-1}) + \sum_{j=r}^{n-1} \left((-1)^{n-r} a_{n,r} \prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1} \det(A_{r-1}) \right) \tag{30}$$

dir [13].

Teorem 3.3.2. $k \geq 2$ bir tamsayı ve

$$h_{st} = \begin{cases} i^{|s-t|}, & -1 \leq s-t < k \\ 0 \quad , & aksi\, halde \end{cases} \tag{31}$$

için $H_{n,k} = (h_{st})$, $n \times n$ Hessenberg matrisi olsun. Yani,

$$H_{n,k} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \ldots & 0 \\ i^2 & i & 1 & i & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ i^{k-1} & i^{k-2} & i^{k-3} & i^{k-4} & \ldots & 0 \\ 0 & i^{k-1} & i^{k-2} & i^{k-3} & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & i^{k-1} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

ise, $i = \sqrt{-1}$ için

$$\det(H_{n,k}) = g_{n+k-1}^{(k)} \tag{33}$$

dir [9].

İspat: n üzerinden tümevarım metodunu kullanalım.

$n=0$ ve $n=1$ için hipotezden sonuç açıktır. Kabul edelim ki, bütün pozitif $n \le m$ sayıları için (33) denklemi doğru olsun. Yani,

$$\det(H_{m,k}) = g_{m+k-1}^{(k)}$$

olsun. Teorem 3.3.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\det(H_{m+1,k}) &= h_{m+1,m+1}\det(H_{m,k}) + \sum_{r=1}^{m}\left((-1)^{m+1-r} h_{m+1,r}\prod_{j=r}^{m} h_{j,j+1}\det(H_{r-1,k})\right) \\
&= \det(H_{m,k}) + \sum_{r=1}^{m-k+1}\left((-1)^{m+1-r} h_{m+1,r}\prod_{j=r}^{m} h_{j,j+1}\det(H_{r-1,k})\right) \\
&\quad + \sum_{r=m-k+2}^{m}\left((-1)^{m+1-r} h_{m+1,r}\prod_{j=r}^{m} h_{j,j+1}\det(H_{r-1,k})\right) \\
&= \det(H_{m,k}) + \sum_{r=m-k+2}^{m}\left((-1)^{m+1-r} i^{|m+1-r|}\prod_{j=r}^{m} i^{|i-j-1|}\det(H_{r-1,k})\right) \\
&= \det(H_{m,k}) + \sum_{r=m-k+2}^{m}\left((-1)^{m+1-r} i^{m+1-r}\prod_{j=r}^{m} i\det(H_{r-1,k})\right) \\
&= \det(H_{m,k}) + \sum_{r=m-k+2}^{m}\left((-1)^{m+1-r} i^{m+1-r} i^{m+1-r}\det(H_{r-1,k})\right) \\
&= \det(H_{m,k}) + \sum_{r=m-k+2}^{m}\det(H_{r-1,k}) \\
&= \det(H_{m,k}) + \det(H_{m-1,k}) + \cdots + \det(H_{m-(k-1),k})
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Hipotezimizden ve k-genelleştirilmiş Fibonacci sayıları tanımından,

$$\det(H_{m+1,k}) = g_{m+k-1}^{(k)} + g_{m+k-2}^{(k)} + \cdots + g_{m-1}^{(k)} = g_{m+k}^{(k)}$$

eşitliği elde edilir. Böylece her $n \ge 0$ için iddia doğrudur. □

Teorem 3.3.3. $k \geq 2$ olan bir tamsayı ve $F_{n,k} = (f_{ij})$ $n \times n$ matrisinin elemanları,

$$f_{ij} = \begin{cases} -1, & j = i+1 \\ 1, & 0 \leq i-j < k \\ 0, & aksi\,halde \end{cases}$$

olmak üzere alt Hessenberg matrisi olsun. Yani,

$$F_{n,k} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

ise $g_n^{(k)}$, n. k-genelleştirilmiş Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\det(F_{n,k}) = g_{n+k-1}^{(k)} \tag{35}$$

dir [9].

İspat: n üzerinden tümevarım metodunu kullanalım. $\det(F_{0,k}) = 1 = g_{k-1}^{(k)}$ ve $\det(F_{1,k}) = 1 = g_k^{(k)}$ olduğundan, $n = 0$ ve $n = 1$ için sonuç açıktır. Kabul edelim ki, bütün pozitif $n \leq m$ sayıları için (35) denklemi doğru olsun. Yani,

$$\det(F_{m,k}) = g_{m+k-1}^{(k)}$$

olsun. (35) denkleminin $m+1$ için doğruluğunu göstermeliyiz. Teorem 3.3.1 kullanılarak,

$$\det(F_{m+1,k}) = f_{m+1,m+1} \det(F_{m,k}) + \sum_{r=1}^{m} \left((-1)^{m+1-r} f_{m+1,r} \prod_{j=r}^{m} f_{j,j+1} \det(F_{r-1,k}) \right)$$

$$= \det(F_{m,k}) + \sum_{r=m-k+2}^{m} \left((-1)^{m+1-r} f_{m+1,r} \prod_{j=r}^{m} f_{j,j+1} \det(F_{r-1,k}) \right)$$

$$= \det(F_{m,k}) + \sum_{r=m-k+2}^{m} \left((-1)^{m+1-r} \prod_{j=r}^{m} (-1) \det(F_{r-1,k}) \right)$$

$$= \det(F_{m,k}) + \det(F_{m-1,k}) + \cdots + \det(F_{m-(k-1),k})$$

bulunur. Hipotezimizden ve *k*-genelleştirilmiş Fibonacci sayıları tanımından,

$$\det(F_{m+1,k}) = g_{m+k-1}^{(k)} + g_{m+k-2}^{(k)} + \cdots + g_{m-1}^{(k)} = g_{m+k}^{(k)}$$

olur. Böylece her $n \geq 0$ için iddia doğrudur. □

Bu Teorem $k = 2$ için aşağıdaki sonucu sağlar.

Sonuç 3.3.1. $F_{n,2} = (f_{ij})$ $n \times n$ matrisinin elemanları,

$$f_{ij} = \begin{cases} -1, & j = i+1 \\ 1, & 0 \leq i - j < 2 \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}$$

olmak üzere alt Hessenberg matrisi olsun. Yani,

$$F_{n,2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

ise F_n, *n*. Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\det(F_{n,2}) = F_{n+1}$$

dir [12].

Sonuç 3.3.2. $k \geq 2$ bir tamsayı ve $C_{n,k} = (c_{ij})$ $n \times n$ matrisinin elemanları,

$$c_{ij} = \begin{cases} 2, & i = k \text{ } ve \text{ } j = 2 \\ -1, & j = i+1 \\ 1, & 0 \leq i - j < k \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}$$

olmak üzere alt Hessenberg matrisi olsun.Yani,

$$C_{n,k} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

ise $l_n^{(k)}$, n. k-genelleştirilmiş Lucas sayısı olmak üzere

$$\det(C_{n,k}) = l_n^{(k)}$$

dir [9].

İspat: k-genelleştirilmiş Lucas sayılarının tanımından

$$l_n^{(k)} = g_{n-1}^{(k)} + g_{n+k-1}^{(k)} \ , \quad n \geq k$$

olur ve Teorem 3.3.3 den

$$l_n^{(k)} = \det(F_{n-k,k}) + \det(F_{n,k})$$

dir. Bununla beraber $I_{k,k}$, $k \times k$ birim matris olmak üzere

$$\det(F_{n-k,k}) = \begin{vmatrix} I_{k,k} & 0 \\ 0 & F_{n-k,k} \end{vmatrix} \tag{38}$$

dir. (38) denkleminin sağ tarafına elemanter satır işlemleri uygulanırsa,

$$\det(F_{n-k,k}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

$$l_n^{(k)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

olur. □

3.4. Fibonacci Sayılarıyla Oluşturulan Bazı Matrislerin Normları

Bu bölümde, FToeplitz ve hemen hemen FHankel matrislerinin normları ve bu normlar için sınırlar incelenecektir.

Tanım 3.4.1. $a_k, b_k \in R \quad (k = 1,...,n)$ olmak üzere,

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{39}$$

dir. $i, j = 0,...,n$ ve $n = 0,1,..., b_0 = 0$ için $[t_{i-j}]$ Hermityen matris olacak şekilde $t_n = a_n - ib_n$ ve $t_{-n} = a_n + ib_n$ olsun. Bu durumda

$$T_n(x) = \sum t_{i-j} x_i \bar{x}_j, \qquad i, j = 0,...,n \tag{40}$$

Hermityen formuna (39) denklemindeki harmonik fonksiyonla ilgili ***Toeplitz formu***, (40) deki formla ilgili matrise de ***Toeplitz matrisi*** denir. Bu matris elemanları

$t_{ij} = t_{i-j}$ olacak şekilde $T_n = [t_{ij}]_{i,j=0}^{n}$ ile gösterilir. $f(x)$ reel değerli bir fonksiyon ve $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi de

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} t_n e^{inx}$$

olsun. Bu taktirde

$$t_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} f(x)dx, \quad (m = \pm 1, \pm 2, ...) \tag{41}$$

olur. Böylece (41) denklemi uygun $f(x)$ fonksiyonu ile T_n'nin t_{ij} elemanlarını hesaplamamıza izin verir.

$\gcd(i, j)$, i ve j tamsayılarının en büyük ortak böleni olsun. A gcd matrisi, $i, j = 1, 2, ..., n$ için $a_{ij} = \gcd(i, j)$ olmak üzere $A = [a_{ij}]$ olarak tanımlansın [14]. Bu gcd matrisleri S. Beslin ve S. Ligh tarafından tanımlanmıştır [14]. Beslin ve Ligh bu matrislerin determinantları için formüller vermiştir. E. Altınışık bu matrislerin tersleri için formüller elde etmiştir [15].

Tanım 3.4.2. A, $m \times n$ matrisinin $p \geq 2$ için

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p} \tag{42}$$

şeklinde tanımlanan normuna, l_p ***normu*** denir. $p = 2$ için l_p normuna ***Euclidean*** veya ***Frobenius normu*** denir ve $\|A\|_E$ veya $\|A\|_F$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.3. A^*, A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere, A $m \times n$ matrisi kompleks elemanlarıyla birlikte

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A^* A)|}$$

şeklinde tanımlansın. Bu norma, A matrisinin ***Spektral normu*** denir. Normların eşdeğerliğinden

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A_n\|_F \le \|A_n\|_2$$

olur [16].

Teorem 3.4.1. T $n\times n$ matrisi, hemen hemen gcd FToeplitz matrisi olsun. Bu durumda, $\|\,.\,\|_F$ Euclidean normu için

$$\|T_n\|_F \le n$$

eşitsizliği sağlanır [10].

İspat: T matrisinin esas köşegen elemanları $1/F[\gcd(i,j)]$ olur. Böylece bütün k'lar için

$$\|T\|_F^2 \le (n^2 - \frac{3n}{2}).1 + 2n\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(F_k)^2}$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} 1/(F_k)^2 \le 2.4$$

olduğu için

$$\|T\|_F^2 \le n^2 - n + 2.4 \le n^2$$

elde edilir. □

Teorem 3.4.2. T_n, $n\times n$ FToeplitz matris olmak üzere,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_F \le \sqrt{a^2 + 2\pi}$$

dir [10].

İspat: FToeplitz matrisi ve Frobenius normu tanımından

$$\|T_n\|_F^2 = na^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{F_k^2} \tag{43}$$

dir. Eğer (43) eşitliğinin her iki tarafı da n ile bölünürse,

$$\frac{1}{n}\|T_n\|_F^2 = a^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{F_k^2} \tag{44}$$

eşitliği elde edilir. (44) eşitliğinin sağ tarafının $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{F_k^2}\right) = a^2 + 2\pi$$

olur. Böylece,

$$\frac{1}{n}\|T_n\|_F^2 \le a^2 + 2\pi \tag{45}$$

olduğu görülür. (45) eşitliğinin karekökünü alırsak,

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\|\mathrm{T_n}\|_\mathrm{F} \le \sqrt{\mathrm{a}^2 + 2\pi}$$

elde edilir. □

Teorem 3.4.3. $\|.\|_F$ Euclidean normu ve H_n, $n \times n$ hemen hemen FHankel matris olsun. Bu taktirde,

$$\|H_n\|_F \le 2.6$$

eşitsizliği sağlanır [10] .

İspat: H_n matrisinin bütün elemanları $1/2$ 'den küçük veya eşit, yani her k, j için $h_{kj} \le \sqrt{2k-1}/F_k$ olduğu için, $k = 1, 2, ..., n.$ için $\sqrt{2k-1}/F_k$ ile H_n matrisinin elemanlarını yer değiştirebiliriz. O zaman Euclidean norm tanımından

$$\|H_n\|_F^2 \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{F_k^2}$$

yazılabilir. Buradan her n için

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)/F_k^2 \le 6.7$$

olduğundan

$$\|H_n\|_F \le 2.6$$

dir. □

n	$\|H_n\|_F$	$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{F_k^2}\right)^{1/2}$
3	1.227576655	2.291287848
5	1.434538134	2.527405345
10	1.499052953	2.586808136
20	1.500230616	2.587685852
50	1.500230784	2.587685963
80	1.500230784	2.587685963
90	1.500230784	2.587685963
100	1.500230784	2.587685963
150	1.500230784	2.587685963

$a = 0$

n	$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_F$	$\sqrt{a^2 + 2\pi}$
3	1.414213563	2.506628274
4	1.620185174	2.506628274
15	2.060213395	2.506628274
50	2.161062866	2.506628274
60	2.168086910	2.506628274
80	2.176835090	2.506628274
100	2.182067164	2.506628274
200	2.176835090	2.506628274
300	2.195958418	2.506628274

$a = 1$

n	$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_F$	$\sqrt{a^2 + 2\pi}$
3	1.732050808	2.698737725
4	1.903943276	2.698737725
15	2.290082800	2.698737725
50	2.381216646	2.698737725
60	2.387593108	2.698737725
80	2.395539816	2.698737725
100	2.400295213	2.698737725
200	2.409777852	2.698737725
300	2.412930454	2.698737725

$a = -(1/2)$

N	$\frac{1}{\sqrt{n}}\lVert T_n \rVert_F$	$\sqrt{a^2 + 2\pi}$
3	1.500000000	2.556009646
4	1.695582496	2.556009646
15	2.120018686	2.556009646
50	2.218150741	2.556009646
60	2.224994572	2.556009646
80	2.233519870	2.556009646
100	2.238619465	2.556009646
200	2.248783960	2.556009646
300	2.252161934	2.556009646

N	$\lVert T \rVert_F$	N
3	2.872281323	3
4	3.789605667	4
5	4.732981206	5
6	5.560282017	6
10	9.177599832	10
15	13.56009108	15
20	18.06761831	20
50	44.71394731	50
100	88.67822829	100

IV. FIBONACCI DİZİSİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE FIBONACCI MATRİSLERİNİN DETERMİNANTLARI

Bu bölümde, II. Bölümde verilen Fibonacci sayı dizilerinin özelliklerine ek olarak yeni özellikler verilmiştir. Ayrıca, [2] ve [3] den yararlanarak yeni sınır şartları tanımlanıp, bu şartlara bağlı olarak elde edilen matrislerin determinantları incelenmiştir.

4.1. Fibonacci Sayılarıyla İlgili Bazı Özellikler

Teorem 4.1.1. Fibonacci sayıları arasında $n > 0$ için,

$$F_{n+6} = 4F_{n+3} + F_n \tag{46}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Tümevarım metodunu kullanarak ispatı yapalım.

$n = 1$ için

$$F_7 = 4F_4 + F_1 = 4.3 + 1 = 13$$

ve (1) denkleminden

$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$$

olur. O halde, $n = 1$ için (46) denklemi sağlanır.Şimdi,

$n = k$ için

$$F_{k+6} = 4F_{k+3} + F_k \tag{47}$$

denklemi doğru olsun.

$n = k + 1$ için

$$F_{(k+1)+6} = 4F_{(k+1)+3} + F_{k+1}$$

denkleminin doğruluğunu gösterelim.

(1) denklemi F_{k+4} ve F_{k+1} ’de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_{(k+1)+6} &= 4F_{k+4} + F_{k+1} \\ &= 4(F_{k+3} + F_{k+2}) + (F_k + F_{k-1}) \\ &= (4F_{k+3} + F_k) + (4F_{k+2} + F_{k-1}) \end{aligned}$$

olur. (47) denkleminden

$$F_{k+7} = F_{k+6} + F_{k+5}$$

elde edilir ki, (1) denklemine göre $n = k + 1$ için de (46) denklemi sağlanır. Böylece, $n > 0$ için

$$F_{n+6} = 4F_{n+3} + F_n$$

dir. □

Teorem 4.1.2. $\frac{n}{2}, \frac{k}{3} \in Z$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ ve $n \geq 0$ olsun. Bu taktirde,

$$F_k = \sum_{i=0}^{n/2} 2^{2n+1-4i} \binom{n-i}{n-2i}$$

dir.

İspat:

$$F_3 = \binom{0}{0} 2^1 = 2^1$$

$$F_9 = \binom{2}{2} 2^5 + \binom{1}{0} 2^1 = 34 = 2^5 + 2^1$$

$$F_{15} = \binom{4}{4} 2^9 + \binom{3}{2} 2^5 + \binom{2}{0} 2^1 = 610 = 2^9 + 3.2^5 + 2^1$$

$$F_{21} = 2^{13} + 5.2^9 + 6.2^5 + 2^1$$

$$F_{27} = 2^{17} + 7.2^{13} + 15.2^9 + 10.2^5 + 2^1$$

$$F_{33} = 2^{21} + 9.2^{17} + 28.2^{13} + 35.2^9 + 15.2^5 + 2^1$$

$$\vdots$$

$$F_k = \binom{n}{n} 2^{2n+1} + \binom{n-1}{n-2} 2^{2n-3} + \binom{n-2}{n-4} 2^{2n-7} + \cdots + \binom{n/2}{0} 2$$

olur. Buradan $F_3, F_9, F_{15}, \ldots, F_k$ Fibonacci sayılarının $2^1, 2^5, 2^9, \ldots, 2^{2n+1}$ çarpanlarının katsayılarını, $F_3, F_9, F_{15}, \ldots, F_k$'ların kendi sütunlarının altlarına gelecek şekilde bir matris oluşturalım.

$$
\begin{array}{c}
\\ 2^1 \\ 2^5 \\ 2^9 \\ 2^{13} \\ 2^{17} \\ 2^{21} \\ \vdots \\ 2^{2n+1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
F_3 & F_9 & F_{15} & F_{21} & F_{27} & F_{33} & \cdots & F_k
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & . \\
0 & 0 & 1 & 5 & 15 & 35 & \cdots & . \\
0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 28 & \cdots & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & \cdots & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & . \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

oluşan bu $\frac{k+3}{6} \times \frac{k+3}{6}$ kare matrisin esas köşegen ve esas köşegen üzerindeki elemanları binom açılımından gelmektedir. Gerçekten,

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots
\end{array}
$$

olur. Buradan da

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} F_3 & F_9 & F_{15} & F_{21} & F_{27} & F_{33} & \dots & F_k \end{array} \\
\begin{array}{c} 2^{1} \\ 2^{5} \\ 2^{9} \\ 2^{13} \\ 2^{17} \\ 2^{21} \\ \vdots \\ 2^{2n+1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} & \dots & \binom{n/2}{0} \\
0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \binom{6}{2} & \dots & \binom{n/2+1}{2} \\
0 & 0 & \binom{4}{4} & \binom{5}{4} & \binom{6}{4} & \binom{7}{4} & \dots & \binom{n/2+2}{4} \\
0 & 0 & 0 & \binom{6}{6} & \binom{7}{6} & \binom{8}{6} & \dots & \binom{n/2+3}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \binom{8}{8} & \binom{9}{8} & \dots & \binom{n/2+4}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{10}{10} & \dots & \binom{n/2+5}{10} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

matrisi elde edilir. Bu matristen de görüldüğü gibi $F_3, F_9, F_{15}, \ldots, F_k$'ların $2^1, 2^5, 2^9, \ldots, 2^{2n+1}$ çarpanlarının katsayıları,

$$F_k = \binom{n}{n} 2^{2n+1} + \binom{n-1}{n-2} 2^{2n-3} + \binom{n-2}{n-4} 2^{2n-7} + \cdots + \binom{n/2}{0} 2$$

dir. Böylece,

$$F_k = \sum_{i=0}^{n/2} 2^{2n+1-4i} \binom{n-i}{n-2i}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.1.1. $\frac{n}{2}, \frac{k}{3} \in Z$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ ve $n \geq 0$ olmak üzere

$$F_{k/3} = \binom{n}{n} + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-2}{n-4} + \cdots + \binom{n/2}{0}$$

dir.

İspat: Tümevarım metodu ile ispat açıktır.

Teorem 4.1.3. $\frac{n-1}{2}, \frac{k}{3} \in Z$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ ve $n \geq 1$ olsun. Bu taktirde,

$$F_k = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} 2^{2n+1-4i} \binom{n-i}{n-2i}$$

dir.

İspat: Teorem 4.1.2.'nin ispatına benzer şekilde yapılır. □

Sonuç 4.1.2. $\frac{n+1}{2}, \frac{k}{3} \in Z$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$F_{k/3} = \binom{n}{n} + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-2}{n-4} + \cdots + \binom{(n+1)/2}{1}$$

dir.

İspat: Tümevarım metodu ile ispat açıktır.

Teorem 4.1.4. $\frac{k}{3} \in Z$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$F_k = 2^{2n+1} + 2^{2n-4} F_3 + 2^{2n-6} F_6 + \ldots + 2^2 F_{k-9} + F_{k-6} \tag{48}$$

dir.

İspat: Tümevarım metodunu kullanarak ispatı yapalım.

$n = 2$ için $F_9 = 2^5 + F_3 = 34$ olup (48) denklemi sağlanır.

$n = m$ için $F_t = 2^{2m+1} + 2^{2m-4} F_3 + 2^{2m-6} F_6 + \ldots + 2^2 F_{t-9} + F_{t-6}$ doğru olsun.

$n = m + 1$ için de (48) denkleminin doğru olduğunu gösterelim.

$$\frac{t}{3} - 1 = m \quad \Rightarrow \quad \frac{t+3}{3} - 1 = m + 1$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} F_{t+3} &= 2^{2m+3} + 2^{2m-2} F_3 + 2^{2m-4} F_6 + \ldots + 2^4 F_{t-9} + 2^2 F_{t-6} \\ &= 4(2^{2m+1} + 2^{2m-4} F_3 + 2^{2m-6} F_6 + \ldots + 2^2 F_{t-9} + F_{t-6}) \\ &= 4F_t \end{aligned}$$

elde edilir ki, $n = m + 1$ için de (48) denklemi sağlanır. O halde,

$$F_k = 2^{2n+1} + 2^{2n-4} F_3 + 2^{2n-6} F_6 + \ldots + 2^2 F_{k-9} + F_{k-6}$$

olur. □

4.2. Sınır Şartına Bağlı Olarak Elde Edilen Matrislerin Determinantları

Genelleştirilmiş *k*. mertebeden Fibonacci sayılarının *k* dizisi,

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1 - n \\ 2, & i = 2 - n \quad , 1 - k \leq n \leq 0 \\ 0, & aksi\, halde \end{cases} \tag{49}$$

sınır şartıyla birlikte,

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-j}^i \;, \quad n > 0,\; 1 \le i \le k \tag{50}$$

şeklinde tanımlanır. Burada g_n^i, i. dizinin n. terimidir. $k = 2$ olduğunda genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci dizisi, bilinen Fibonacci dizisine indirgenir.

$i = 2$ ve $k = 3$ seçildiğinde, genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci dizisi,

$$\ldots,\; g_{-2}^2 = 0,\; g_{-1}^2 = 1,\; g_0^2 = 2,\; g_1^2 = 3,\; g_2^2 = 6,\; g_3^2 = 11,\; g_4^2 = 20,\; \ldots$$

şeklinde yazılabilir. (50) ifadesinden, genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci dizisi için [2]'de verilen matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} g_{n+1}^i \\ g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ \vdots \\ g_{n-k+1}^i \\ g_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ g_{n-2}^i \\ \vdots \\ g_{n-k}^i \\ g_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \tag{52}$$

eşitliği yazılabilir. Bununla beraber genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci dizisinin k dizisiyle çalışmak için

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \tag{53}$$

$k \times k$ kare matrisini alalım. (52) denkleminden,

$$G_{n+1} = A \cdot G_n \tag{54}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.1.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, A ve G_n sırasıyla (51) ve (53) denklemlerindeki gibi olsun. Bu taktirde

$$G_{n+1} = A^n \cdot G_1$$

dir.

İspat: (54) denkleminden $G_{n+1} = A \cdot G_n$ dir. Buradan matris çarpımının bir özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} G_2 &= A \cdot G_1 \\ G_3 &= A \cdot G_2 = A^2 \cdot G_1 \\ G_4 &= A \cdot G_3 = A^3 \cdot G_1 \\ &\vdots \\ G_n &= A \cdot G_{n-1} = A^{n-1} \cdot G_1 \\ G_{n+1} &= A \cdot G_n = A^n \cdot G_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{55}$$

olmak üzere $G_1 = A \cdot B$ dir. Bu yüzden

$$G_{n+1} = A^{n+1} \cdot B$$

dir. □

Teorem 4.2.1. Eğer

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

ise

$$\det G_{n+1} = \begin{cases} 1\ , & k\ tek\ ise \\ (-1)^{n+1}, & k\ çift\ ise \end{cases}$$

dir.

İspat: Lemma 4.2.1'den $G_{n+1} = A^{n+1} \cdot B$ dir. Buradan

$$\det G_{n+1} = (\det A)^{n+1}.\det B$$

olur. $\det A = (-1)^{k+1}$ ve $\det B = 1$ olduğundan,

$$\det G_{n+1} = ((-1)^{k+1})^{n+1}.1$$

dir. Buradan da

$$\det G_{n+1} = \begin{cases} 1\ , & k\ tek\ ise \\ (-1)^{n+1}, & k\ çift\ ise \end{cases}$$

elde edilir. □

Örnek 4.2.1. G_{n+1}, A ve B $k \times k$ kare matrisleri, 3×3 kare matris olsun. Bu taktirde G_{n+1}'in determinantı, k tek olduğu için 1 dir. Gerçekten,

g[t] : $G_{n+1} = A^{n+1} \cdot B$ matris çarpımındaki adım sayısı,

det (G[t]) : $G_1, G_2, \cdots, G_{10}$ matrislerinin determinantları,

G[t] : $G_1, G_2, \cdots, G_{10}$ matrisleri,

olmak üzere:

```
with(linalg):
A:=matrix(3,3,[1,1,1,1,0,0,0,1,0]);
B:=matrix(3,3,[1,2,0,0,1,2,0,0,1]);
G[1]:=multiply(A,B):
print(g[1],det(G[1]),G[1]);
for t from 2 to 10 do
G[t]:=multiply(G[t-1],A);
print(g[t],det(G[t]),G[t]);
od:
```

Maple programı çalıştırılırsa;

$$A:=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix};\quad B:=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix};\quad g_1,1,\begin{bmatrix}1&3&3\\1&2&0\\0&1&2\end{bmatrix};\quad g_2,1,\begin{bmatrix}4&4&1\\3&1&1\\1&2&0\end{bmatrix};$$

$$g_3,1,\begin{bmatrix}8&5&4\\4&4&3\\3&1&1\end{bmatrix};\ g_4,1,\begin{bmatrix}13&12&8\\8&7&4\\4&4&3\end{bmatrix};g_5,1,\begin{bmatrix}25&21&13\\15&12&8\\8&7&4\end{bmatrix};\ g_6,1,\begin{bmatrix}46&38&25\\27&23&15\\15&12&8\end{bmatrix};$$

$$g_7,1,\begin{bmatrix}84&71&46\\50&42&27\\27&23&15\end{bmatrix};\quad g_8,1,\begin{bmatrix}155&130&84\\92&77&50\\50&42&27\end{bmatrix};$$

$$g_9,1,\begin{bmatrix}285&239&155\\169&142&92\\92&77&50\end{bmatrix};\ g_{10},1,\begin{bmatrix}524&440&285\\311&261&169\\169&142&92\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.2. G_{n+1}, A ve B $k\times k$ kare matrisleri, 4×4 kare matris olsun. Bu taktirde G_{n+1}'in determinantı, k çift olduğu için $(-1)^{n+1}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ dir. Gerçekten,

g[t] : $G_{n+1}=A^{n+1}\cdot B$ matris çarpımındaki adım sayısı,

det (G[t]) : $G_1,G_2,\cdots,G_{10}$ matrislerinin determinantları,

G[t] : $G_1,G_2,\cdots,G_{10}$ matrisleri, olmak üzere:

```
with(linalg):
A:=matrix(4,4,[1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0]);
B:=matrix(4,4,[1,2,0,0,0,1,2,0,0,0,1,2,0,0,0,1]);
G[1]:=multiply(A,B):
print(g[1],det(G[1]),G[1]);
for t from 2 to 10 do
G[t]:=multiply(G[t-1],A);
print(g[t],det(G[t]),G[t]);
od:
```

Maple programı çalıştırılırsa;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad g_1, -1, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$g_2, 1, \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad g_3, -1, \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad g_4, 1, \begin{bmatrix} 16 & 13 & 12 & 8 \\ 8 & 8 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$g_5, -1, \begin{bmatrix} 29 & 28 & 24 & 16 \\ 16 & 15 & 12 & 8 \\ 8 & 8 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad g_6, 1, \begin{bmatrix} 57 & 53 & 45 & 29 \\ 31 & 28 & 24 & 16 \\ 16 & 15 & 12 & 8 \\ 8 & 8 & 7 & 4 \end{bmatrix};$$

$$g_7, -1, \begin{bmatrix} 110 & 102 & 86 & 57 \\ 59 & 55 & 47 & 31 \\ 31 & 28 & 24 & 16 \\ 16 & 15 & 12 & 8 \end{bmatrix}; \quad g_8, 1, \begin{bmatrix} 212 & 196 & 167 & 110 \\ 114 & 106 & 90 & 59 \\ 59 & 55 & 47 & 31 \\ 31 & 28 & 24 & 16 \end{bmatrix};$$

$$g_9, -1, \begin{bmatrix} 408 & 379 & 322 & 212 \\ 220 & 204 & 173 & 114 \\ 114 & 106 & 90 & 59 \\ 59 & 55 & 47 & 31 \end{bmatrix}; g_{10}, 1, \begin{bmatrix} 787 & 730 & 620 & 408 \\ 424 & 393 & 334 & 220 \\ 220 & 204 & 173 & 114 \\ 114 & 106 & 90 & 59 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] V. E. Hoggatt, Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. Boston: Houghton Mifflin Co. , 1969.

[2] D. Kalman, Generalized Fibonacci numbers by matrix methods, The Fibonacci Quarterly 20 (1) (1982) 73-76.

[3] M. C. ER, Sums of Fibonacci numbers by matrix methods, The Fibonacci Quarterly 22 (3) (1984) 204-207.

[4] G. Y. Lee, Fibonacci *k* Lucas numbers and associated bipartite graphs, Lineer Algebra and its Applications 320 (2000) 51-61.

[5] D. Takahashi, A fast algoritm for computing large Fibonacci numbers, Information Processing Letters 75 (2000) 243-246.

[6] E. Karaduman, An application of Fibonacci numbers in matrices, Applied Mathematics and Computation 147 (2004) 903-908.

[7] E. Karaduman, On determinants of matrices with general Fibonacci numbers entries, Applied Mathematics and Computation 167 (2005) 670-676.

[8] D. Tasci, E. Kilic, On the order-k generalized Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation 155 (2004) 637-641.

[9] A. A. Öcal, N. Tuglu*, E. Altinişik, On the representation of *k*-generalized Fibonacci and Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation 170 (2005) 584-596.

[10] N. Taşkara, A. Yalçıner, H. Köse, On the bounds for the norms of FToeplitz and almost FHankel matrices, Afyon Kocatepe University JOURNAL OF SCIENCE, 3 (1-2) 121-128.

[11] S. Vajda, Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section, Chichester, Brisbane, Toronto, New York,1989.

[12] P. F. Byrd, Expansion of analytic functions in polynomials associated with Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 1 (1) (1963) 16-29.

[13] N. D. Cahil, J. R. D'Errico, D. A. Narayan, J. Y. Narayan, Fibonacci determinants, College Math. J. 33 (3) (2002) 221-225.

[14] Beslin, S. and Ligh S., Greatest Common Divisior Matrices, Linear Algebra and Its Applications, 118:69-76, (1989).

[15] Altınışık, E., Hemen Hemen Hilbert Smith Matrislerinin Karakterizasyonu, PhD. Thesis, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, (2001).

[16] Bozkurt, D., On the ℓ_{p} Norms of Almost Cauchy-Toeplitz Matrices, Turkish Journal of Mathematics, Vol:20, No:4, (1996).