



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ
İÇİN GELİŞTİRİLMİŞ İNDİRGENMİŞ
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ**

Sema SERVİ
DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2016
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN GELİŞTİRİLMİŞ İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM
YÖNTEMİ

Sema SERVİ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Galip OTURANÇ

2016,70 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN
Doç. Dr. Aydın KURNAZ
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu tez çalışmasında, uygulamalı birçok bilim dalında karşımıza çıkan çözümü olmayan veya oldukça zor ve zaman alıcı olan, lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem literatürde bulunan indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemine sabit grid aralık algoritması eklenerek oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayrışım yöntemi, Diferensiyel dönüşüm yöntemi, İndirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi, Kısmi türevli diferensiyel denklemler, Sabit grid aralıklı indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi, Varyasyonel iterasyon yöntemi

ABSTRACT

Ph.D THESIS

**IMPROVED REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD FOR
SOLUTION OF LINEAR AND NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

Sema SERVİ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
DOCTOR OF MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Galip OTURANÇ

2016, 70 Pages

Jury

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Assoc. Prof. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

Assoc. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

Assoc. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

In this study, a new method was developed in order to find approximate solutions of partial differential equations that are quite difficult, time consuming or do not have a solution and we face in many applied scientific fields. This method was created by adding fixed grid size algorithm to the reduce differential transform method existing in literature.

Keywords: Adomian decomposition method, Differential transform method, Partial differential equations, Reduced differential transform method, Reduced differential transform method with fixed grid size, Variational iteration method.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Galip OTURANÇ ve Doç. Dr. Yıldray KESKİN danışmanlıklarında hazırlanarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Matematik Ana Bilim Dalında Doktora tez çalışması olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamın oluşmasında ve sürdürülmesinde sonsuz destek ve yardımlarından dolayı çok kıymetli hocalarım, danışmanlarım Prof.Dr. Galip Oturanç ve Doç. Dr. Yıldray Keskin'e, tez izleme komitesinde bulunan değerli fikir ve öngörülerini benden esirgemeyen Prof. Dr. Aşır Genç ve Doç. Dr. Aydın Kurnaz'a teşekkür ve minnetlerimi sunarım.

Son olarak da sonsuz şükran ve teşekkürlerim ailem için. Sahip oldukları koşulsuz sevgi ve destekle bana güç veren, bütün zorlukları aşmamda en büyük katkıları olan kıymetli aileme ve yanımda olamasa da varlığını ve manevi desteğini en derinden hissettiğim rahmetli babama en içten duygularla teşekkür ederim.

Sema SERVİ
KONYA-2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET	İV
ABSTRACT.....	V
ÖNSÖZ	VI
KISALTMALAR	X
1.GİRİŞ.....	1
2.LİTERATÜR ÖZETİ.....	2
3.TEMEL KAVRAMLAR	4
3.1.LİNEER KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER (DEBNATH, 2011)	7
3.1.1.LİNEER KORTEWEG-DE VİRES (KdV) DENKLEMİ	8
3.1.2.LİNEER BOUSSİNESQ DENKLEMİ	8
3.2.LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER (DEBNATH, 2011).....	8
3.2.1.LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİ	8
3.2.2.LİNEER OLMAYAN KLEİN-GORDON DENKLEMİ.....	9
3.2.3.BURGERS DENKLEMİ.....	9
3.2.4.SİNE-GORDON DENKLEMİ.....	9
3.2.5.FİŞER DENKLEMİ	10
3.2.6.BOUSSİNESQ DENKLEMİ.....	10
3.2.7.KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİ.....	10
4. SABİT GRİD ARALIKLI İNDİRGENMİŞ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	11
4.1.DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	12
4.1.1.TEK BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....	12
4.1.2. İKİ BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....	14
4.1.3. N BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....	16
4.1.4. LİNEER OLMAYAN FONKSİYONLARIN DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜMÜ	19
4.1.5. BAŞLANGIÇ KOŞULLARININ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜMÜ	20
4.2 İNDİRGENMİŞ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....	21
4.2.1. İNDİRGENMİŞ N BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....	27
4.2.2.RDTM İÇİN YENİ UYGULAMALAR	31
4.3.SABİT GRİD ARALIKLI İNDİRGENMİŞ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI	37
5. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER.....	64
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	70

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. RDTM yaklaşık çözümü ile Analitik çözümün karşılaştırılması	34
Şekil 4.2. Analitik çözüm ve RDTM çözümünün karşılaştırılması	36
Şekil 4.3. Bölünen her alt aralıktaki yaklaşık fonksiyonlar	38
Şekil 4.4. (a-b) Verilen grafiklerde yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise bizim yöntemimiz ile bulduğumuz yaklaşık çözümü göstermektedir. (a): $N = 5$ (b): $N = 10$ (c): VIM-Analitik Sonuç Karşılaştırılması	47
Şekil 4.5. Verilen grafiklerde, (a): $N = 10$ için RDTM-FGS ile Analitik Sonuç Mutlak Hata Karşılaştırılması (b): VIM ile Analitik Sonuç Mutlak Hata Karşılaştırılması	49
Şekil 4.6. Bu şekilde (a): $N = 5$ değeri için, Yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise bizim yöntemimizle elde edilen sonucu, (b): Yeşil alan analitik çözümü, mavi noktalar VIM ile elde edilen çözümü göstermektedir.	52
Şekil 4.7. Verilen grafiklerde (a): $N = 10$ için RDTM-FGS Mutlak Hata Karşılaştırılması (b): VIM Mutlak Hatakarşılaştırılmaları gösterilmiştir.	54
Şekil 4.8. Bu şekilde, (a): $N = 5$ değeri için, Yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise FGS ile RDTM yöntemiyle elde edilen sonucu, (b): Yeşil alan analitik çözümü, mavi noktalar VIM ile elde edilen çözümü göstermektedir.	57
Şekil 4.9. Verilen grafiklerde (a): $N = 5$ için RDTM-FGS Mutlak Hata Karşılaştırılması (b): VIM Mutlak Hatakarşılaştırılmaları gösterilmiştir.	59
Şekil 4.10. Bu şekilde, (a): $N = 5$ değeri için, Yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise FGS ile RDTM yöntemiyle elde edilen sonucu, (b): Yeşil alan analitik çözümü, mavi noktalar VIM ile elde edilen çözümü göstermektedir.	61
Şekil 4.11. Verilen grafikte $N = 5$ için RDTM-FGS Mutlak Hata karşılaştırılması gösterilmiştir.	61
Şekil 4.12. Bu şekilde, (a): $N = 5$ değeri için FGS ile RDTM yöntemi ile elde edilen sonucu, (b): VIM ile elde edilen sonucu göstermektedir.	63

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4.1. Tek boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesi	13
Çizelge 4.2. İki boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesi	15
Çizelge 4.3. N boyutlu Diferensiyel dönüşüm çizelgesi	18
Çizelge 4.4. Lineer olmayan fonksiyonlar için diferensiyel dönüşüm çizelgesi	20
Çizelge 4.5. x boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi	24
Çizelge 4.6. t boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi	24
Çizelge 4.7. Lineer olmayan fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi	26
Çizelge 4.8. Lineer olmayan fonksiyonlar için t boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi	27
Çizelge 4.9. İndirgenmiş N boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesi	29
Çizelge 4.10. Örnek 4.3'un FGS ile RDTM, VIM yaklaşık sonuçları ile Analitik sonuç değerleri	45
Çizelge 4.11. Örnek 4.3'un RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri	48
Çizelge 4.12. Örnek 4.4'ün FGS ile RDTM, VIM yaklaşık sonuç değerleri ve analitik sonuç değerleri	53
Çizelge 4.13. Örnek 4.4'ün RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri	54
Çizelge 4.14. Örnek 4.5'in RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri	58
Çizelge 4.15. Örnek 4.7'nin RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri	63

KISALTMALAR

DTM	: Diferensiyel dönüşüm yöntemi
FGS-RDTM	: Sabit grid aralıklı indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi
KTDD	: Kısmi türevli diferensiyel denklemler
RDTM	: İndirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi
VIM	: Varyasyonel iterasyon yöntemi

1.GİRİŞ

Günümüzde uygulamalı birçok bilim dalında karşımıza çıkan, elle çözümü imkânsız olup, çözülemeyen problemleri çözebilmek için onları basitleştirmek, modelleyerek gelişen teknoloji ile bilgisayarda basit algoritmalarla çözülebilir hale getirmek büyük önem taşımaktadır. Gün geçtikçe bu konuyla ilgili yapılan çalışmalar teknolojiyle birlikte hızlı bir şekilde ilerlemektedir. Modellemeyle birçok kısmi türevli, adi türevli diferensiyel denklem cebirsel denklemlere dönüştürülüp, nümerik olarak çözüme gidilir ve böylece yaklaşık çözümler bulunur. Bu sebepten, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde nümerik yöntemler son derece önem kazanmıştır. Fakat nümerik yöntemlerle çözülen problemlerde hata oluşmakta ve bu hatanın büyüklüğünü, derecesini bilmek kullanılan nümerik yöntem için önem taşımaktadır. Dolayısıyla kullanılan nümerik yöntemin basit ve kullanışlı olmasından ziyade en önemli özelliği bizi en az hatayla en iyi sonuca götürebilmesi olmalıdır. Bu yüzden, analitik çözümünün olmadığı veya basit bir şekilde hesaplanamadığı problemlerde yaklaşık çözüm elde edebilmek için farklı türde birçok nümerik yöntem denenmiş ve hatta yeni alternatif yöntemler ortaya çıkarılmış veya mevcut yöntemlerde geliştirmelere gidilmiştir.

Bu tezde ise, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için, yeni bir nümerik yöntem oluşturulmuş ve bölüm 4 de tanıtılmıştır. Bu yöntem indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi (RDTM) geliştirilerek oluşturulmuştur. Bu yöntemde, problemde bize verilen çözüm aralıkları eşit aralıklı sabit (fixed) gridlere bölünerek indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi (RDTM) için ilk defa sabit grid aralıklı RDTM algoritması (RDTM with fixed grid size) oluşturulmuştur.

2.LİTERATÜR ÖZETİ

Zhou (1986), bu çalışmada ilk defa, elektrik devre analizlerinde oluşan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için diferensiyel dönüşüm yöntemi tanıtılmıştır.

(Chen, 1996), bu çalışmada diferensiyel dönüşüm yöntemi özdeğer problemine uygulanmış ve diferensiyel dönüşüm yöntemiyle özdeğerler elde edilmiştir.

(Keskin Y., 2008),bu çalışmada, lineer olmayan diferensiyel denklemlerde, lineer olmayan fonksiyonlar için diferensiyel dönüşüm tanımı verilmiş ve uygulaması Emden Fowler diferensiyel denklemi üzerinde gösterilmiştir.

(Hassan, 2004), bu çalışmada, yüksek mertebeden başlangıç değer problemine diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanmış ve yüksek mertebeden başlangıç değer probleminin çözümünde sabit grid aralıklı diferensiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır.

(Arikoglu ve Ozkol, 2005),bu çalışmada, integro diferensiyel denklemler için başlangıç değer probleminin çözümünde diferensiyel dönüşüm yöntemi kullanılmış ve analitik çözümleri nadiren bulunabilen bu denklemler için analitik çözümleri bilinen bazı lineer ve lineer olmayan integro diferensiyel denklemlerin çözümleri araştırılmıştır.

(Chen ve Ho, 1999), bu çalışmada, iki boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımı verilmiş ve kısmi türevli diferensiyel denklemlere ilk defa diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanmıştır.

(Kurnaz, 2005b), bu çalışmada, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için “n”boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımı verilmiş ve bazı lineer ve lineer olmayan denklemler üzerinde örneklendirme yapılmıştır.

(Kurnaz, 2005a), bu çalışmada, adi türevli diferensiyel denklem sistemleri için diferensiyel dönüşüm yöntemi tanımlanmış ve denklemin tanımlandığı çözüm aralığı eşit aralıklara bölünerek her bir aralıkta çözüme gidilmiştir.

(Ayaz, 2003), bu çalışmada, iki boyutlu diferensiyel dönüşüm için bazı teoremler tanımlanmış ve lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri çözülmüştür.

(Özkan O., 2005), bu çalışmada, diferensiyel dönüşüm yönteminin, integro diferensiyel denklem sistemlerinin sınır değer problemlerine bir uygulaması verilmiştir.

(Keskin, 2009),bu çalışmada, kısmi türevli diferensiyel denklemleri çözmek için diferensiyel dönüşüm yöntemine alternatif bir yöntem olan indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ilk defa tanıtılmıştır.

(Servi, 2015a), bu çalışmada, matematik ve mühendislik problemlerinde, matematiksel fizikte karşımıza çıkan ve çözümünü oldukça karmaşık ve zaman alıcı olan Boussinesq denklemi indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüştür.

(Keskin, 2010d), bu çalışmada, indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözümü oldukça zor ve karmaşık olan gaz dinamik denklemi çözülmüştür.

(Keskin, 2010g), bu çalışmada indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle genelleştirilmiş KdV denklemi çözülmüştür.

(Cenesiz, 2010), bu çalışmada, lineer olmayan disperse denklemi indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüştür.

(Keskin, 2010c), bu çalışmada, kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemler, indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüştür.

(Keskin, 2010e),bu çalışmada, düzenlenmiş uzun dalga denklemi indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüştür.

(Keskin, 2010b). bu çalışmada kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik simülasyonları indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüştür.

(Yu, 2016),bu çalışmada, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü için (n+1) boyutlu indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi verilmiştir.

(Jang, 2000),bu çalışmada, diferensiyel dönüşüm yöntemine fixed grid size algoritması eklenerek başlangıç değer problemi çözülmüştür.

(Yusufoglu, 2008),bu çalışmada Klein- Gordon denklemi varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözülmüştür.

(Wazwaz, 2006), bu çalışmada diferensiyel denklemlerin analitik davranışları için modifiye edilmiş Adomian ayrışım yöntemi sunulmuştur.

(Keskin, 2011b), bu çalışmada, Klein- Gordon denklemi indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüştür.

3.TEMEL KAVRAMLAR

Mühendislik, fizik, matematik ve bütün uygulamalı bilimlerde kısmi türevli diferensiyel denklemler (KTDD) karşımıza çıkmaktadır. Bu bilim dallarında karşımıza çıkan problemler, matematiksel terimler ile ifade edildiğinde, içinde bilinmeyen herhangi bir fonksiyonun bir veya daha yüksek mertebeden türevlerini barındıran bir diferensiyel denkleme dönüşür.

Bir $u(x, y, z, \dots)$ fonksiyonu için, x, y, z bağımsız değişkenler, u bağımlı değişken ve F bu değişkenlerden oluşan bir fonksiyon olmak üzere, bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren denkleme kısmi türevli diferensiyel denklemdir. Örnek olarak, $u(x, y, z)$, x, y, z bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu ve u 'nun kısmi türevleri,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

beraber alındığında oluşan kısmi türevli diferensiyel denklemin (KTDD) genel hali,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

olur. Buradan, en genel formdaki birinci mertebeden KTDD,

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

şeklinde, en genel formda iki boyutlu ikinci mertebeden KTDD,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

olarak tanımlanabilir.

Bir KTDD'in mertebesi denklemdaki en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. Yani basitçe örneklendirirsek,

$$u_x + au_y = 0$$

birinci mertebeden,

$$u_{xx} - bu_y = 0$$

ikinci mertebeden,

$$u_x - u_{yyy} = 0$$

üçüncü mertebeden KTDD'dir.

Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için lineerlik kavramı son derece önemlidir. Eğer, $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ kısmi türevli diferensiyel denkleminde bağımsız değişken hariç bağımlı değişkenin kendisi ve türevleri lineerse $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ denklemi lineerdir. Lineerlik kavramını kısaca açıklamak için, birinci mertebeden,

$$k(.)u_x + m(.)u_y = n(.) \quad (3.1)$$

ifadesini alalım. (3.1) kısmi türevli diferensiyel denklemin lineerliği $k(.)$, $m(.)$ ve $n(.)$ katsayılarına göre belirlenir. Eğer denkleminde katsayılar sabit veya bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise kısmi türevli diferensiyel denklem lineer, katsayılar bağımlı değişkeninde bir fonksiyonu ise yarı lineer ve katsayılar birinci türevi içeren fonksiyonlar ise lineer değildir. Yani,

$$u_x + u_y = 0 \quad (\text{Lineer})$$

$$u_x + uu_y = x^2 \quad (\text{Yarı lineer})$$

$$u_x + (u_y)^2 = 0 \quad (\text{Lineer değil})$$

dir. İkinci mertebeden iki bağımsız değişkenli KTDD,

$$a(.)u_{xx} + 2b(.)u_{xy} + c(.)u_{yy} + d(.)u_x + e(.)u_y + f(.)u + g(.) = 0 \quad (3.2)$$

olarak verildiğinde benzer şekilde, eğer verilen denklemde bağımsız değişken hariç bağımlı değişkenin kendisi ve türevleri lineerse, yada $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$ katsayıları sabit veya x, y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu ise denklem lineer, katsayılar x, y, u_x, u_y 'nin bir fonksiyonu ise yarı lineer diğer durumlarda ise lineer değildir.

A, B, C, D, E, F ve G, x ve t bağımsız değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere, ikinci mertebeden lineer KTDD;

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G(x, y)$$

şeklindedir. $G(x, y) = 0$ ise denklem

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = 0$$

şekline dönüşür. Buradan, iki bağımsız değişkenli lineer ikinci mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklemlerin parabolik, eliptik ve hiperbolik olmak üzere 3 farklı tipi olduğunu söyleyebiliriz. KTDD'in bu tiplerden birine dahil olabilmesi için (3.2) denklemindeki ikinci mertebeden türevlerden en az birini içermelidir. Verilen bir KTDD'in çözümü, problemin doğasından oluşan başlangıç ve sınır koşulları ile tipine göre değişir. Buradan, (3.2) cebirsel denkleminin ikinci dereceden cebirsel denklemin diskriminantına (Δ) bakılarak tipi belirlenebilir. Bu durumda;

$$\Delta = B^2 - 4AC \begin{cases} \Delta < 0 & \text{ise} & \text{eliptik} & \text{diferensiyel} & \text{denklem} \\ \Delta = 0 & \text{ise} & \text{parabolik} & \text{diferensiyel} & \text{denklem} \\ \Delta > 0 & \text{ise} & \text{hiperbolik} & \text{diferensiyel} & \text{denklem} \end{cases}$$

olarak gösterilir.

Diferensiyel denklemler, fiziksel problemlerin modellenmesinde kullanılan denklemlerdir. Bu denklemlerin genelde analitik çözümü olmadığından veya son derece karmaşık olduğundan çözmek için sayısal çözüm yöntemleri önem kazanır. Bu yöntemlerde de verilen problem tipine göre isimlendirilip, çözüme gidilir. Eğer kısmi

türevli diferensiyel denklem, belirli bir noktadan başlanıp daha sonra aranan fonksiyonun çözüm bölgesinde adım adım hesaplanabildiği bir problemse, yani t bağımsız değişkeninin $t = 0$ başlangıç anı için $u = u_0$ çözümü problemde verilirse bu koşula Başlangıç Koşulu, bu koşul ile verilen probleme de Başlangıç Değer Problemi veya Cauchy Problemi denilir.

Sınır değer problemi ise, çözümü belirli bir kapalı bölgede aranan problemdir. Bu tür problemlerde bağımsız değişkenin birkaç değeri için aranan fonksiyonun değerleri verilir. Bu değerlere Sınır Şartları, probleme de Sınır Değer Problemi denilir.

Eğer problemde sınırlar belirli bir sonlu bölgede değilse bu durum için sınır sonsuzdadır ifadesi kullanılır. Kısmi türevli diferensiyel denklemler farklı türde sınır şartlarıyla birlikte verilir. (Keskin, 2010a)

1. Doğal (Neumann) Sınır Koşulları: Belirli bir bölgede, çözümü aranan $u(x, t)$

fonksiyonunun bölgenin her bir yerinde $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ ve/veya $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ ifadelerinin

verilmesi ile tanımlanan sınır koşuludur.

2. Esas (Dirichlet) Sınır Koşulları: Belirli bir bölgede, çözümü aranan $u(x, t)$

fonksiyonunun o bölgenin her bir yerinde değerlerinin verilmesi ile tanımlanan sınır koşuludur.

3. Karışık (Robin) Sınır Koşulları: Bu sınır şartı Dirichlet ve Neumann sınır şartlarının özelliklerinin ikisini de taşır. Yani, belirli bir bölgede, çözümü aranan

$u(x, t)$ fonksiyonunun o bölgenin her bir yerinde $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + au(x, t)$ ve/veya

$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + au(x, t)$ değerlerinin verilmesi ile tanımlanan sınır koşuludur.

Şimdi de, literatürde bilinen lineer ve lineer olmayan özel denklemlerden bazılarını tanıtalım:

3.1. Lineer Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler (Debnath, 2011)

Eliptik, parabolik ve hiperbolik denklem tiplerinde tanıttığımız; Isı denklemi, Dalga denklemi, Laplace denklemi, Poisson denklemi, Helmholtz denklemi, Telgraf denklemi ve Klein-Gordon denklemi de lineer kısmi türevli diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir. Aşağıda, yukarıda bahsi geçmeyen lineer kısmi türevli

diferensiyel denklemlerden lineer KdV ve Boussinesq denklem tanımlamaları verilmiştir.

3.1.1. Lineer Korteweg-de Vries (KdV) denklemi

$$u_t - \alpha^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (\alpha, \beta \text{ keyfi sabitler})$$

şeklindeki denkleme Lineer Korteweg-de Vries denklemi denilir. Kanallardaki, lineer büyük, uzun plazma dalgalarının ve su dalgalarının yayılımını modelleyen denklemdir. (Brauer, 2000)

3.1.2. Lineer Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 u + \beta^2 \nabla^2 u_{tt} = 0 \quad (\alpha, \beta \text{ keyfi sabitler})$$

şeklindeki denkleme lineer Boussinesq denklemi denilir. Bu denklem, zamanla dağılmayan bir dalga çözümü kabul eder ve elastikte bir kanalda boyuna dalgaların, uzun su dalgaların yayılımında modellenen denklemdir (Whitham, 1975).

3.2. Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler

Literatürde; matematik, fizik, kimya ve birçok mühendislik alanlarındaki uygulamalarda, lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklem içeren problemlerle karşılaşılmaktadır. Bu lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin bazılarının genel hallerini aşağıda tanımlayalım.

3.2.1. Lineer olmayan dalga denklemi

Lineer olmayan dalgaların yayılımını, iletimini modelleyen denklemlerdir. $c(u)$, u 'nun bir fonksiyonu olmak üzere,

$$u_t - c(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

ifadesi birinci mertebeden lineer olmayan dalga denklemdir(Debnath, 2011).

3.2.2. Lineer olmayan Klein-Gordon denklemi

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u + V'(u) = 0$$

şeklinde tanımlanan denklemdir. Denklemden verilen $V'(u)$, $V(u)$ elektromanyetik alanda potansiyel enerjinin türevidir ve u 'nin lineer olmayan bir fonksiyonudur(Debnath, 2011).

3.2.3. Burgers denklemi

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad x \in t, t > 0$$

şeklinde tanımlanan denklemdir. Denklemden ν , kinematik viskoziteyi göstermektedir. Burgers denklemi, akışkanlar dinamiğindeki yaygın dalgalar için en basit lineer olmayan denklemdir(Debnath, 2011).

3.2.4. Sine-Gordon denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0$$

şeklinde tanımlanan denklemdir. Bu denklem, diferensiyel geometrinin birçok bilinen sorunlarını gidermek amacıyla yapılan çalışmalarda ortaya çıkmıştır. Hiperbolik tipte bir kısmi diferensiyel denklemdir. D'Alembert operatörü ve bilinmeyen sinüs fonksiyonunu içerir. Birçok fiziksel uygulamalarda, izafiyet alan teorisinin uygulamalarında kullanılır(Debnath, 2011).

3.2.5.Fisher denklemi

$$u_t - \nu u_{xx} = k \left(u - \frac{u}{\kappa} \right), \quad x \in R, t > 0$$

şeklinde tanımlanan denklemdir. Burada ν , k ve κ sabitlerdir ve çok sayıda fiziksel ve kimyasal sistemlerin dalga yayılım çalışmaları için bir lineer olmayan model olarak kullanılır. Fisher, bu denklemi bir genin, bir popülasyonda dalga yayılımını araştırmak için tanıtmıştır. Lojistik büyüme difüzyon olaylarındaki çalışmalarda kullanılır(Debnath, 2011).

3.2.6.Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + (3u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

şeklinde tanımlanan denklemdir. Hem pozitif hem de negatif olmak üzere her iki yönde yayılan Boussinesq denklemi, bir boyutlu lineer olmayan, zayıf su dalgalarının dağılımıyla tanımlanır(Debnath, 2011).

3.2.7.Korteweg–de Vries denklemi

$$u_t - \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0$$

şeklinde tanımlanan denklemdir. Denkleminde α ve β sabitlerdir. Tek yönlü sığ su dalgalarının dağılımını tanımlamak için 1895 yılında Korteweg ve Gustav de Vries tarafından tanıtılmıştır. $\alpha = 6$ ve $\beta = 1$ değerleri için,

$$u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0$$

lineer olmayan KdV denkleminin genel formlarından biri oluşur(Brauer, 2000).

4. SABİT GRİD ARALIKLI İNDİRGENMİŞ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Günümüze kadar geçen süreçte adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde daha kolay ve kısa sürede çözüme ulaşmak adına, Varyasyon iterasyon yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi, Homotopi pertürbasyon yöntemi, Laplace yöntemi, Fourier yöntemi, Diferensiyel dönüşüm yöntemi, İndirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi gibi birçok yaklaşık çözüm yöntemi literatüre girmiştir. Diferensiyel dönüşüm yöntemi ilk olarak 1986 yılında Zhou tarafından tanıtılmıştır. Yöntemin tanıtılmasıyla Chen 1999 yılında, lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemi için cebirsel seri çözüm denklemleri oluşturarak bu yöntemi geliştirdi. Daha sonra Diferensiyel dönüşüm yöntemi, çeşitli mühendislik alanlarında, fen bilimlerinde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim alanında karşılaşılan problemlerin çözümünü bulabilmek için birçok bilim adamı tarafından çalışılıp geliştirildi (Chen, 1996; Chen, 1999; Ayaz, 2003; Arikoglu, 2005; Kurnaz, 2005b; Keskin, 2008). Bu yöntemle kısmi türevli diferensiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülerek, denklemlerde karşımıza çıkan karmaşık integral ifadelerinden kurtulmuş ve basit işlemlerle sonuca ulaşılmıştır. Daha sonra yaklaşık çözüm hesaplanırken karşımıza çıkan işlemleri ve iterasyon sayısını azaltıp, daha hızlı sonuç elde edebilmek için 2009 yılında DTM'nin geliştirilmesiyle Keskin tarafından, İndirgenmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi (RDTM) oluşturulmuştur. Bu yöntem bilinen yöntemlerle karşılaştırıldığında son derece verimli ve etkili bir yöntem olduğu görülmüştür. Fakat gelişen teknoloji ve bilimle varolan yöntemlerde daha hızlı yakınsayan, daha verimli, daha hassas sonuçlar elde etmek için iyileştirmelere ihtiyaç duyulmuştur. Bu bölümde bu amaçla, bu tez çalışmasının ana kısmı oluşturulmuş ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi (RDTM) geliştirilerek yeni bir yöntem sunulmuştur. Bu yöntemde, problemde bize verilen çözüm aralıkları eşit aralıklı sabit (fixed) gridlere bölünerek indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi (RDTM) için ilk defa sabit grid aralıklı RDTM algoritması (RDTM with fixed grid size) oluşturulmuştur. Fixed grid size algoritması ilk olarak, diferensiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak, Jang ve arkadaşları taraflarından lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemine ve arkasından da Kurnaz ve Oturanç tarafından adi diferensiyel denklem sistemlerine uygulanmış ve iyi sonuçlar elde edilmiştir (Jang, 2000; Kurnaz, 2005a).

Bu yöntemin verimliliği ve avantajı literatürde olan homojen ısı denklemi, Burger's denklemi ve Klein Gordon denklemleri üzerinde uygulamalar bölümünde verilmiştir. Bu yeni yöntemle elde edilen yaklaşık çözüm, bilinen analitik çözüm ve Varyasyonel iterasyon yönteminden (VIM) elde edilen çözümler karşılaştırılmış her üç çözüm arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Bu bölümde, sabit grid aralıklı indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi tanıtılmadan önce yöntemin temelini oluşturan diferensiyel dönüşüm yöntemi ve indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yönteminin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

4.1.Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

4.1.1.Tek boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi

Tek boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi adi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılır.

Zhou,(Zhou, 1986)'deki yayınında tek değişkenli $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonunu $Y(k)$ kabul ederek, $y(x)$ 'in diferensiyel dönüşüm fonksiyonunu,

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (4.1)$$

diferensiyel ters dönüşüm fonksiyonunu:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \quad (4.2)$$

ve (4.1) eşitliğinin (4.2) eşitliğinde yerine yazılması ile $y(x)$ 'in diferensiyel dönüşüm fonksiyonunu düzenleyerek,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} x^k \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Daha sonra yukarıdaki tek boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi dönüşümlerine ilaveten Zhou, (Zhou, 1986), Chen, Ho, (Chen, 1996), Chen, Liu (Chen, 1998), Arikoglu, Özkol,(Arikoglu, 2005), Hassan, (Hassan, 2004) çalışmalarında tek boyutlu diferensiyel dönüşüm için verilen fonksiyonların dönüşüm karşılıklarını ifade eden teoremler tanımlamışlardır. Bu dönüşümler (Keskin, 2008)'den faydalanılarak aşağıdaki tek boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesinde gösterilmiştir.

$y(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ tek değişkenli fonksiyonları için $Y(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ sırasıyla verilen fonksiyonların diferensiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

Çizelge 4.1. Tek boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Diferensiyel Dönüşüm Karşılığı
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$
$y(x) = cu(x)$	$Y(k) = cU(k)$
$y(x) = \frac{d}{dx}u(x)$	$Y(k) = (k+1)U(k)$
$y(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$Y(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$
$y(x) = u(x)\frac{d^2 v(x)}{dx^2}$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2)$
$y(x) = \frac{d}{dx}u(x)\frac{d}{dx}v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$
$y(x) = u(x)v(x)\frac{d^2 s(x)}{dx^2}$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} (k-r-t+2)(k-r-t+2)U(r)V(t)S(k-r-t+2)$
$y(x) = u(x)v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$y(x) = u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^{r_1} \sum_{r=r_1}^{r_2} \dots \sum_{r_{n-1}}^k U_1(r)U_2(r_1-r)\dots U_n(k-r_{n-1})$
$y(x) = x^m$	$Y(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$
$y(x) = 1$	$Y(k) = \delta(k)$
$y(x) = x$	$Y(k) = \delta(k-1)$
$y(x) = a^{\lambda x}, \lambda \in \mathfrak{R}$	$Y(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$

$y(x) = e^{\lambda x}$	$Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$
$y(x) = \sinh(\lambda x)$	$Y(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ tek ise} \\ 0, & k \text{ çift ise} \end{cases}$
$y(x) = \cosh(\lambda x)$	$Y(k) = \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$
$y(x) = \sin(ax + b)$	$Y(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$
$y(x) = \cos(ax + b)$	$Y(k) = \frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$
$y(x) = \int_{x_0}^x u(t) dt$	$Y(k) = \frac{U(k-1)}{k}$
$y(x) = v(x) \int_{x_0}^x u(t) dt$	$Y(k) = V(k) \otimes \frac{U(k-1)}{k}$
$y(x) = \int_{x_0}^x u(t)v(t) dt$	$Y(k) = \frac{U(k-1) \otimes V(k-1)}{k}$

4.1.2. İki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi

Chen,(Chen, 1999)'deki yayında iki değişkenli $w(x, y)$ fonksiyonunun $W(k, h)$ diferensiyel dönüşümünü;

$$Y(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (4.4)$$

diferensiyel ters dönüşümünü,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanmış ve (4.5)'in (4.4)'da yerine yazılmasıyla da;

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^k y^h \quad (4.6)$$

eşitliği ifade edilmiştir.

Chen, (Chen, 1999)ve Ayaz, (Ayaz, 2003)'deki çalışmalarında iki boyutlu diferensiyel dönüşüm için birtakım yeni dönüşüm fonksiyonları tanımlamıştır. Bu dönüşümler (Keskin, 2008)'den faydalanılarak aşağıdaki iki boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesinde gösterilmiştir.

İki değişkenli $w(x, y)$ $u(x, y)$ $v(x, y)$ fonksiyonları için, $W(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ sırasıyla verilen fonksiyonların diferensiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

Çizelge4.2.İki boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Diferensiyel Dönüşüm Karşılığı
$w(x, y)$	$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{(0,0)}$
$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$
$w(x, y) = cu(x, y) \ (c \in \mathbb{R})$	$W(k, h) = cU(k, h) \ (c \in \mathbb{R})$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial^r u(x, y)}{\partial x^r}$	$W(k, h) = (k+1)(k+2)\cdots(k+r)U(k+r, h) = \frac{(k+r)!}{k!}U(k+r, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial^s u(x, y)}{\partial y^s}$	$W(k, h) = (h+1)(h+2)\cdots(h+s)U(k, h+s) = \frac{(h+s)!}{h!}U(k, h+s)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \otimes V(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V(r, h-s)U(k-r, s)$

$w(x, y) = x^m y^n$	$W(k, h) = \delta(k - m, h - n) = \begin{cases} 1, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)s(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \otimes V(k, h) \otimes S(k, h)$
$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k - r + 2)(k - r + 1) U(r, h - s) V(k - r + 2, s)$
$w(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \frac{\partial}{\partial x} v(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r + 1)(k - r + 1) U(r + 1, h - s) V(k - r + 1, s)$
$w(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \frac{\partial}{\partial y} v(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s + 1)(h - s + 1) U(r, h - s + 1) V(k - r, s + 1)$
$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial s(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t + 1)(k - r - t - 1) \times U(r, h - s - p) V(t + 1, s) S(k - r - t + 1, p)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial x^2}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k - r - t + 2)(k - r - t + 1) \times U(r, h - s - p) V(t, s) S(k - r - t + 2, p)$
$w(x, y) = x^n y^m u(x, y)$	$W(k, h) = U(k - n, h - m)$
$w(x, y) = e^{ax+by+c}$	$W(k, h) = \frac{a^k b^h}{k! h!} e^c$
$w(x, y) = a^{ax+by+c}$	$W(k, h) = \frac{a^k b^h}{k! h!} \ln(a)^{k+h}$
$w(x, y) = \sin(ax + by + c)$	$W(k, h) = \frac{a^k b^h}{k! h!} \sin\left(\frac{\pi}{2}(k + h) + c\right)$

4.1.3. N boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi

Kurnaz ve arkadaşları (Kurnaz, 2005b)'daki yayında n boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemini anlatmış ve n değişkenli $w(x_1, x_2, \dots, x_n), u(x_1, x_2, \dots, x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonları için dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $W(k_1, k_2, \dots, k_n), U(k_1, k_2, \dots, k_n), V(k_1, k_2, \dots, k_n)$ olmak üzere aşağıda tanımlanan bağıntıları elde etmişlerdir.

İlk olarak n değişkenli $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun $W(k_1, k_2, \dots, k_n)$ dönüşümü,

$$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} w(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right]_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_n=0}} \quad (4.7)$$

diferensiyel ters dönüşümünü,

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} W(k_1, k_2, \dots, k_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (4.8)$$

olarak tanımlamış ve (4.7)'in (4.8)'da yerine yazılmasıyla da;

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left[\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} w(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right]_{\substack{x_1=0 \\ \vdots \\ x_n=0}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \quad (4.9)$$

diferensiyel dönüşümlerini oluşturmuşlardır Bu genel dönüşümler tanımlandıktan sonra (Kurnaz, 2005b) ve (Özkan O., 2005)'de verilen fonksiyonların dönüşüm karşılıklarını ifade eden teoremler aşağıdaki N boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesinde gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. N boyutlu Diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Diferensiyel Dönüşüm Karşılığı
$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \pm v(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$W((k_1, k_2, \dots, k_n) = U(k_1, k_2, \dots, k_n) \pm V(k_1, k_2, \dots, k_n)$
$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \cdot u(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = c \cdot U(k_1, k_2, \dots, k_n)$
$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot v(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{a_1=0}^{k_1} \sum_{a_2=0}^{k_2} \dots \sum_{a_n=0}^{k_n} U(a_1, k_2 - a_2, \dots, k_n - a_n) V(k_1 - a_1, a_2, \dots, a_n)$
$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = (k+1)U(k+1, k_2, \dots, k_n)$
$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} u(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1+r_1)!}{k_1!} \frac{(k_2+r_2)!}{k_2!} \dots \frac{(k_n+r_n)!}{k_n!} U(k_1+r_1, k_2+r_2, \dots, k_n+r_n)$
$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \delta(k_1 - m_1, k_2 - m_2, \dots, k_n - m_n)$ $= \begin{cases} 1 & k_i = m_i, i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$
$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{x_1^0}^{x_1} U(t_1, x_2, x_3 \dots x_n) dt_1$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{U(k_1-1, k_2, k_3, \dots, k_n)}{k_1}, k_1 \geq 1$

4.1.4. Lineer olmayan fonksiyonların diferensiyel dönüşümü

Keskin ve Oturanç, (Keskin Y., 2008)' da ki yayınlarında diferensiyel denklemlerin çözümünde lineer olmayan fonksiyonların diferensiyel dönüşüm yöntemindeki karşılıklarını göstermişlerdir. $u(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ ve $u(x)$ fonksiyonunun lineer olmayan fonksiyonu $Nu(x)$ olmak üzere, lineer olmayan $Nu(x)$ ' in diferensiyel dönüşümü;

$$N(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} Nu(x) \right]_{x=0}$$

ya da

$$N(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k Nu(x)}{dx^k} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} N \left(\sum_{r=0}^{\infty} U(r)x^r \right) \right]_{x=0}$$

olarak tanımlanmıştır.

Burada $Nu(x) = u^2(x)$ ve $Nu(x) = \sin(u(x))$ lineer olmayan fonksiyonları için diferensiyel dönüşümler tanımlanmış ve birtakım lineer olmayan fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri çizelge halinde sunulmuştur.

Çizelge 4.4.Lineer olmayan fonksiyonlar için diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$Ny(x) = y^m(x)$	$N(0) = Y^m(0)$ $N(1) = mY^{m-1}(0)Y(1)$ $N(2) = \frac{1}{2}m(m-1)Y^{m-2}(0)Y^2(1) + mY(0)^{m-1}Y(2)$ $N(3) = \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)Y^{m-3}(0)Y^3(1) + m(m-1)Y^{m-2}(0)Y(2)Y(1)$ $+ mY^{m-1}(0)Y(3)$ \vdots
$Ny(x) = \sin(y(x))$	$N(0) = \sin(Y(0))$ $N(1) = \cos(Y(0))Y(1)$ $N(2) = \cos(Y(0))Y(2) - \frac{1}{2!}\sin(Y(0))Y^2(1)$ $N(3) = \cos(Y(0))Y(3) - \sin(Y(0))Y(2)Y(1) - \frac{1}{3!}\cos(Y(0))Y^3(1)$ \vdots
$Ny(x) = \cos(y(x))$	$N(0) = \cos(Y(0))$ $N(1) = -\sin(Y(0))Y(1)$ $N(2) = -\sin(Y(0))Y(2) - \frac{1}{2!}\cos(Y(0))Y^2(1)$ $N(3) = -\sin(Y(0))Y(3) - \cos(Y(0))Y(2)Y(1) + \frac{1}{3!}\sin(Y(0))Y^3(1)$ \vdots
$Ny(x) = e^{y(x)}$	$N(0) = e^{Y(0)}$ $N(1) = Y(1)e^{Y(0)}$ $N(2) = \left(Y(2) + \frac{1}{2!}Y^2(1) \right) e^{Y(0)}$ $N(3) = \left(Y(3) + Y(1)Y(2) + \frac{1}{3!}Y^3(1) \right) e^{Y(0)}$ \vdots

4.1.5. Başlangıç koşullarının diferensiyel dönüşümü

Tanımlanan herhangi bir $y(x)$ fonksiyonunun, başlangıç ve sınır koşullarının basit dönüşümlerini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz,

$y(x)$ fonksiyonunda $x = 0$ noktası için,

$$y(0) = 0 \xrightarrow{\text{DTM dönüşümü}} Y(0) = 0$$

$$\left. \frac{d^m y(x)}{dx^m} \right|_{x=0} \xrightarrow{\text{DTM dönüşümü}} Y(m) = 0$$

$y(x)$ fonksiyonunda $x = 1$ noktası için,

$$y(1) = 0 \xrightarrow{\text{DTM dönüşümü}} \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) = 0$$

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=1} = 0, \xrightarrow{\text{DTM dönüşümü}} \sum_{k=0}^{\infty} kY(k) = 0$$

$$\left. \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \xrightarrow{\text{DTM dönüşümü}} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)Y(k) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

4.2 İndirgenmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu bölüm anlatılırken Yıldırım Keskin'in "Lineer ve Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler için Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi" isimli doktora tezinden faydalanılmıştır (Keskin, 2010a).

İki boyutlu kısmi türevli diferensiyel denklemin çözümü olan $u(x, t)$ fonksiyonunu,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h \quad (4.10)$$

şeklinde verip $u(x, t)$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu $U(k, h)$ 'ı,

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} u(x, t) \right]_{x=0, t=0} \quad (4.11)$$

olarak tanımlamışlardır. (4.10)'de tanımlanan $u(x, t)$ fonksiyonunun açılımı yapıldığında,

$$U_{0,0}, U_{0,1}x, U_{0,2}x^2, \dots, U_{1,0}t, U_{1,1}tx, U_{1,2}tx^2, \dots, U_{2,0}t^2, U_{2,1}t^2x, \dots$$

serisi elde edilmiş ve elde edilen bu serideki terimler t 'nin kuvvetlerine göre düzenlendiğinde,

$$t^0 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,0} x^k, t^1 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,1} x^k, t^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,2} x^k \dots \text{bulunup böylece,}$$

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$$

formülü elde edilmiş ve indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi tanımlamaları oluşturulmuştur.

$u(x,t)$ fonksiyonu x uzayı civarında ve t zamanına bağlı, sürekli diferensiyellenebilir ve analitik bir fonsiyon olmak üzere,

$$U_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t) \right]_{t=0} \quad (4.12)$$

olarak tanımlanır. Burada ilk olarak t boyunca hesaplanacak olan $U_k(x)$ spektrum fonksiyonu için tanımlamalar verilirse, $u(x,t)$ analitik fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $U_k(x)$ 'nin t boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4.13) eşitliğinde (4.12) eşitliği yerine yazıldığında

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t) \right]_{t=0} t^k \quad (4.14)$$

eşitliği elde edilmiştir.

Eğer, çözüm x boyunca hesaplanacak olursa, iki bileşenli $u(x,t)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $U_k(x)$ olmak üzere, $u(x,t)$ 'nin x boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)x^k \quad (4.15)$$

olur. $u(x,t)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $U_k(x)$ olmak üzere $u(x,t)$ 'nin indirgenmiş diferensiyel dönüşümü,

$$U_k(t) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t) \right]_{x=0} \quad (4.16)$$

şeklinde, $U_k(t)$ 'nin x boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)x^k \quad (4.17)$$

olarak tanımlanır. (4.15) eşitliğinde (4.16) eşitliği yerine yazıldığında,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t) \right]_{x=0} x^k \quad (4.18)$$

eşitliğini elde edilmiştir.

Yukarıda verilen temel tanımlamalardan sonra Keskin ve Oturanç(Keskin, 2009)'deki çalışmalarında çeşitli fonksiyonların indirgenmiş diferensiyel dönüşümlerini ifade eden teoremler tanımlamışlardır.(Keskin, 2010a)'dan faydalanılarak, tanımlanan bazı fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm karşılıkları aşağıdaki Çizelge 4.5' de, t boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm karşılıkları da Çizelge 4.6'da verilmiştir.

Çizelge 4.5. x boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$w(x,t)$	$W_k(t) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} w(x,t) \right]_{t=0}$
$w(x,t) = u(x,t) \pm v(x,t)$	$W_k(t) = U_k(t) \pm V_k(t)$
$w(x,t) = cu(x,t) \ (c \in R)$	$W_k(t) = cU_k(t) \ (c \in R)$
$w(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$	$W_k(t) = (k+1)U_{k+1}(t)$
$w(x,t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x,t)$	$W_k(t) = \frac{(k+r)!}{k!} U_{k+r}(t)$
$w(x,t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} u(x,t)$	$W_k(t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} U_k(t)$
$w(x,t) = u(x,t)v(x,t)$	$W_k(t) = \sum_{r=0}^k V_r(t)U_{k-r}(t) = \sum_{k=0}^k U_r(t)V_{k-s}(t)$
$w(x,t) = x^m t^n$	$W_k(t) = \delta(k-m)t^n$
$w(x,t) = x^m t^n u(x,t)$	$W_k(t) = U_{k-m}(t)t^n$

Çizelge 4.6. t boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$w(x,t)$	$W_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} w(x,t) \right]_{t=0}$
$w(x,t) = u(x,t) \pm v(x,t)$	$W_h(t) = U_h(t) \pm V_h(t)$
$w(x,t) = cu(x,t) \ (c \in R)$	$W_h(t) = cU_h(t) \ (c \in R)$

$w(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$	$W_h(x) = \frac{\partial}{\partial x} U_h(x)$
$w(x,t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x,t)$	$W_h(x) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} U_h(x)$
$w(x,t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} u(x,t)$	$W_h(x) = \frac{(h+s)!}{h!} U_{h+s}(x)$
$w(x,t) = u(x,t)v(x,t)$	$W_h(x) = \sum_{s=0}^h V_s(x)U_{h-s}(x) = \sum_{s=0}^h U_s(x)V_{h-s}(x)$
$w(x,t) = x^m t^n$	$W_h(x) = x^m \delta(h-n)$
$w(x,t) = x^m t^n u(x,t)$	$W_h(x) = x^m U_{h-n}(x)$

Keskin, (Keskin, 2010a) de kısmi türevli diferensiyel denklemlerdeki $u(x,t)$ fonksiyonunun, lineer olmayan teriminin x boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşümü fonksiyonunu $Nu(x,t)$ 'i

$$N_k(t) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} Nu(x,t) \right]_{x=0} \quad (4.19)$$

$$N_k(t) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} Nu \left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)x^k \right) \right]_{x=0}$$

şeklinde ve lineer olmayan $Nu(x,t)$ ' nin t boyunca hesaplanacak çözümün diferensiyel dönüşümü,

$$N_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h}{\partial t^h} Nu(x,t) \right]_{t=0} \quad (4.20)$$

$$N_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h}{\partial t^h} Nu \left(\sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h \right) \right]_{t=0}$$

olarak tanımlamış ve aşağıdaki Çizelge 4.7. ve Çizelge 4.8'de bazı lineer olmayan fonksiyonların indirgenmiş dönüşüm karşılıklarını x ve t boyunca göstermiştir.

Çizelge 4.7. Lineer olmayan fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$Nu(x,t) = u^m(x,t)$	$N_0(t) = U_0^m(t)$ $N_1(t) = mU_0^{m-1}(t)U_1(t)$ $N_2(t) = \frac{1}{2}m(m-1)U_0^{m-2}(t)U_1^2(t) + mU_0^{m-1}(t)U_2(t)$ $N_3(t) = \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)U_0^{m-3}(t)U_1^3(t) + m(m-1)U_0^{m-2}(t)U_2(t)U_1(t)$ $+ mU_0^{m-1}(t)U_3(t)$ \vdots
$Nu(x,t) = \cos(u(x,t))$	$N_0(t) = \cos(U_0(t))$ $N_1(t) = -\sin(U_0(t))U_1(t)$ $N_2(t) = -\sin(U_0(t))U_2(t) - \frac{1}{2!}\cos(U_0(t))U_1^2(t)$ $N_3(t) = -\sin(U_0(t))U_3(t) - \cos(U_0(t))U_2(t)U_1(t) + \frac{1}{3!}\sin(U_0(t))U_1^3(t)$ \vdots
$Nu(x,t) = e^{u(x,t)}$	$N_0(t) = e^{U_0(t)}$ $N_1(t) = U_1(t)e^{U_0(t)}$ $N_2(t) = \left(U_2(t) + \frac{1}{2!}U_1^2(t) \right) e^{U_0(t)}$ $N_3(t) = \left(U_3(t) + U_1(t)U_2(t) + \frac{1}{3!}U_1^3(t) \right) e^{U_0(t)}$ \vdots
$Nu(x,t) = \ln(u(x,t))$	$N_0(t) = \ln(U_0(t))$ $N_1(t) = \frac{U_1(t)}{U_0(t)}$ $N_2(t) = \frac{U_2(t)}{U_0(t)} - \frac{1}{2} \frac{U_1^2(t)}{U_0^2(t)}$ $N_3(t) = \frac{U_3(t)}{U_0(t)} - \frac{U_1(t)U_2(t)}{U_0^2(t)} + \frac{1}{3} \frac{U_1^3(t)}{U_0^3(t)}$ \vdots

Çizelge 4.8. Lineer olmayan fonksiyonlar için t boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$Nu(x,t) = u^m(x,t)$	$N_0(x) = U_0^m(x)$ $N_1(x) = mU_0^{m-1}(x)U_1(x)$ $N_2(x) = \frac{1}{2}m(m-1)U_0^{m-2}(x)U_1^2(x) + mU_0^{m-1}(x)U_2(x)$ $N_3(x) = \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)U_0^{m-3}(x)U_1^3(x) + m(m-1)U_0^{m-2}(x)U_2(x)U_1(x) + mU_0^{m-1}(x)U_3(x)$
$Nu(x,t) = \cos(u(x,t))$	$N_0(x) = \cos(U_0(x))$ $N_1(x) = -\sin(U_0(x))U_1(x)$ $N_2(x) = -\sin(U_0(x))U_2(x) - \frac{1}{2!}\cos(U_0(x))U_1^2(x)$ $N_3(x) = -\sin(U_0(x))U_3(x) - \cos(U_0(x))U_2(x)U_1(x) + \frac{1}{3!}\sin(U_0(x))U_1^3(x)$
$Nu(x,t) = e^{u(x,t)}$	$N_0(x) = e^{U_0(x)}$ $N_1(x) = U_1(x)e^{U_0(x)}$ $N_2(x) = \left(U_2(x) + \frac{1}{2!}U_1^2(x) \right) e^{U_0(x)}$ $N_3(x) = \left(U_3(x) + U_1(x)U_2(x) + \frac{1}{3!}U_1^3(x) \right) e^{U_0(x)}$
$Nu(x,t) = \ln(u(x,t))$	$N_0(x) = \ln(U_0(x))$ $N_1(x) = \frac{U_1(x)}{U_0(x)}$ $N_2(x) = \frac{U_2(x)}{U_0(x)} - \frac{1}{2} \frac{U_1^2(x)}{U_0^2(x)}$

4.2.1. İndirgenmiş N boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi

Keskin, (Keskin, 2010a; Keskin Y., 2012) da N değişkenli $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ fonksiyonunun indirgenmiş diferensiyel dönüşümünü $U(k_1, k_2, \dots, k_N)$ kabul ederek, $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ' nin x_1 boyunca çözümü,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_2, \dots, x_N) x_1^k \quad (4.21)$$

olarak, $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ' nin x_1 boyunca çözümlenmiş diferensiyel dönüşümü

$$U_k(x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(x_1, x_2, \dots, x_N) \right]_{x_1=0} \quad (4.22)$$

şeklinde, $U_k(x_2, \dots, x_N)$ ' nin x_1 boyunca indirgenmiş diferensiyel dönüşüm fonksiyonunun tersini;

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_2, \dots, x_N) x_1^k \quad (4.23)$$

ile tanımlanmış ve (4.22) eşitliğinin (4.21) eşitliğinde yerine yazılmasıyla aşağıdaki (4.24) eşitliği elde edildiğini ifade etmiştir.

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(x_1, x_2, \dots, x_N) \right]_{x_1=0} x_1^k \quad (4.24)$$

Aşağıdaki Çizelge 4.9. da ise bazı fonksiyonların N boyutlu indirgenmiş diferensiyel dönüşüm karşılıklarını veren dönüşümler gösterilmiştir.

Çizelge 4.9. İndirgenmiş N boyutlu diferensiyel dönüşüm çizelgesi

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$u(x_1, \dots, x_N)$	$U_k(x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(x_1, x_2, \dots, x_N) \right]_{x_1=0}$
$w(x_1, \dots, x_N) = u(x_1, \dots, x_N) \pm v(x_1, \dots, x_N)$	$W_k(x_2, \dots, x_N) = U_k(x_2, \dots, x_N) \pm V_k(x_2, \dots, x_N)$
$w(x_1, \dots, x_N) = cu(x_1, \dots, x_N)$	$W_k(x_2, \dots, x_N) = cU_k(x_2, \dots, x_N)$
$w(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, \dots, x_N)$	$W_k(x_2, \dots, x_N) = (k+1)U_{k+1}(x_2, \dots, x_N)$
$w(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, \dots, x_N)$	$W_k(x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_2} U_k(x_2, \dots, x_N)$
$w(x_1, \dots, x_N) = x_1^m f(x_2, \dots, x_N)$	$W_k(x_2, \dots, x_N) = \delta(k-m) f(x_2, \dots, x_N)$

Daha sonra Yu ve arkadaşları, (Yu, 2016)'de $(n+1)$ boyutlu kısmi diferensiyel denklemlere RDTM uygulamışlardır.

Keskin ve çalışma arkadaşları, Keskin'in geliştirdiği bu yöntemle birçok farklı problemi çözmüş ve literatüre ciddi katkıda bulunmuşlardır.(Keskin, 2011a)'de Sine Gordon denklemi,(Keskin, 2010e)'de düzenlenmiş uzun dalga denklemi,(Keskin, 2010f)'de lineer ve lineer olmayan dalga denklemi,(Keskin, 2010g)'de geliştirilmiş KdV denklemi,(Cenesiz, 2010)'de lineer olmayan dağılım $K(m, n)$ denklemi, (Keskin, 2010d)'da gaz dinamik denklemi,(Servi, 2012)'de coupled Sine Gordon denklemi, (Keskin, 2011b)'da Klein Gordon denklemi,(Servi, 2015a)'de geliştirilmiş Boussinesq denklemi çözülmüştür. İlaveten, (Keskin, 2010b)'da da kısmi türevli diferensiyel denklem sistemini çözmüşlerdir.

Bu süreçte birçok akademisyende yöntemin gelişmesine katkıda bulunmuş RDTM ile farklı denklemleri çözüp RDTM ile alakalı yayınlar yapmışlar ve halende yapmaya devam ediyorlardır.(Saravanan, 2013)'de Newell–Whitehead–Segel denklemi çözülmüş ve Adomian Ayrışım yöntemi ile karşılaştırılmış,(Rawashdeh, 2014a)'da bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin kesin ve yaklaşık çözümleri bulunmuştur.(Kanzari, 2016)'de Advection ve the Heat-Like denklemleri, (Taghavi, 2014)'da Reaksiyon-Difüzyon Brusselator sistemi, (Az-Zo'bi, 2015)'de Şok dalga denklemi, (Taghavi, 2015b)'de lineer olmayan Reaksiyon-Difüzyon-Konveksiyon denklemi, (Akbari, 2014)'da lineer olmayan iki boyutlu Brusselator denklemi, (Rawashdeh, 2015)'da Telgraf ve Cahn-Hilliard denklemleri, (Rawashdeh, 2014c)'de lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çiftli sistemleri,(İbiş, 2012)'de lineer olmayan evrim denklemleri, (Shukla, 2015)'de biyolojik nüfus modeli, (Taghizadeh, 2011)'de Burger denklemi, (Taghizadeh, 2014)'de (1+1)boyutlu lineer olmayan Boussinesq denklemi,(Abazari, 2013b)'de iki boyutlu Volterra integral denklemi, (Benhammouda, 2014)'da cebirsel kısmi diferensiyel denklemler,(Abazari, 2012a)'de genelleştirilmiş Hirota–Satsuma coupled KdV denklemi,(Abazari, 2013a)'de Burgers-Huxley denklemi, (Tari, 2013)'de lineer olmayan Volterra kısmi integro denklemi, (Kolebaje, 2014)'de Stochastic Kadar-Parisi-Zhang denklemi, (Abazari, 2011)'de lineer olmayan Schrödinger denklemi,(Srivastava, 2013)'de Caputo zamana bağlı kesirli mertebeden hiperbolik telgraf denklemi, (Abazari, 2012b)'de Kawahara denklemi,(Srivastava, 2014c)'de (1+n) boyutlu Burgers denklemi, (Hosseinzadeh, 2013)'da değişken katsayılı kısmi diferensiyel denklemler,(Hagbin, 2012)'de 7.mertebeden Sawada–Kotera denklemi, (Hesam, 2012)'de Fornberg-Whitham denklemi, (Al-Sawoor, 2013)'da genelleştirilmiş Ito sistem,(Srivastava, 2014a)'de iki ve üç boyutlu hiperbolik Telgraf denklemi,(Arora, 2012b)'de modifiye edilmiş eşit genişlik denklemi, Varyant ve homojen olmayan Burgers denklemi, (Arora, 2012a)'de sürtünmesiz Burgers ve eşit genişlik dalga denklemi, (Neog, 2015)'de lineer olmayan bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri, (Oderinua, (2012)'de Adveksiyon, Burgers ve çiftli Burgers denklemleri, (Ita, 2014)'de Radyal yayılım denklemi çözülmüştür.

Keskin (Keskin, 2010a)'de indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemini (RDTM) kesirli diferensiyel yöntemlere de uygulamış,(Keskin, 2010e)'de de bunu ifade etmiştir. Ardından kesirli diferensiyel denklemlerle alakalı birçok akademisyen tarafından farklı tip ve farklı çeşit denklemler RDTM ile çözülmüştür. (Rawashdeh,

2014b)'de kesirli Harry dym, (Ray, 2013a)'da kesirli coupled KdV ,(Ahmad ve Mohyud-Din, 2014)'de lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemler, (Srivastava, 2014b)'de iki ve üç boyutlu zamana bağlı kesirli telgraf denklemi, (Gupta, 2011)'de kesirli Benney-Lin denklemi,(Cui, 2013)'de kesirli Perturbed Difüzyon denklemi,(Singh, 2015)'de çok boyutlu zamana bağlı kesirli (heat like) Difüzyon denklemi, (Ray, 2013c)'da kesirli KdV denklemi, (Srivastava, 2013)'de zamana bağlı kesirli mertebeden hiperbolik telgraf denklemi, (Ray, 2013b)'da zamana bağlı kesirli modifiye KdV denklemi, (Taghavi, 2015a)'de kesirli Zakharov-Kuznetsov denklemi, (S. Shahmorad, 2014)'de kesirli mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri, (Ebenezer Bonyah, 2016)'de zamana bağlı kesirli KdV denklemi, (Secer, 2012)'de zamana bağlı kesirli Reaksiyon- Difüzyon denklemi çözülmüştür.

4.2.2.RDTM için Yeni Uygulamalar

Örnek 4.1.(Servi, 2015a)

Literatürde Improved Boussinesq denklemi olarak bilinen

$$u_{tt} - u_{xx} - uu_{xx} - (u_x)^2 - u_{xxt} = \Phi(x, t) \quad (4.25)$$

denkleminin, başlangıç ile sınır koşulu

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= g(x) \\ u(0, t) &= p(t) \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= q(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

olup,

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= -2 \exp(2x + 2t) - \exp(x + t) \\ f(x) &= \exp(x), g(x) = \exp(x), p(t) = \exp(t), q(t) = \exp(t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan kısmi türevli diferensiyel denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm 4.1.

(4.25)'de verilen Improved Boussinesq denkleminin analitik çözümü $u(x,t) = \exp(x+t)$ şeklindedir (S.Mahmoudvand, 2014).

Şimdi indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile (4.25) denklemini çözelim. İlk olarak (4.25) denkleminde Çizelge 4.1'de verilen indirgenmiş dönüşüm formülleri uygulanırsa

$$(k+1)(k+2)U_{k+2}(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_k(x) - \sum_{s=0}^k U_{k-s}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_s(x) - N(U_k(x)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k+1)(k+2)U_{k+2}(x) = F_k(x) \quad (4.27)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Burada $U_{k(x)}, F_k(x)$ ve $N(U_{k(x)})$ sırasıyla $u(x,t), \Phi(x,t)$ ve $N(u(x,t))$ 'nin indirgenmiş diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarıdır.

(4.26)'deki başlangıç koşullarına indirgenmiş diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$U_0(x) = f(x), U_1(x) = g(x) \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28)'de elde edilen başlangıç değerlerinin (4.27)'de yerine yazılmasıyla, k 'ya istenilen mertebeye kadar verilen değerlerle sırasıyla $U_k(k)$ değerleri hesaplanabilir. İterasyon uygulanırsa,

$k=0$ için,

$$2U_2(x) = F_0(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_0(x) + U_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_0(x) + N(U_0(x)) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x)$$

$k=1$ için,

$$6U_3(x) = F_1(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x) + U_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_0(x) + U_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x) + N(U_1(x)) + 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_3(x)$$

$k=2$ için,

$$12U_4(x) = F_2(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x) + U_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_0(x) + U_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x) \\ + U_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x) + N(U_2(x)) + 12\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_4(x)$$

$k=3$ için,

$$20U_5(x) = F_3(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_3(x) + U_3(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_0(x) + U_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x) \\ + U_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x) + U_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_3(x) + N(U_3(x)) + 20\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_5(x)$$

⋮

Bu şekilde devam edilerek $U_k(x)$ değerleri hesaplanır. $U_k(x)$ değerlerinin hesaplanması için lineer olmayan değerlerindeki hesaplanması gerekir. Birkaç adım için $N(U_k(x))$ değerleri;

$$N_0 = -U_0(x)\frac{\partial}{\partial x}U_0(x) - \frac{\partial}{\partial x}U_0(x)\frac{\partial}{\partial x}U_0(x) \\ N_1 = -U_0(x)\frac{\partial}{\partial x}U_1(x) - U_1(x)\frac{\partial}{\partial x}U_0(x) - \frac{\partial}{\partial x}U_0(x)\frac{\partial}{\partial x}U_1(x) - \frac{\partial}{\partial x}U_0(x)\frac{\partial}{\partial x}U_1(x) \\ N_2 = -U_0(x)\frac{\partial}{\partial x}U_2(x) - U_1(x)\frac{\partial}{\partial x}U_1(x) - U_2(x)\frac{\partial}{\partial x}U_0(x) - \frac{\partial}{\partial x}U_0(x)\frac{\partial}{\partial x}U_2(x) \\ - \frac{\partial}{\partial x}U_1(x)\frac{\partial}{\partial x}U_1(x) - \frac{\partial}{\partial x}U_2(x)\frac{\partial}{\partial x}U_0(x)$$

olarak bulunur.

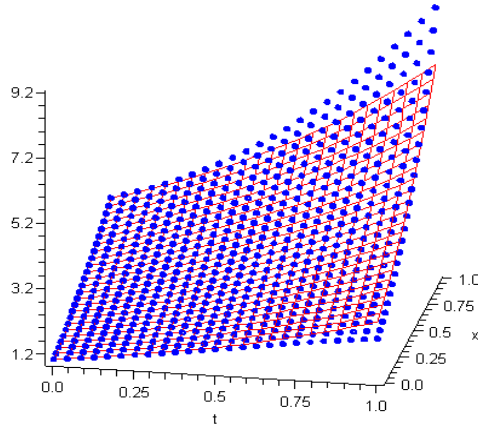
$\{U_k(x)\}_{k=0}^5$ değerlerinin ters indirgenmiş diferensiyel dönüşümü alınarak verilen denklemin beşinci mertebeden yaklaşık çözümü;

$$\tilde{u}_5(x,t) = e^x + e^{xt} + \frac{1}{3}e^{2xt^2} + \frac{2}{9}e^{2xt^3} + \frac{2}{27}e^{2xt^4} - \frac{73}{216}e^{xt^4} + \frac{1}{48}e^{xt^4x} + \frac{4}{135}e^{2xt^5} - \frac{137}{1080}e^{xt^5} + \frac{1}{240}e^{xt^5x}$$

olur ve böylece problemin aranılan analitik çözümü;

$$u(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x,y)$$

olarak tanımlanır. Bulunan bu çözüm (S.Mahmoudvand, 2014) de verilen $u(x,t) = \exp(x+t)$ analitik çözümüne yakınsak olduğu aşağıda verilen Şekil 1’de görülebilir.



Şekil 4.1. RDTM yaklaşık çözümü ile Analitik çözümün karşılaştırılması

Şekil 4.1.’de beşinci mertebeden RDTM yaklaşık çözümü ile $u(x,t) = \exp(x+t)$ analitik çözümünün karşılaştırılması gösterilmiştir. Burada, kırmızı çizgiler RDTM yaklaşık çözümünü, mavi noktalar ise analitik çözümü göstermektedir.

Örnek 4.2.(Servi, 2015b)

$$u_t = u^3 u_{xxx} \quad (4.29)$$

Harry Dym kısmi türevli diferensiyel denkleminin

$$u(x,0) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.30)$$

başlangıç şartı ile verilen çözümünü indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ile bulalım.

Çözüm 4.2.

(4.29)'de verilen Harry Dym kısmi türevli diferensiyel denkleminin analitik çözümü

$u(x,t) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}(x+bt) \right)^{\frac{2}{3}}$ şeklindedir (Mokhtari, 2011). (4.29) ve (4.30) ifadelerinin

indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemine göre karşılığı yazılırsa,

$$(k+1)U_{k+1}(x) = N_k(x) \quad (4.31)$$

ve başlangıç şartı

$$U_0(x) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.32)$$

şeklindedir. (4.32) denkleminde $k = 0$ değeri için elde edilen eşitlikte (4.38) eşitliğinin yerine yazılması ile istenilen mertebe kadar $U_k(x)$ değerleri sırasıyla hesaplanabilir.

Burada ilk olarak lineer olamayan $N_k(x)$ değerlerini, ardından da $U_k(x)$ değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} N_0 &= u_0^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0 \right) \\ N_1 &= 3u_0^2 u_1 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0 \right) + u_0^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1 \right) \\ N_2 &= (3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0 \right) + 3u_0 u_1^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1 \right) + u_0^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_2 \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$k=0$ için,

$$U_1(x) = N_0(x)$$

$k=1$ için,

$$2U_2(x) = N_1(x)$$

$k=2$ için,

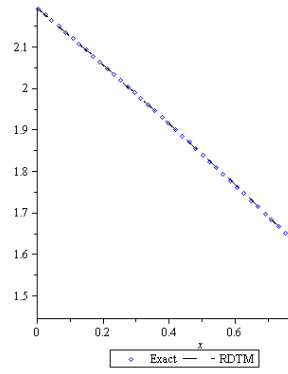
$$3U_3(x) = N_2(x)$$

bulunur. $\{U_k(x)\}_{k=0}^5$ değerleri ters indirgenmiş diferensiyel dönüşümü uygulanarak verilen denklemin beşinci mertebeden yaklaşık çözümü;

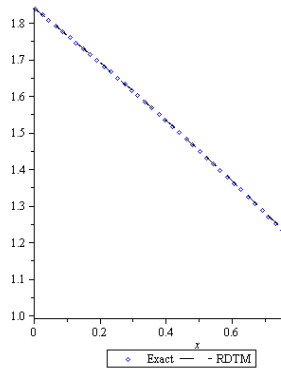
$$\tilde{u}_5(x,t) = -\frac{1}{3} \frac{\left[\begin{aligned} &162b^4t^2ax^2 - 576b^2ta^3x + 486b^{\left(\frac{7}{2}\right)}tx^4 - 81b^{\left(\frac{9}{2}\right)}t^2x^3 + 36b^{\left(\frac{11}{2}\right)}t^3x^2 \\ &+ 3240a^2b^{\left(\frac{3}{2}\right)}x^3 - 2430ab^2x^4 + 24b^3t^2a^3 + 14b^6t^4a - 2160a^3bx^2 \\ &- 1296b^3tax^3 - 48b^5t^3ax + 96b^{\left(\frac{3}{2}\right)}ta^4 + 16b^{\left(\frac{9}{2}\right)}t^3a^2 - 21b^{\left(\frac{13}{2}\right)}t^4x - 96a^5 \\ &+ 720a^4b^{\left(\frac{1}{2}\right)}x + 729b^{\left(\frac{5}{2}\right)}x^5 - 108b^{\left(\frac{7}{2}\right)}t^2a^2x + 1296b^{\left(\frac{5}{2}\right)}ta^2x^2 + 14b^{\left(\frac{15}{2}\right)}t^5 \end{aligned} \right]}{\left(\left(-2a + 3b^{\left(\frac{1}{2}\right)}x \right)^4 \left(8a - 12b^{\left(\frac{1}{2}\right)}x \right)^{\frac{1}{3}} \right)}$$

şeklinde bulunur.

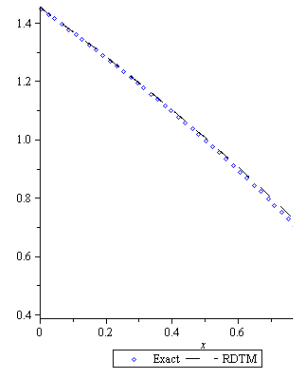
Aşağıda bulunan bu çözümün Şekil 4.2.'de farklıdeğerleri için analitik çözümlerle karşılaştırılması verilmiştir.



$t = 0.5$



$t = 1.0$



$t = 1.5$

Şekil 4.2. Analitik çözüm ve RDTM çözümünün karşılaştırılması

4.3.Sabit Grid Aralıklı İndirgenmiş Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

Yöntemi anlatmak için ilk olarak aşağıda verilen adımları lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denkleme uygulayalım.

Adım 1:Problem tanımlama

$$L_t u(x,t) + L_x u(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t), \quad a \leq t \leq b \quad (4.33)$$

Kısmi türevli diferensiyel denklemi için başlangıç değeri

$$u(x,0) = f(x) \quad (4.34)$$

olarak kabul edilsin.

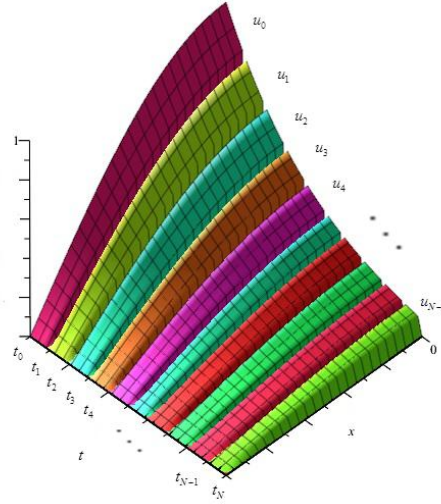
Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $Ru(x,t)$ kısmi türevlere sahip olan lineer terim, $Nu(x,t)$ lineer olmayan terim ve $g(x,t)$ fonksiyonu da homojen olmayan bir analitik fonksiyondur.

Adım 2:Verilen aralığı seçilen N değerine göre eşit aralıklara ayırma

Bu yöntemde (4.33)'de verilen denklemin

$$u(x,t) = \begin{cases} u^0(x,t), & 0 \leq x \leq T, & 0 < t \leq t_1 \\ u^1(x,t), & 0 \leq x \leq T & t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u^{N-1}(x,t), & 0 \leq x \leq T & t_{N-1} < t \leq t_N \end{cases}$$

şeklindeki yaklaşık çözümünü $[0,T]$ aralığında bulmak için Şekil 4.3'deki gibi bu aralığı $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ grid noktaları ile N eşit alt aralığa bölelim.



Şekil 4.3.Bölünen her alt aralıktaki yaklaşık fonksiyonlar

Burada, yapılacak olan formüllendirmede $t_0 = 0, t_N = T$ alınır ve her $i = 0, 1, 2, \dots, N$ için $t_i = t_0 + ih$, h adım genişliği ise $h = \frac{T}{N}$ şeklindedir.

Adım 3: İlk aralıktaki $u^0(x, t)$ yaklaşık çözümünün bulunması

Fonksiyona RDTM dönüşümleri uygulandıktan sonra $[t_0, t_1]$ ilk aralıktaki yaklaşık çözümü $u^0(x, t)$ olarak tanımlanır. $u^0(x, t)$ 'nin $t_0 = 0$ noktası civarında n . mertebeden Taylor polinomu,

$$u^0(x, t) = U_0^0(x, t_0) + U_1^0(x, t_0)(t - t_0) + U_2^0(x, t_0)(t - t_0)^2 + \dots + U_n^0(x, t_0)(t - t_0)^n \quad (4.35)$$

olur. Bu polinomun (4.34)'deki başlangıç koşulu (4.35) de $t = t_0$ yazılarak

$$U_0^0(x, t_0) = u(x, t_0) \quad (4.36)$$

Şeklinde bulunur.

Adım 4: $u^0(x, t_1)$ değeri ile ikinci aralıktaki yaklaşık çözümü olan $u^1(x, t)$ başlangıç koşulunun bulunması

Burada “0” indisi Taylor polinomunun t_0 civarında genişletildiğini ifade eder. Eşitlikten, ilk aralıktaki $u^0(x,t)$ yaklaşık çözümünün t_1 noktasında ki $u^0(x,t_1)$ değeri hesaplandığında bu değer $[t_1, t_2]$ ikinci aralığındaki yaklaşık çözümün yani $u^1(x,t)$ ’nin başlangıç şartı olur. $u^0(x,t_1)$ değeri yukarıdaki eşitlikten,

$$\begin{aligned}
 u^1(x,t_1) &= u^0(x,t_1) \\
 &= U_0^0(x,t_0) + U_1^0(x,t_0)(t_1 - t_0) + U_2^0(x,t_0)(t_1 - t_0)^2 + \dots + U_n^0(x,t_0)(t_1 - t_0)^n \\
 &= U_0^0 + U_1^0 h + U_2^0 h^2 + \dots + U_n^0 h^n \\
 &= \sum_{j=0}^n U_j^0 h^j
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur ve bu aralıktaki yaklaşık çözüm

$$u^1(x,t) = U_0^1(x,t_1) + U_1^1(x,t_1)(t - t_1) + U_2^1(x,t_1)(t - t_1)^2 + \dots + U_n^1(x,t_1)(t - t_1)^n$$

şeklindedir.

Adım 5: $u^1(x,t_2)$ değeri ile üçüncü aralıktaki başlangıç koşulunun bulunması

İkinci aralıktaki yaklaşım çözüm bulunduktan sonra, 3 ve 4 adıma benzer şekilde üçüncü aralıktaki yaklaşık çözüm

$$u^2(x,t) = U_0^2(x,t_2) + U_1^2(x,t_2)(t - t_2) + U_2^2(x,t_2)(t - t_2)^2 + \dots + U_n^2(x,t_2)(t - t_2)^n$$

ve başlangıç şartı,

$$U_0^2(x,t_2) = u^1(x,t_2)$$

olur.

Adım 6: $u^i(x,t)$ değerlerinin bulunması

Benzer şekilde, ilk adımdan itibaren $u^1(x,t)$, $u^2(x,t)$, ..., $u^i(x,t)$ değerleri benzer şekilde hesaplandıktan sonra $u(x,t)$ ’nin analitik çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} u^0(x,t), & 0 \leq x \leq T, & 0 < t \leq t_1 \\ u^1(x,t), & 0 \leq x \leq T & t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u^{N-1}(x,t), & 0 \leq x \leq T & t_{N-1} < t \leq t_N \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 4.3.

Literatürde parabolik bir denklem tipi olarak verilen homojen ısı iletim denklemi,

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.38)$$

ve başlangıç koşulu,

$$u(x,0) = f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 < x < 1 \quad (4.39)$$

olan kısmi türevli diferensiyel denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm 4.3.

(4.38) denkleminin analitik çözümü $u(x,t) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ olarak biliniyor(Cağlar, 2008).

Biz şimdi $N = 5, T = 1$ seçerek $\left\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{5}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{5}, t_4 = \frac{4}{5}, t_5 = 1\right\}$ olan t_i değerleri ile (4.38) denkleminde Çizelge 4.2'den faydalanarak indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$(k+1)U_{k+1}^0(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^0(x), \quad (4.40)$$

eşitliği elde edilir. Burada $U_k(x)$, $u(x,t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferensiyel dönüşümüdür.(4.39) başlangıç koşulundan,

$$u(x, t_0) = U_0^0(x, t_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (4.41)$$

bulunur. Şimdi $N=5$ ve $k=N-1$ seçilerek (4.40) eşitliğine uygulanan iterasyonlar ile $U_k^0(x)$ değeri $t_0=0$ için aşağıdaki gibi hesaplanabilir. İlk iki adım için iterasyon uygulanırsa,

$k=0$ için,

$$U_1^0(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0^0(x)$$

$$U_1^0(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \pi^2$$

$k=1$ için,

$$U_2^0(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1^0(x) = \frac{1}{32} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \pi^4$$

$$\vdots$$

olur. İterasyon devam ettirilerek diğer $U_n^0(x, t_0)$ değerleri elde edilir. Elde edilen bu $U_n^0(x, t_0)$ değerleri (4.40) eşitliğinde yerine yazıldığında ilk aralıkta $t_0=0$ içinaşağıdaki $u^0(x, t)$ çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned}
u^0(x,t) = & \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2.467401100272339654708624\cos(1.570796326794896619231322x)t \\
& + 3.044034094812576163638763\cos(1.570796326794896619231322x)t^2 \\
& - 2.503617691602355304766200\cos(1.570796326794896619231322x)t^3 \\
& + 1.544357261730236654806086\cos(1.570796326794896619231322x)t^4 \\
& - 0.7621097613613527097470450\cos(1.570796326794896619231322x)t^5
\end{aligned}$$

Şimdi $t_1 = \frac{1}{5}$ için başlangıç koşulu $u^0(x, t_1)$ 'den,

$$(k+1)U_{k+1}^1(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^1(x), \quad u(x, t_1) = u^0(x, t_1) = 0.6104792987\cos(1.570796327x)$$

şeklinde dir. k 'ya verilen değerler ile elde edilen iterasyonla $u^1(x, t)$,

$$\begin{aligned}
u^1(x,t) = & 0.999877169136302868879232\cos(1.570796326794896619231322x) \\
& - 2.466925584065036130802664\cos(1.570796326794896619231322x)t \\
& + 3.038855594723062174924280\cos(1.570796326794896619231322x)t^2 \\
& - 2.468746176109713121084863\cos(1.570796326794896619231322x)t^3 \\
& + 1.408050370732435181830773\cos(1.570796326794896619231322x)t^4 \\
& - 0.4652522326485689502755708\cos(1.570796326794896619231322x)t^5
\end{aligned}$$

bulunmuş olur. Yine aynı şekilde $t_2 = \frac{2}{5}$ için başlangıç koşulu $u^1(x, t_2)$ 'den,

$$(k+1)U_{k+1}^2(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^2(x), \quad u(x, t_2) = u^1(x, t_2) = 0.3726849740\cos(1.570796327x)$$

ve $u^2(x, t)$ ise,

$$\begin{aligned}
u^2(x,t) = & 0.9993834464805207226018178\cos(1.570796326794896619231322x) \\
& - 2.458703539689666761290272\cos(1.570796326794896619231322x)t \\
& + 2.988452186097309068196331\cos(1.570796326794896619231322x)t^2 \\
& - 2.308397659230656775996942\cos(1.570796326794896619231322x)t^3 \\
& + 1.143612459565573469570756\cos(1.570796326794896619231322x)t^4 \\
& - 0.2840268567060699981668134\cos(1.570796326794896619231322x)t^5
\end{aligned}$$

dir.

$t_3 = \frac{3}{5}$ için başlangıç koşulu $u^2(x, t_3)$,

$$(k+1)U_{k+1}^3(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^3(x), \quad u(x, t_3) = u^2(x, t_3) = 0.2275164615 \cos(1.570796327x)$$

ve $u^3(x, t)$,

$$\begin{aligned} u^3(x, t) = & 0.9957223161051814472593411 \cos(1.570796326794896619231322x) \\ & -2.423578364188506819672375 \cos(1.570796326794896619231322x)t \\ & +2.851353402301061619753624 \cos(1.570796326794896619231322x)t^2 \\ & -2.037107376486711091402867 \cos(1.570796326794896619231322x)t^3 \\ & +0.8715442485945586760506838 \cos(1.570796326794896619231322x)t^4 \\ & -0.1733925162939861352682260 \cos(1.570796326794896619231322x)t^5 \end{aligned}$$

$t_4 = \frac{4}{5}$ için başlangıç koşulu $u^3(x, t_4)$,

$$(k+1)U_{k+1}^4(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^4(x), \quad u(x, t_4) = u^4(x, t_4) = 0.1388940899 \cos(1.570796327x)$$

ve $u^4(x, t)$,

$$\begin{aligned} u^4(x, t) = & 0.9842384977031781048204561 \cos(1.570796326794896619231322x) \\ & -2.342927467604933892685907 \cos(1.570796326794896619231322x)t \\ & +2.623021891468717625951992 \cos(1.570796326794896619231322x)t^2 \\ & -1.711600676608394905800210 \cos(1.570796326794896619231322x)t^3 \\ & +0.6379122634153703228060850 \cos(1.570796326794896619231322x)t^4 \\ & -0.1058525417470414961593968 \cos(1.570796326794896619231322x)t^5 \end{aligned}$$

$t_5 = 1$ için başlangıç koşulu $u^4(x, t_5)$,

$$(k+1)U_{k+1}^5(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^5(x), \quad u(x, t_5) = u^5(x, t_5) = 0.0847919666 \cos(1.570796327x)$$

ve $u^5(x, t)$,

$$\begin{aligned}
u^5(x,t) = & 0.9599739383557050221050830\cos(1.570796326794896619231322x) \\
& -2.209195354608431755909108\cos(1.570796326794896619231322x)t \\
& +2.326872031530678097407591\cos(1.570796326794896619231322x)t^2 \\
& -1.382290879853223189603980\cos(1.570796326794896619231322x)t^3 \\
& +0.4540530166535508948511995\cos(1.570796326794896619231322x)t^4 \\
& -0.06462078545138330991776648\cos(1.570796326794896619231322x)t^5
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan $u^{N-1}(x,t)$ yaklaşık çözümleri Maple 13 programı ile hesaplanmıştır.

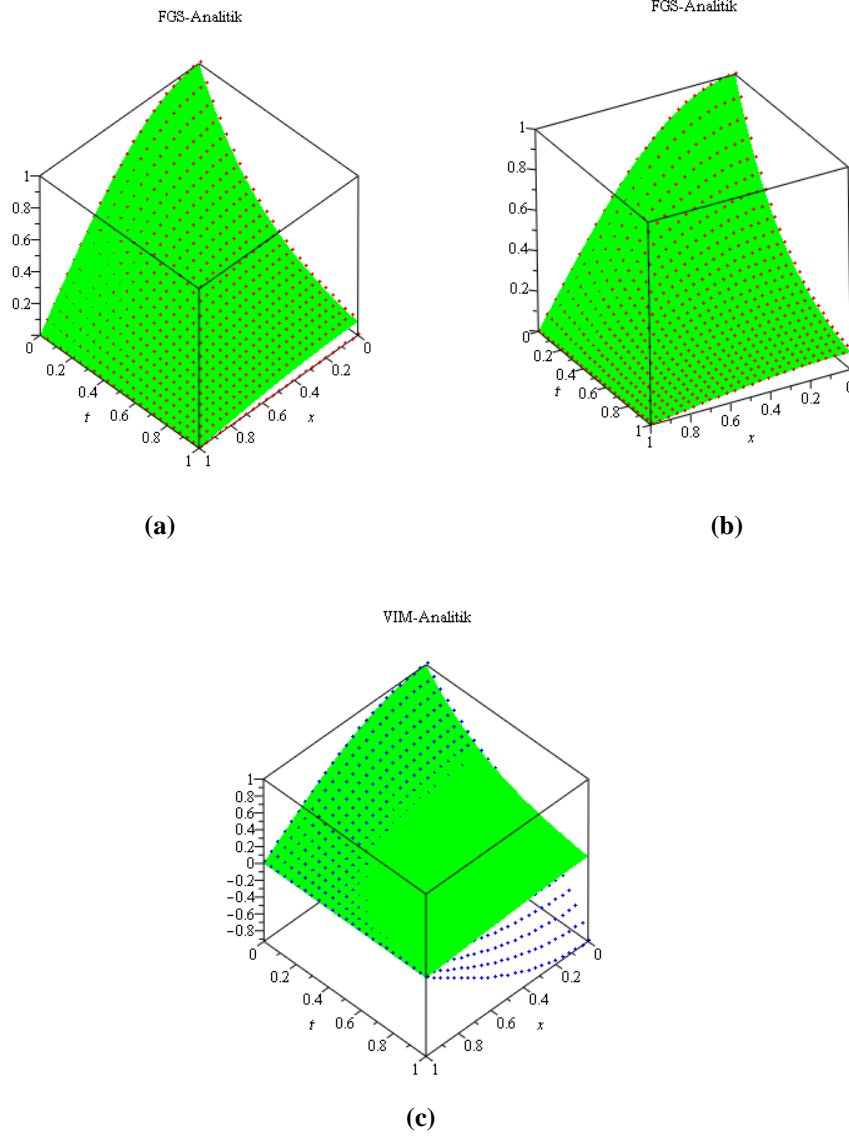
Verilen x, t ve N değerlerine göre indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemine uyguladığımız sabit gridli aralık yönteminden elde ettiğimiz sonuçlar ile (4.38) denkleminin analitik çözümünün ve varyasyon iterasyon yöntemi çözümlerinden elde ettiğimiz sonuçdeğerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.10.Örnek 4.3'unFGS ile RDTM,VIM yaklaşık sonuçları ile Analitik sonuç değerleri

	x	$N=5$ için FGS ile RDTM Yaklaşık çözüm	Analitik çözüm	VIM yaklaşık çözüm
$t=0$	0.2	0.95105651629515357212	0.95105651629515357212	0.95105651629515357212
	0.4	0.80901699437494742410	0.80901699437494742410	0.80901699437494742410
	0.6	0.58778525229247312916	0.58778525229247312916	0.58778525229247312916
	0.8	0.30901699437494742409	0.30901699437494742409	0.30901699437494742409
$t=0.2$	0.2	0.58060031509226241166	0.58061812511435969858	0.57848222045814831600
	0.4	0.49388812736268211058	0.49390327747237593539	0.49208636845000683686
	0.6	0.35883072860591671138	0.35884173580491322137	0.35752167413064542774
	0.8	0.18864847801250760109	0.18865426483947735291	0.18796026734739870027
$t=0.4$	0.2	0.35444447318272602337	0.35446621881584614670	0.32321986940114064206
	0.4	0.30150847762879883173	0.30152697556919059152	0.27494724318152106420
	0.6	0.21905873155147530135	0.21907217109185042299	0.19976086512920703766
	0.8	0.11516599055796385204	0.11517305614247163473	0.10502050178225827179
$t=0.6$	0.2	0.21638101341680524754	0.21640092661050802728	0.070977530968438540701
	0.4	0.18406468397503898189	0.18408162314935912222	0.060377094093134192334
	0.6	0.13373082081173266057	0.13374312784226553881	0.043866526576043258253
	0.8	0.070306453149956789204	0.070312923338805723419	0.023061997801626752216
$t=0.8$	0.2	0.13209612932276207933	0.13211233836140384770	-0.29253672699564999761
	0.4	0.11236767918858316798	0.11238146742040639769	-0.24884660329150969247
	0.6	0.081639897703768593911	0.081649915440574167191	-0.18079764024096061115
	0.8	0.042920634213094564874	0.042925900849006275693	-0.095050944472395244887

$t = 1$	0.2	0.080641952389990404239	0.080654321682883870231	-0.88161483664681698228
	0.4	0.068598141987632055929	0.068608663936630625917	-0.74994637344876650389
	0.6	0.049839467496164885461	0.049847112139589849974	-0.54486793403391927115
	0.8	0.026202158674184176452	0.026206177701073737269	-0.28645402491770710592

Yukarıdaki çizelgede verilen sonuçları gösteren grafikler ise aşağıda verilmiştir.



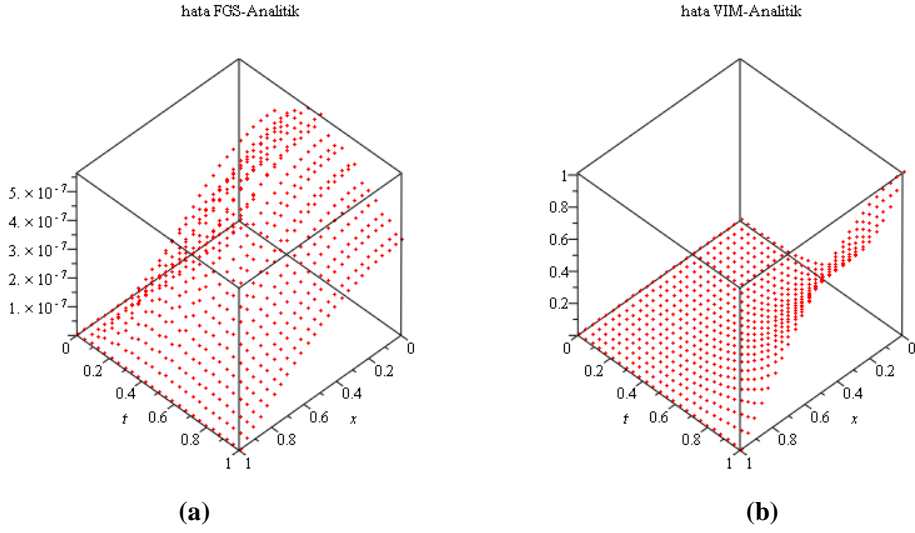
Şekil 4.4.(a-b) Verilen grafiklerde yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise bizim yöntemimiz ile bulduğumuz yaklaşık çözümü göstermektedir. **(a):** $N = 5$ **(b):** $N = 10$ **(c):**VIM-Analitik Sonuç Karşılaştırılması

Şimdi ise (4.38) eşitliğinin hem bizim yöntemle hem de Varyasyonel iterasyon yöntemi ile elde edilen mutlak hatalarının kıyaslamasını yaparsak,

Çizelge4.11.Örnek 4.3'un RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri

	x	$N=10$ için Mutlak hata(RDTM)	Mutlak Hata (Varyasyon)
$t = 0.2$	0.2	$4.4985842839548 \cdot 10^{-7}$	0.00213590465621138258
	0.4	$3.8267243575859 \cdot 10^{-7}$	0.00181690902236909853
	0.6	$2.7802779887400 \cdot 10^{-7}$	0.00132006167426779363
	0.8	$1.4616786390207 \cdot 10^{-7}$	0.00069399749207865264
$t = 0.4$	0.2	$5.4927515158209 \cdot 10^{-7}$	0.03124634941470550464
	0.4	$4.6724135170098 \cdot 10^{-7}$	0.02657973238766952732
	0.6	$3.3947071285348 \cdot 10^{-7}$	0.01931130596264338533
	0.8	$1.7847031540033 \cdot 10^{-7}$	0.01015255436021336294
$t = 0.6$	0.2	$5.0299689819350 \cdot 10^{-7}$	0.14542339564206948658
	0.4	$4.2787471804687 \cdot 10^{-7}$	0.12370452905622492989
	0.6	$3.1086917931935 \cdot 10^{-7}$	0.089876601266222280557
	0.8	$1.63433599367127 \cdot 10^{-7}$	0.047250925537178971203
$t = 0.8$	0.2	$4.0943799213462 \cdot 10^{-7}$	0.42464906535705384531
	0.4	$3.4828875897934 \cdot 10^{-7}$	0.36122807071191609016
	0.6	$2.53046595424700 \cdot 10^{-7}$	0.26244755568153477834
	0.8	$1.33034468030590 \cdot 10^{-7}$	0.13797684532140152058

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki çizelgede verilen sonuçları gösteren grafikler ise aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.5. Verilen grafiklerde, **(a)**: $N=10$ için RDTM-FGS ile Analitik Sonuç Mutlak Hata Karşılaştırılması **(b)**: VIM ile Analitik Sonuç Mutlak Hata Karşılaştırılması

Örnek 4.4.

Burgers' denklemi,

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.42)$$

ve başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = x \quad (4.43)$$

şeklinde verilmiştir. (4.42) denkleminin analitik çözümü ise,

$$u(x, 0) = \frac{x}{1+t}, \quad |t| < 1 \quad (4.44)$$

şeklinde (Wazwaz, 2010). (4.42)'de verilen denklemin çözümünü FGS ile RDTM (Sabit grid aralıklı Reduce diferensiyel dönüşüm yöntemi) ile bulalım.

Çözüm 4.4.

$N = 5$ seçerek $\left\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{5}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{5}, t_4 = \frac{4}{5}, t_5 = 1\right\}$ olan t_i değerleri ile

(4.42) denkleminde Çizelge 4.2'den faydalanarak indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$(k+1)U_{k+1}^0(x) = -\sum_{r=0}^k U_r(x) \frac{\partial}{\partial x} U_{k-r}^0(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^0(x), \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir. Burada $U_k(x)$, $u(x,t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferensiyel dönüşümüdür.(4.43) başlangıç koşulundan,

$$u(x, t_0) = U_0^0(x, t_0) = x \quad (4.46)$$

bulunur. Buradan, (4.46)'deki başlangıç koşulu,(4.45)'de yerine yazılarak $U_k^{N-1}(x)$ değerlerini elde edebiliriz. Daha sonra, $N = 5$ için, hesaplanan $U_k^{N-1}(x)$ değerleriyle $u^{N-1}(x,t)$ yaklaşık çözümleri Maple 13 programı ile sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$u^0(x,t) = x - xt + xt^2 - xt^3 + xt^4 - xt^5 + xt^6 - xt^7 + xt^8 - xt^9 + xt^{10} - xt^{11} + xt^{12} - xt^{13} + xt^{14} - xt^{15} + xt^{16} - xt^{17} + xt^{18} - xt^{19} + xt^{20}$$

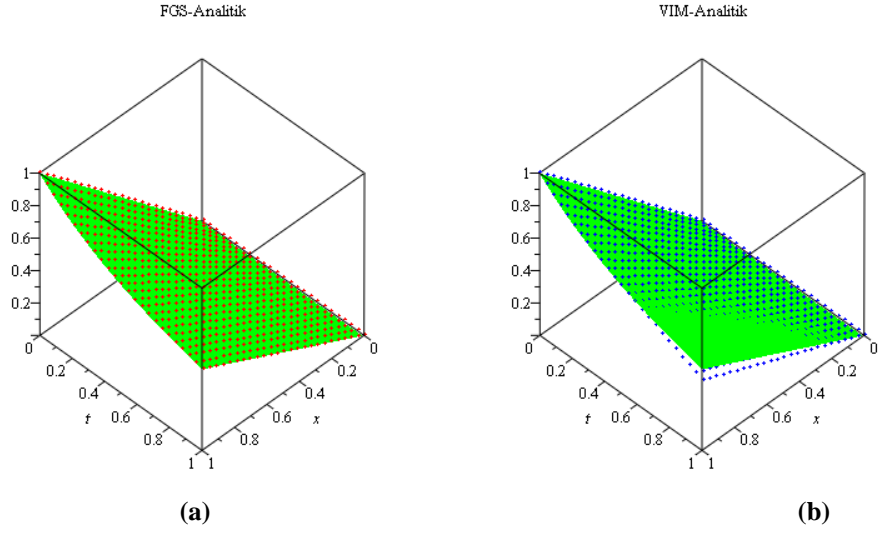
$$u^1(x,t) = 0.9999999996x - 0.9999999990xt + 0.9999999986xt^2 - 0.9999999982xt^3 + 0.9999999973xt^4 - 0.9999999941xt^5 + 0.9999999550xt^6 - 0.9999995405xt^7 + 0.9999959163xt^8 - 0.9999697460xt^9 + 0.9998127276xt^{10} - 0.9990276382xt^{11} + 0.9957564331xt^{12} - 0.9844330323xt^{13} + 0.9520804590xt^{14} - 0.8765911224xt^{15} + 0.7350486163xt^{16} - 0.5268978725xt^{17} + 0.2956192683xt^{18} - 0.1130308967xt^{19} + 0.02173671090xt^{20}$$

$$\begin{aligned}
u^2(x,t) = & 0.999999998x - 0.999999992xt + 0.9999999936xt^2 - 0.9999999153xt^3 \\
& + 0.9999990371xt^4 - 0.9999915753xt^5 + 0.9999418327xt^6 - 0.9996753575xt^7 \\
& + 0.9985095298xt^8 - 0.9942995977xt^9 + 0.9816698020xt^{10} - 0.9500953132xt^{11} \\
& + 0.8843151289xt^{12} - 0.7704648100xt^{13} + 0.6078214974xt^{14} - 0.4180709662xt^{15} \\
& + 0.2401798430xt^{16} - 0.1093775468xt^{17} + 0.03670960435xt^{18} - 0.008024890253xt^{19} \\
& + 0.0008537117290xt^{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3(x,t) = & 0.9999999984x - 0.9999999587xt + 0.9999992969xt^2 - 0.9999923132xt^3 \\
& + 0.9999399390xt^4 - 0.9996431523xt^5 + 0.9983241033xt^6 - 0.9936132136xt^7 \\
& + 0.9798731201xt^8 - 0.9467951170xt^9 + 0.8806391110xt^{10} - 0.7703791010xt^{11} \\
& + 0.6172401980xt^{12} - 0.4405414640xt^{13} + 0.2722569555xt^{14} - 0.1413690043xt^{15} \\
& + 0.05956403495xt^{16} - 0.01946355975xt^{17} + 0.004611531899xt^{18} \\
& - 0.0007031035182xt^{19} + 0.00005169878810xt^{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^4(x,t) = & 0.9999999578x - 0.9999989006xt + 0.9999857095xt^2 - 0.9998812961xt^3 \\
& + 0.9992939787xt^4 - 0.9967978866xt^5 + 0.9884775842xt^6 - 0.9661910644xt^7 \\
& + 0.9174393040xt^8 - 0.8294152940xt^9 + 0.6973792800xt^{10} - 0.5323342632xt^{11} \\
& + 0.3604123715xt^{12} - 0.2116338111xt^{13} + 0.1053634112xt^{14} - 0.04337234456xt^{15} \\
& + 0.01431403210xt^{16} - 0.003630828985xt^{17} + 0.0006632725664xt^{18} \\
& - 0.00007757064179xt^{19} + 0.000004357901224xt^{20}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki şekilde (4.42) eşitliğinin bulunan yaklaşık çözümü ile analitik çözümünün karşılaştırılmasını gösteren grafik verilmiştir.



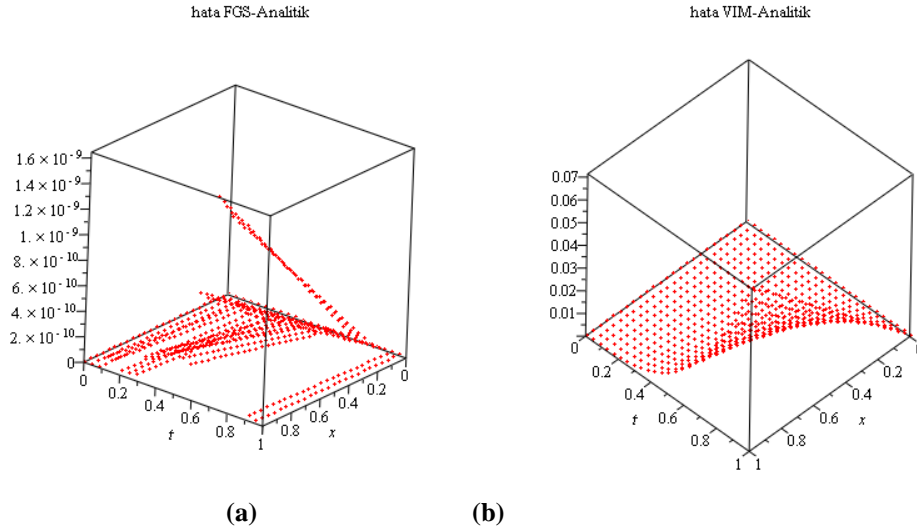
Şekil 4.6. Bu şekilde(a): $N = 5$ değeri için, Yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise bizim yöntemimizle elde edilen sonucu, (b):Yeşil alan analitik çözümü, mavi noktalar VIM ile elde edilen çözümü göstermektedir.

x, t ve N değerlerine göre indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemine uyguladığımız sabit gridli aralık yönteminden elde ettiğimiz sonuçlar ile (4.42) denkleminin analitik çözümünün ve varyasyon iterasyon yöntemi çözümlerinden elde ettiğimiz sonuç değerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge4.12.Örnek 4.4'ün FGS ile RDTM, VIM yaklaşık sonuç değerleri ve analitik sonuç değerleri

	x	N=5 için FGS ile RDTM Yaklaşık çözüm	Analitik çözüm	VIM yaklaşık çözüm
$t=0.2$	0,2	0.16666666661767531640	0.1666666666666666667	0.16659338158730158730
	0.4	0.33333333323535063281	0.3333333333333333333	0.33318676317460317460
	0.6	0.49999999985302594922	0.5000000000000000000	0.49978014476190476190
	0.8	0.66666666647070126562	0.6666666666666666667	0.66637352634920634921
$t=0.4$	0,2	0.14285714283823155964	0.14285714285714285714	0.14201648761904761905
	0.4	0.28571428567646311927	0.28571428571428571429	0.28403297523809523810
	0.6	0.42857142851469467891	0.42857142857142857143	0.42604946285714285714
	0.8	0.57142857135292623854	0.57142857142857142857	0.56806595047619047619
$t=0.6$	0,2	0.12499999995038180822	0.1250000000000000000	0.12184393142857142857
	0.4	0.24999999990076361643	0.2500000000000000000	0.24368786285714285714
	0.6	0.37499999985114542465	0.3750000000000000000	0.36553179428571428571
	0.8	0.49999999980152723287	0.5000000000000000000	0.48737572571428571429
$t=0.8$	0,2	0.11111111094923886077	0.1111111111111111111	0.10352765968253968254
	0.4	0.22222222189847772153	0.2222222222222222222	0.20705531936507936508
	0.6	0.33333333284771658230	0.3333333333333333333	0.31058297904761904762
	0.8	0.44444444379695544307	0.4444444444444444444	0.41411063873015873016

(4.42) denkleminin FGS ile RDTM ve Varyasyonel iterasyon yöntemi ile elde edilen mutlak hatalarının grafiklerini verirsek,



Şekil 4.7. Verilen grafiklerde (a): $N=10$ için RDTM-FGS Mutlak Hata Karşılaştırılması (b): VIM Mutlak Hata karşılaştırmaları gösterilmiştir.

Şimdi ise (4.42) eşitliğinin FGS ile RDTM ve Varyasyonel iterasyon yöntemi ile elde edilen mutlak hatalarının kıyaslamasını yaparsak,

Çizelge 4.13. Örnek 4.4'ün RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri

	x	$N=10$ için Mutlak hata(RDTM)	Mutlak Hata (Varyasyon)
$t=0.2$	0.2	$5.99608270 \cdot 10^{-12}$	0.00007328507936507937
	0.4	$1.199216540 \cdot 10^{-11}$	0.00014657015873015873
	0.6	$1.798824810 \cdot 10^{-11}$	0.00021985523809523810
	0.8	$2.398433080 \cdot 10^{-11}$	0.00029314031746031746
$t=0.4$	0.2	$5.804031642 \cdot 10^{-11}$	0.00084065523809523809
	0.4	$1.1608063285 \cdot 10^{-10}$	0.00168131047619047619
	0.6	$1.7412094927 \cdot 10^{-10}$	0.00252196571428571429
	0.8	$2.3216126569 \cdot 10^{-10}$	0.00336262095238095238
$t=0.6$	0.2	$1.7218725116 \cdot 10^{-10}$	0.00315606857142857143
	0.4	$3.4437450233 \cdot 10^{-10}$	0.00631213714285714286
	0.6	$5.1656175349 \cdot 10^{-10}$	0.00946820571428571429
	0.8	$6.8874900466 \cdot 10^{-10}$	0.01262427428571428571

$t=0.8$	0.2	$1.7664413596.10^{-10}$	0.00758345142857142857
	0.4	$3.5328827192.10^{-10}$	0.01516690285714285714
	0.6	$5.2993240788.10^{-10}$	0.02275035428571428571
	0.8	$7.0657654384.10^{-10}$	0.03033380571428571428

Örnek 4.5.

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.47)$$

Homojen Klein Gordon denkleminin başlangıç koşulu,

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x \quad (4.48)$$

olup analitik çözümü, $u(x,t) = x \sin(t)$ şeklindedir (Wazwaz, 2010). (4.47) denkleminin yaklaşık çözümünü FGS ile RDTM (Sabit grid aralıklı Reduce diferensiyel dönüşüm yöntemi) ile bulalım.

Çözüm 4.5.

$$N = 5 \text{ seçerek } \left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{5}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{5}, t_4 = \frac{4}{5}, t_5 = 1 \right\} \text{ olan } t_i \text{ değerleri ile}$$

(4.47) denkleminde Çizelge 4.2'den faydalanarak indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$\frac{(k+2)!}{k!} U_{k+2}^0(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^0(x) - U_k^0(x) \quad (4.49)$$

eşitliği elde edilir. Burada $U_k(x)$, $u(x,t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferensiyel dönüşümüdür.(4.48) başlangıç koşulundan,

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &= U_0^0(x, t_0) = 0 \\ U_1^0(x, t_0) &= x \end{aligned} \quad (4.50)$$

bulunur. Buradan, (4.50)'deki başlangıç koşulları, (4.49)'de yerine yazılarak $U_k^{N-1}(x)$ değerlerini elde edebiliriz. Daha sonra, $N = 5$ için hesaplanan $U_k^N(x)$ değerleriyle $u^N(x, t)$ yaklaşık çözümleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} u^0(x, t) = & xt - 0.166666666666666667xt^3 + 0.0083333333333333336xt^5 \\ & - 0.00019841269841269841270xt^7 + 0.0000027557319223985890653xt^9 \\ & - 2.5052108385441718775 \cdot 10^{-8} xt^{11} + 1.6059043836821614599 \cdot 10^{-10} xt^{13} \\ & - 7.6471637318198164760 \cdot 10^{-13} xt^{15} + 2.8114572543455207632 \cdot 10^{-15} xt^{17} \\ & - 8.2206352466243297168 \cdot 10^{-18} xt^{19} \end{aligned}$$

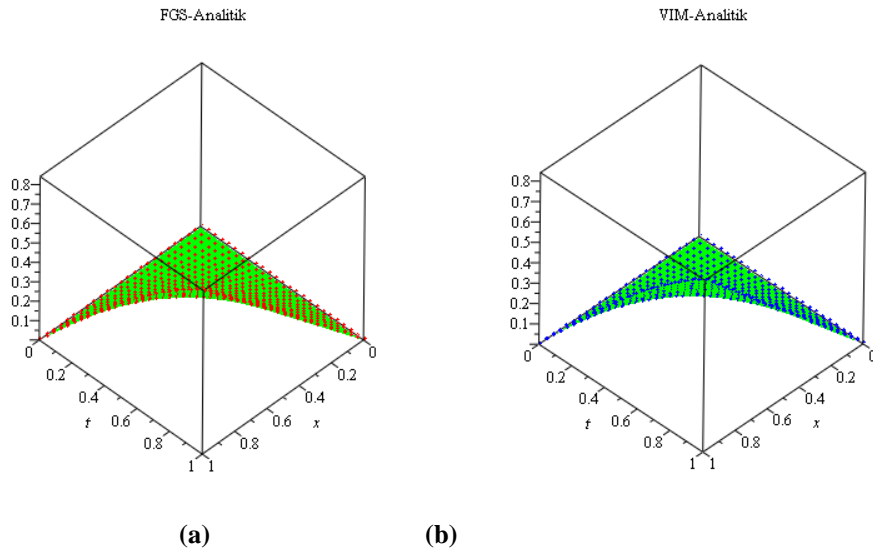
$$\begin{aligned} u^1(x, t) = & -2 \cdot 10^{-20} x + 1.00000000000000001xt + 6.1744069230464723146 \cdot 10^{-21} xt^2 \\ & - 0.166666666666666668xt^3 - 2.69516535916638 \cdot 10^{-22} xt^4 + 0.0083333333333333337xt^5 \\ & + 2.40649400817662 \cdot 10^{-23} xt^6 - 0.00019841269841269841274xt^7 + 2.71978296525 \cdot 10^{-24} xt^8 \\ & + 0.0000027557319223985890421xt^9 + 1.390046386 \cdot 10^{-22} xt^{10} \\ & - 2.5052108385442413965 \cdot 10^{-8} xt^{11} + 2.8975096471 \cdot 10^{-21} xt^{12} \\ & + 1.6059043835818261454 \cdot 10^{-10} xt^{13} + 2.8680121565524026 \cdot 10^{-20} xt^{14} \\ & - 7.6471644013986451631 \cdot 10^{-13} xt^{15} + 1.25636690919126416 \cdot 10^{-19} xt^{16} \\ & + 2.8112723166939901448 \cdot 10^{-15} xt^{17} + 2.05762963806646409 \cdot 10^{-19} xt^{18} \\ & - 8.3834074744716279548 \cdot 10^{-18} xt^{19} + 8.3834074744716279548 \cdot 10^{-20} xt^{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2(x, t) = & -1 \cdot 10^{-20} x + 1.0000000000000000001xt + 3.725158481583552423 \cdot 10^{-20} xt^2 \\ & - 0.166666666666666668xt^3 + 1.995124229256 \cdot 10^{-21} xt^4 + 0.00833333333333333341xt^5 \\ & + 1.117099148831 \cdot 10^{-21} xt^6 - 0.00019841269841269841841xt^7 + 2.489612647617 \cdot 10^{-20} xt^8 \\ & + 0.0000027557319223984990868xt^9 + 2.7018606216 \cdot 10^{-19} xt^{10} \\ & - 2.5052108386117911780 \cdot 10^{-8} xt^{11} + 1.410528319171 \cdot 10^{-18} xt^{12} \\ & + 1.6059043592319139891 \cdot 10^{-10} xt^{13} + 3.49940182334645363 \cdot 10^{-18} xt^{14} \\ & - 7.6472046531717465257 \cdot 10^{-13} xt^{15} + 3.84783726558671207 \cdot 10^{-18} xt^{16} \\ & + 2.8086167146880293910 \cdot 10^{-15} xt^{17} + 1.586836873971630122 \cdot 10^{-18} xt^{18} \\ & - 8.8522129317767617628 \cdot 10^{-18} xt^{19} + 1.6006330752322553430 \cdot 10^{-19} xt^{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3(x,t) = & -2.10^{-20}x + 1.00000000000000000002xt + 4.50663708703188.10^{-21}xt^2 \\
& - 0.16666666666666666669xt^3 + 1.75469630633.10^{-20}xt^4 + 0.008333333333333332392xt^5 \\
& + 4.221594516192.10^{-19}xt^6 - 0.00019841269841269992273xt^7 + 4.4116890012626.10^{-18}xt^8 \\
& + 0.0000027557319223879478429xt^9 + 2.132976504833.10^{-17}xt^{10} \\
& - 2.5052108421083424999.10^{-8}xt^{11} + 4.965370327098.10^{-17}xt^{12} \\
& + 1.6059038086568437138.10^{-10}xt^{13} + 5.50088728264223948.10^{-17}xt^{14} \\
& - 7.6475939602114185587.10^{-13}xt^{15} + 2.70810314607516358.10^{-17}xt^{16} \\
& + 2.7980566098392510819.10^{-15}xt^{17} + 5.028531954183579508.10^{-18}xt^{18} \\
& - 9.5698149373402868773.10^{-18}xt^{19} + 2.3208599092661840074.10^{-19}xt^{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^4(x,t) = & -6.10^{-20}x + 1.00000000000000000003xt + 7.22445765868925.10^{-20}xt^2 \\
& - 0.1666666666666666666705xt^3 + 1.917837506378.10^{-18}xt^4 + 0.0083333333333333251632xt^5 \\
& + 2.7312010787962.10^{-17}xt^6 - 0.00019841269841277178601xt^7 + 1.61040309789647.10^{-16}xt^8 \\
& + 0.0000027557319221067136984xt^9 + 4.397339048207.10^{-16}xt^{10} \\
& - 2.5052108937915148043.10^{-8}xt^{11} + 5.7895429641183.10^{-16}xt^{12} \\
& + 1.6058993374780065848.10^{-10}xt^{13} + 3.63596101443561018.10^{-16}xt^{14} \\
& - 7.6493077685734119505.10^{-13}xt^{15} + 1.018964246322874929.10^{-16}xt^{16} \\
& + 2.7733087276450690733.10^{-15}xt^{17} + 1.086522419080611534.10^{-17}xt^{18} \\
& - 1.0445069943602371121.10^{-17}xt^{19} + 2.9485613826146316926.10^{-19}xt^{20}
\end{aligned}$$

Aşağıda (4.47) eşitliğinin FGS ile RDTM'den bulunan yaklaşık çözümü ve varyasyon iterasyon yöntemi ile analitik çözümünün karşılaştırmasını gösteren grafikler verilmiştir.



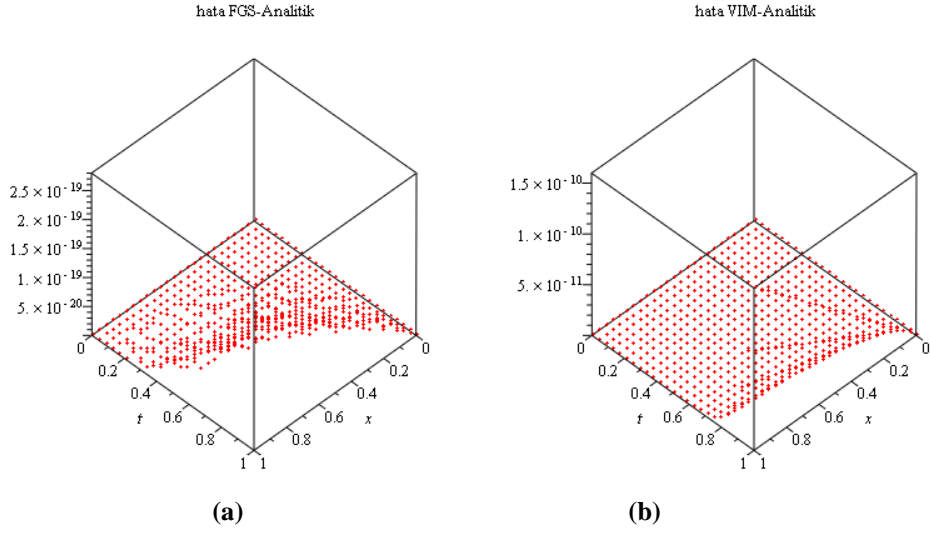
Şekil 4.8. Bu şekilde, (a): $N = 5$ değeri için, Yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise FGS ile RDTM yöntemiyle elde edilen sonucu, (b): Yeşil alan analitik çözümü, mavi noktalar VIM ile elde edilen çözümü göstermektedir.

Aşağıdaki çizelgede FGS ile RDTM yöntemi ile Varyasyon iterasyon yönteminden elde edilen sonuçların analitik sonuçla mutlak hatalarını gösteren değerler verilmiştir.

Çizelge 4.14. Örnek 4.5'in RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri

	x	$N=10$ için Mutlak hata(RDTM)	Mutlak Hata (Varyasyon)
$t = 0.2$	0.2	0	$2.6.10^{-20}$
	0.4	0	$5.3.10^{-20}$
	0.6	0	8.10^{-20}
	0.8	0	$1.1.10^{-19}$
$t = 0.4$	0.2	6.10^{-21}	$2.15377.10^{-16}$
	0.4	2.10^{-20}	$4.3076.10^{-16}$
	0.6	1.10^{-20}	$6.4613.10^{-16}$
	0.8	2.10^{-20}	$8.6151.10^{-16}$
$t = 0.6$	0.2	2.10^{-20}	$4.187663.10^{-14}$
	0.4	4.10^{-20}	$8.375327.10^{-14}$
	0.6	$1.2562990.10^{-20}$	$1.2562990.10^{-13}$
	0.8	8.10^{-20}	$1.6750654.10^{-13}$
$t = 0.8$	0.2	4.10^{-20}	$1.76034197.10^{-12}$
	0.4	8.10^{-20}	$3.52068393.10^{-12}$
	0.6	1.10^{-19}	$5.28102591.10^{-12}$
	0.8	$1.4.10^{-20}$	$7.04136787.10^{-12}$

(4.47) eşitliğinin FGS ile RDTM ve Varyasyonel iterasyon yöntemi ile elde edilen mutlak hatalarının grafiklerini verirsek,



Şekil 4.9.Verilen grafiklerde **(a):** $N=5$ için RDTM-FGS Mutlak Hata Karşılaştırılması **(b):** VIM Mutlak Hata karşılaştırmaları gösterilmiştir.

Örnek 4.6.

Hiperbolik bir denklem tipi olan,

$$u_{tt} - u_{xx} - u = 0 \quad (4.51)$$

Homojen Klein Gordon denkleminin başlangıç koşulu,

$$u(x, 0) = 1 + \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (4.52)$$

olup analitik çözümü,

$$u(x, t) = \sin(x) + \cosh(t)$$

şeklindedir (Keskin, 2011b).(4.51) denkleminin yaklaşık çözümünü FGS ile RDTM (Sabit grid aralıklı Reduce diferensiyel dönüşüm yöntemi) ile bulalım.

Çözüm 4.6.

$N = 5$ seçerek $\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{5}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{5}, t_4 = \frac{4}{5}, t_5 = 1 \right\}$ olan t_i değerleri ile

(4.50) denkleminde Çizelge 4.2'den faydalanarak indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

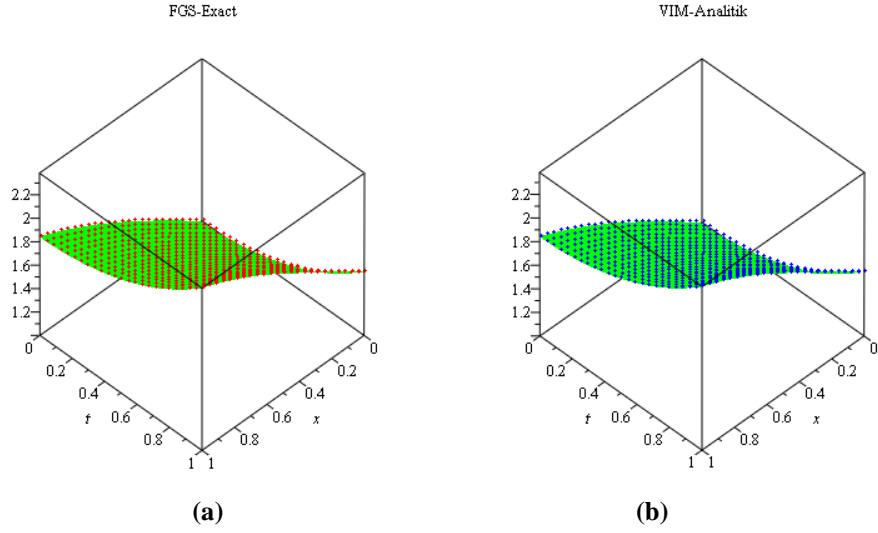
$$\frac{(k+2)!}{k!} U_{k+2}^0(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^0(x) + U_k^0(x) \quad (4.53)$$

eşitliği elde edilir. Burada $U_k(x)$, $u(x,t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferensiyel dönüşümüdür.(4.52) başlangıç koşulundan,

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &= U_0^0(x, t_0) = 1 + \sin(x) \\ U_1^0(x, t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

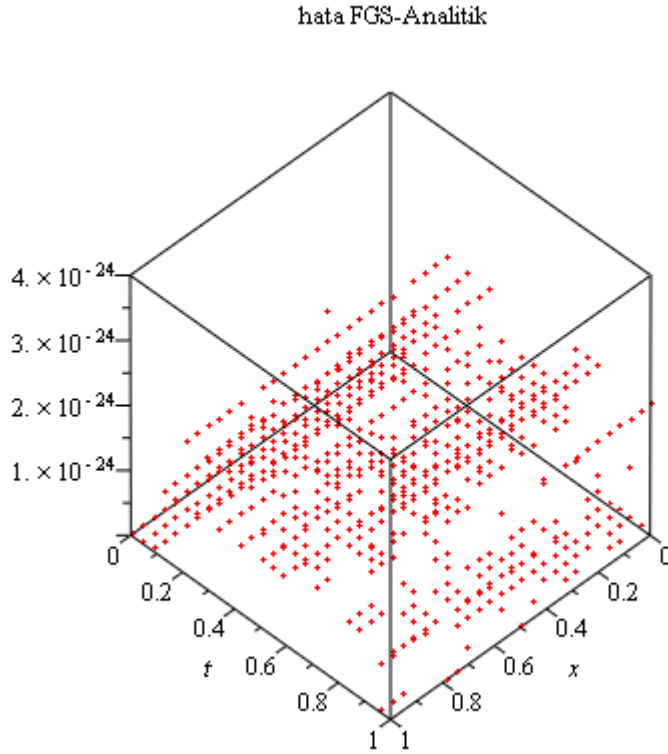
bulunur. Buradan, (4.54)'deki başlangıç koşulları, (4.53)'de yerine yazılarak $U_k^{N-1}(x)$ değerlerini elde edebiliriz.

Aşağıda (4.51) eşitliğinin bulunan yaklaşık çözümü ve varyasyon iterasyon yöntemi ile bulunan sonuçlarıyla, analitik çözümünün karşılaştırılmasını gösteren grafikler verilmiştir.



Şekil 4.10.Bu şekilde, (a): $N = 5$ değeri için, Yeşil alan analitik çözümü, kırmızı noktalar ise FGS ile RDTM yöntemiyle elde edilen sonucu,(b): Yeşil alan analitik çözümü, mavi noktalar VIM ile elde edilen çözümü göstermektedir.

(4.52) eşitliğinin FGS ile RDTM ile elde edilen mutlak hatalarının grafiği verirse,



Şekil 4.11.Verilen grafikte $N=5$ için RDTM-FGS Mutlak Hata karşılaştırılması gösterilmiştir.

Örnek 4.7.

$F(u) = -u^2$ terimi ile linerliği bozulan, lineer olmayan Klein Gordon denklemini(El-Sayed, 2003; Yusufoglu, 2008),

$$u_{tt} - u_{xx} = -u^2 \quad (4.55)$$

olup başlangıç şartları(Wazwaz, 2006)

$$u(x, 0) = 1 + \sin(x), u_t(x, 0) = 0, t \geq 0 \quad (4.56)$$

olan kısmi türevli diferensiyel denklemin çözümünü FGS ile RDTM (Sabit grid aralıklı Reduce diferensiyel dönüşüm yöntemi) ile bulalım.

Çözüm 4.7.

$N = 5$ seçilerek $[0, 1]$ aralığını 5 eşit parçaya bölündüğünde

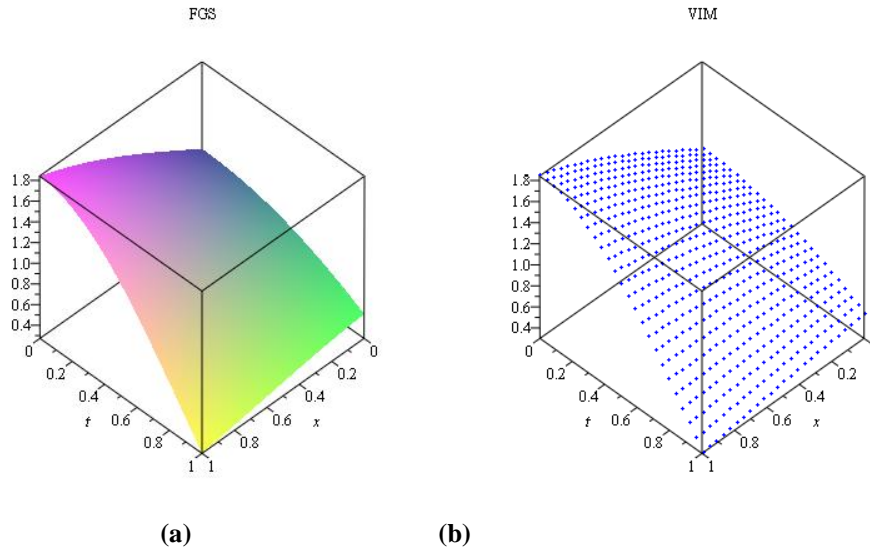
$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{5}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{5}, t_4 = \frac{4}{5}, t_5 = 1 \right\}$$

t_i değerlerini elde ederiz. (4.55) denkleminin ve (4.56) başlangıç koşullarının indirgenmiş diferensiyel dönüşüm karşılığı,

$$\begin{aligned} \frac{(k+2)!}{k!} U_{k+2}(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) - \sum_{s=0}^k U_{k-s}(x) U_s(x) \\ u(x, t_0) &= U_0^0(x, t_0) = 1 + \sin(x), \\ U_1^0(x, t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

olup elde edilen başlangıç koşulları (4.55)denkleminin dönüşüm karşılığında yerine yazıldığında, $U_k^{N-1}(x)$ değerlerini elde edebiliriz. Daha sonra, $N = 5$ için, hesaplanan $U_k^{N-1}(x)$ değerleriyle $u^{N-1}(x, t)$ yaklaşık çözümleri sırasıyla bulunur. $u^5(x, t)$ e kadar

olan yaklaşık çözümler hesaplandıktan sonra elde edilen yaklaşık sonucu gösteren grafikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.12. Bu şekilde, (a): $N = 5$ değeri için FGS ile RDTM yöntemi ile elde edilen sonucu, (b): VIM ile elde edilen sonucu göstermektedir.

Yaklaşık çözüm hesaplandıktan sonra elde edilen yaklaşık sonuçların seçilen x ve t değerlerine göre ADM (El-Sayed, 2003) ve VIM (Yusufoglu, 2008) ile karşılaştırılmaları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.15. Örnek 4.7 'nin RDTM ve VIM Mutlak hata değerleri

x	$t=0.2$			$t=0.3$		
	ADM	VIM	FGS($N=10$)	ADM	VIM	FGS($N=10$)
0.0	0.979999116	0.9800015775	0.9800000001	0.954990005	0.955017653	0.9549266388
0.2	1.166134875	1.16613805	1.166138093	1.125945576	1.125974851	1.125803615
0.4	1.343423788	1.343432104	1.343435074	1.287043874	1.287088824	1.286814817
0.6	1.505052082	1.505073495	1.505080634	1.432404521	1.432497282	1.432104538
0.8	1.644954933	1.64499754	1.645009692	1.557040327	1.557215916	1.556699252
1.0	1.75799845	1.758066925	1.758084239	1.656928567	1.657208637	1.656576413

5. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kısmi diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için, son derece verimli bir yöntem olan indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi üzerine, yeni bir çözüm algoritması oluşturulmuştur. Bu yeni yöntem anlatılmadan önce, yöntemin temelini oluşturan Diferensiyel dönüşüm yöntemi ve İndirgenmiş diferensiyel dönüşüm yönteminden bahsedilmiştir. İndirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemine oluşturulan bu algorithmada problemin verilen çözüm aralığı eşit aralıklara bölünerek “Sabit grid aralıklı indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi” oluşturulmuştur. Yöntemde elde edilen her bir aralıkta çözüme gidilerek problemin çözümüne çok küçük hatalarla yaklaşmıştır. Ayrıca elde edilen rekürans bağıntısının sadece türev içermesinden dolayı mertebenin istenilen hata seviyesine göre artırılabilmesiyle, etkili sonuçlar elde edilmiştir. Yöntemin en büyük avantajı, literatürde bilinen lineer veya lineer olmayan, homojen veya homojen olmayan, birçok kısmi türevli diferensiyel denkleme kolayca uygulanabilmesidir.

KAYNAKLAR

- Abazari, R., Abazari, M., 2012a, Numerical simulation of generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by RDTM and comparison with DTM, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 (2), 619-629.
- Abazari, R., Abazari, M., 2013a, Numerical study of Burgers-Huxley equations via reduced differential transform method, *Computational & Applied Mathematics*, 32 (1), 1-17.
- Abazari, R., and Ardabil Branch, 2011, Numerical Simulation of Coupled Nonlinear Schrödinger Equation by RDTM and Comparison with DTM, *Journal of Applied Sciences*, 11 (20), 3454-3463.
- Abazari, R., and Babak Soltanalizadeh, 2012b, Reduced Differential Transform Method and its application on Kawahara Equations, *Thai Journal of Mathematics*, 11 (1), 199-216.
- Abazari, R., Kilicman, A., 2013b, Numerical Study of Two-Dimensional Volterra Integral Equations by RDTM and Comparison with DTM, *Abstract and Applied Analysis*.
- Ahmad, J. ve Mohyud-Din, S. T., 2014, An efficient algorithm for some highly nonlinear fractional PDEs in mathematical physics, *PLoS One*, 9 (12), e109127.
- Akbari, M., 2014, Application of reduced differential transformation method for solving nonlinear 2-dimensional Brusslator equation, *International Research Journal of Applied and Basic Sciences*, 8 (1), 98-102.
- Al-Sawoor, A. J., and Mohammed O. Al-Amr, 2013, Reduced Differential Transform Method for the Generalized Ito System, 135-145.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 1145-1158.
- Arikoglu, A., Ozkol, I., 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 1145-1158.
- Arora, R., Md Junaid Siddiqui, and V. P. Singh, 2012a, Solutions of Inviscid Burgers' and Equal Width Wave Equations by RDTM, *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, 2 (3), 212.
- Arora, R., Siddiqui, M. J., Singh, V. P., 2012b, Solution of the Modified Equal Width Equation, its Variant and non-homogeneous Burgers' Equation by RDT Method, *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (2), 53-56.
- Ayaz, F., 2003, On the two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 143 (2-3), 361-374.
- Az-Zo'bi, E. A., 2015, ANALYTIC-NUMERIC SIMULATION OF SHOCK WAVE EQUATION USING REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD, *Science International*, 27 (3), 1749-1753.
- Benhammouda, B., Hector Vazquez-Leal, and Arturo Sarmiento-Reyes, 2014, Modified reduced differential transform method for partial differential-algebraic equations, *Journal of Applied Mathematics*.
- Brauer, K., 2000, The Korteweg-de Vries equation: history, exact solutions, and graphical representation, University of Osnabrück/Germany1, p.
- Caglar, H., Ozer, M., Caglar, N., 2008, The numerical solution of the one-dimensional heat equation by using third degree B-spline functions, *Chaos Solitons & Fractals*, 38 (4), 1197-1201.
- Cenesiz, Y., Yildiray Keskin, and Aydın Kurnaz, 2010, The solution of the nonlinear dispersive equations by RDT method, *Int. J. Nonlin. Sci*, 9 (4), 461-467.
- Chen, C. K. ve Ho, S. H., 1999, Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106 (2-3), 171-179.

- Chen, C. K., Ho, S. H., 1999, Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106 (2-3), 171-179.
- Chen, C. K., Ho, S.H., 1996, Application of differential transformation to eigenvalue problems, *Applied Mathematics and Computation*, 79 (2-3), 173–188.
- Chen, C. L., Liu, Y.C., 1998, Solution of two point boundary value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, 79, 179-188.
- Cui, Z. J., Mao, Z. S., Yang, S. J., Yu, P. N., 2013, Approximate Analytical Solutions of Fractional Perturbed Diffusion Equation by Reduced Differential Transform Method and the Homotopy Perturbation Method, *Mathematical Problems in Engineering*.
- Debnath, L., 2011, Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers, Springer Science & Business Media, p.
- Ebenezer Bonyah, A. F., Asiedu-Addo Samuel Kwesi, 2016, Solving Time-Fractional Korteweg-de – varies Equations by Fractional Reduced Differential Transform Method, *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*, 24 (7), 238-251.
- El-Sayed, S. M., 2003, The decomposition method for studying the Klein–Gordon equation, *Chaos Solitons Fractals*, 18, 1025–1030.
- Gupta, P. K., 2011, Approximate analytical solutions of fractional Benney-Lin equation by reduced differential transform method and the homotopy perturbation method, *Computers & Mathematics with Applications*, 61 (9), 2829-2842.
- Haghbin, A., Hesam S., 2012, Reduced Differential Transform Method For Solving Seventh Order Sawada-Kotera Equations, *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 5 (1), 53-59.
- Hassan, I. A.-H., 2004, Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 154 (2), 299-311.
- Hesam, S., Alireza Nazemi, and Ahmad Haghbin, 2012, Reduced Differential Transform Method for Solving the Fornberg-Whitham Type equation, *Int. J. Nonlinear Sci*, 13 (2), 158-162.
- Hosseinzadeh, H., and Elham Salehpour, 2013, Reduced Differential Transform Method for Solving partial Differential Equations with Variable Coefficients, *Technical Journal of Engineering and Applied Sciences*, 3788-3791.
- İbiş, B., Bayram, M., 2012, Approximate Solutions for Some Nonlinear Evolutions Equations By Using the Reduced Differential Transform Method, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1 (3), 288-302.
- Ita, B. I., 2014, The solution of radial diffusivity equation using reduced differential transform method, *International Journal of Conceptions on Computing and Information Technology*, 2 (1), 108-124.
- Jang, M.-J., Chieh-Li Chen, Yung-Chin Liy, 2000, On solving the initial-value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, 115 (2), 145-160.
- Kanzari, S., S. Ben Mariem, and H. Sahraoui, 2016, A Reduced Differential Transform Method for Solving the Advection and the Heat-Like Equations, *Physics Journal*, 2 (2), 84-87
- Keskin, Y., 2008, Diferensiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferensiyel Denklemlerin Çözülmesi, Master, *Selçuk Üniversitesi*.
- Keskin, Y., 2010a, Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için diferansiyel dönüşüm yöntemi, PhD, *Selçuk Üniversitesi*.
- Keskin, Y., and G. Oturanc, 2010b, Numerical simulations of systems of PDEs by reduced differential transform method.
- Keskin, Y., and Galip Oturanc, 2010c, The Reduced Differential Transform Method a New Approach to Fractional Partial Differential Equations, *Keskin, Yildiray, and Galip Oturanc*, 1 (2), 207-217.

- Keskin, Y., and Galip Oturanç, 2010d, Application of reduced differential transformation method for solving gas dynamics equation, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 22 (22), 1091-1096.
- Keskin, Y., Galip Oturanç, 2010e, Numerical solution of Regularized Long Wave equation by reduced differential transform method, *Applied Mathematical Sciences*, 4, 1221-1231.
- Keskin, Y., İbrahim Çağlar, and Ayşe Betül Koç, 2011a, Numerical Solution of Sine-Gordon Equation by Reduced Differential Transform Method. Proceedings of the World Congress on Engineering. London, U.K.
- Keskin, Y., Oturanç, G., 2009, Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10 (6), 741-749.
- Keskin, Y., Oturanç, G., 2010f, Reduced Differential Transform Method for Solving Linear and Nonlinear Wave Equations, *Iranian Journal of Science and Technology Transaction a-Science*, 34 (A2), 113-122.
- Keskin, Y., Oturanç, G., 2010g, Reduced Differential Transform Method for Generalized Kdv Equations, *Mathematical & Computational Applications*, 15 (3), 382-393.
- Keskin, Y., Sema Servi, and Galip Oturanç, 2011b, Reduced Differential Transform Method for Solving Klein Gordon Equations. Proceedings of the World Congress on Engineering. London, U.K.
- Keskin Y., K. A. B., Servi S., 2012, Reduced differential transform method for solving high-dimensional PDEs, *1st Int. Eurasian Conf. on Mathematics Sciences and Applications*, Prishtine, Kosovo.
- Keskin Y., O. G., 2008, The Differential Transform Methods For Nonlinear Functions And Its Applications, *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 9 (1), 69-76.
- Kolebaje, O. T., and Oluwole Emmanuel Oyewande, 2014, On the Numerical Solution of the Nonlinear Stochastic Kadar-ParisiZhang Equation with Reduced Differential Transform Method, *Journal of Science and Technology*, 5 (5).
- Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005a, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (6), 709-719.
- Kurnaz, A., Oturanç, G., Kiris, M. E., 2005b, n-Dimensional differential transformation method for solving PDEs., *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (3), 369-380.
- Mokhtari, R., 2011, Exact Solutions of the Harry—Dym Equation, *Communications in Theoretical Physics*, 55 (2), 204.
- Neog, B. C., 2015, Solutions of some system of non-linear PDEs using Reduced differential transform method, *IOSR Journal of Mathematics*, 11 (5), 37-44.
- Oderinua, R. A., (2012, The Reduced Differential Transform Method for the Exact Solutions of Advection, Burgers and Coupled Burgers Equations, *Theory and Applications of Mathematics & Computer Science*, 2 (1).
- Özkan O., K., Y., 2005, An application of the differential transform method to the boundary value problems of the system of integro differential equations, *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 6, 43-53.
- Rawashdeh, M., Obeidat, N. A., 2014a, On Finding Exact and Approximate Solutions to Some PDEs Using the Reduced Differential Transform Method, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8 (5), 2171-2176.
- Rawashdeh, M. S., 2014b, A New Approach to Solve the Fractional Harry Dym Equation Using the Frdtm, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 95 (4).
- Rawashdeh, M. S., 2014c, Approximate Solutions for Coupled Systems of Nonlinear PDES Using the Reduced Differential Transform Method, *Mathematical and Computational Applications*, 19 (2), 161-171.

- Rawashdeh, M. S., and Nazek A Obeidat, 2015, Applying the Reduced Differential Transform Method to Solve the Telegraph and Cahn-Hilliard Equations, *Thai Journal of Mathematics*, 13 (1), 153-163.
- Ray, S., 2013a, A New Coupled Fractional Reduced Differential Transform Method for Solving Time Fractional Coupled KdV Equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 14 (7-8), 501-511.
- Ray, S. S., 2013b, Soliton solutions for time fractional coupled modified KdV equations using new coupled fractional reduced differential transform method, *Journal of Mathematical Chemistry*, 51 (8), 2214-2229.
- Ray, S. S., 2013c, Numerical solutions and solitary wave solutions of fractional KDV equations using modified fractional reduced differential transform method, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53 (12), 1870-1881.
- S. Shahmorad, A. A. K., 2014, Solving System of Fractional Order Partial Differential Equations by the Reduced Transform Method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 18 (3), 176-181.
- S.Mahmoudvand, B. S., 2014, New Application of Differential Transformation Method for Improved Boussinesq Equation, *Journal of Modern -*Mathematics Frontier*, 3 (1).
- Saravanan, A., and N. Magesh, 2013, A comparison between the reduced differential transform method and the Adomian decomposition method for the Newell–Whitehead–Segel equation, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21 (3), 259-265.
- Secer, A., 2012, Solving Time-Fractional Reaction–Diffusion Equation by Reduced Differential Transform, *International Journal of Computer Science & Emerging Technologies*, 3 (1).
- Servi, S., Keskin, Y., Oturanc, G., 2015a, Reduced Differential Transform Method for Improved Boussinesq Equation, *Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (Icnaam-2014)*, 1648.
- Servi, S., Keskin, Y., Oturanc, G. , 2015b, Reduced Differential Transform Method for Harry Dym Equation, *Proceedings of the Sixth International Scientific Conference – FMNS2015*, 5-10.
- Servi, S., Koc, A. B., Keskin, Y., 2012, Numerical simulations of coupled Sine-Gordon equations by reduced differential transform method, *1. Int. Eurasian Conf. on Mathematics Sciences and Applications*, Prishtine, Kosovo.
- Shukla, H. S., and Gufran Malik, 2015, Biological population model and its solution by reduced differential transform method, *Asia Pacific Journal of Engineering Science and Technology*, 1 (1), 1-10.
- Singh, B. K., Srivastava, V. K., 2015, Approximate series solution of multi-dimensional, time fractional-order (heat-like) diffusion equations using FRDTM, *R Soc Open Sci*, 2 (4), 140511.
- Srivastava, V. K., Awasthi, M. K., Chaurasia, R. K., 2014a, Reduced differential transform method to solve two and three dimensional second order hyperbolic telegraph equations, *Journal of King Saud University - Engineering Sciences*.
- Srivastava, V. K., Awasthi, M. K., Kumar, S., 2014b, Analytical approximations of two and three dimensional time-fractional telegraphic equation by reduced differential transform method, *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1 (1), 60-66.
- Srivastava, V. K., Awasthi, M. K., Tamsir, M., 2013, RDTM solution of Caputo time fractional-order hyperbolic telegraph equation, *Aip Advances*, 3 (3).
- Srivastava, V. K., Mishra, N., Kumar, S., Singh, K., Awasthi, M. K., 2014c, Reduced differential transform method for solving $(1 + n) -$ Dimensional Burgers' equation, *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1 (2), 115-119.
- Taghavi, A., A. Babaei, and A. Mohammadpour, 2015a, Solution of the fractional Zakharov-Kuznetsov equations by reduced differential transform method, *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 4 (1), 77-85.

- Taghavi, A., A. Babaei, and A. Mohammadpour, 2015b, Application of Reduced Differential Transform Method for Solving Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Problems, *Applications & Applied Mathematics*, 10 (1).
- Taghavi, A., Babaei A., Mohammadpour A., 2014, Analytical approximation solution of a mathematical modeling of reaction-diffusion brusselator system by reduced differential transform method, *Journal of Hyperstructures*, 3 (3), 116-125.
- Taghizadeh, N., M. Akbari, and A. Ghelichzadeh, 2011, Exact Solution of Burgers Equations by Homotopy Perturbation Method and Reduced Differential Transformation Method, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5 (5), 580-589.
- Taghizadeh, N., Mojgan Akbari, and Mohazabeh Shahidi, 2014, Homotopy Perturbation Method and Reduced Differential Transform Method for Solving (1+1) Dimensional Nonlinear Boussinesq Equations, *International Journal of Applied Mathematics and Computation*, 5 (5), 28-33.
- Tari, A., 2013, On the Existence Uniqueness and Solution of the Nonlinear Volterra Partial-Integro Differential Equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 16 (2), 152-163.
- Wazwaz, A.-M., 2006, The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 165–176.
- Wazwaz, A.-M., 2010, Partial differential equations and solitary waves theory, SpringerScience& Business Media, p.
- Whitham, G. B., Fowler, R. G., 1975, Linear and nonlinear waves, Physics Today, p.
- Yu, J. P., Jing, J., Sun, Y. L., Wu, S. P., 2016, (n+1)-Dimensional reduced differential transform method for solving partial differential equations', *Applied Mathematics and Computation*, 273, 697-705.
- Yusufoglu, E., 2008, The variational iteration method for studying the Klein-Gordon equation, *Applied Mathematics Letters*, 21 (7), 669-674.
- Zhou, J. K., 1986, Differential Transformation and its applications for electrical circuits, *Huazhong University Press*.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Konya’da doğdum. İlk, orta ve lise eğitimini Konya’da tamamladıktan sonra 2001 yılında Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2005 yılında mezun oldum. Aynı yıl Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde, Matematik Anabilim Dalında, yüksek lisans eğitimime ve arkasından da Selçuk Üniversitesinde öğretim görevliliği görevine başladım. 2008 yılında yüksek lisanstan mezun olduktan sonra 2009 yılında yine Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora programına kayıt oldum. Halen öğretim görevlisi olarak çalışmaya devam etmekteyim.