T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA NA-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

AYŞEGÜL BOZKURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2010
KONYA

.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA NA-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Ayşegül BOZKURT

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2010, 34 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Doç. Dr. Kemal AYDIN
Doç. Dr. Gültekin ÇELİK

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde na-sürekli fonksiyonları inceledik. İkinci bölümde; ideal topolojik uzayları göz önüne aldık ve üçüncü bölümde kullandığımız bazı tanım ve özellikleri verdik. Ayrıca lokal fonksiyonun tanımını ve özelliklerini inceledik.Üçüncü bölümde ise ideal topolojik uzaylarda na-I-sürekli fonksiyonlar adını verdiğimiz yeni bir süreklilik çeşidini tanımladık. Bilinen diğer süreklilik çeşitleriyle karşılaştırılmasını yaptık ve bu süreklilik çeşidinin yerini tespit ettik. Ayrıca ideal topolojik uzaylarda süper-I-sürekli fonksiyon, I-α-irresolute fonksiyon, semi str.na-I-sürekli fonksiyon gibi yeni tanımlar ve bu yeni tanımları kullanarak yeni bir karakterizasyon elde ettik.

Anahtar Kelimeler: na-I sürekli fonksiyon, regüler-I-açık küme, δ-I-açık küme, α-I-açık küme, I-α-ırresolute fonksiyon, semi-I-regularizasyon

ABSTRACT

MS THESIS

NA-I-CONTINUOUS FUNCTIONS IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

Ayşegül BOZKURT

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
MATHEMATICH BRABCH

Advisor: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2010, 34 Sayfa

Jury
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Doç. Dr. Kemal AYDIN
Doç. Dr. Gültekin ÇELİK

Our study consist of three sections. In first section we investigated na-continuous functions. In second section we considered the ideal topological spaces and we gave some definitions and properties which we used in three section. We also investigated defination and properties of local functions. In third section we defined a new type of continuity in ideal topological spaces named na-I-continuous functions. We compared it with other known type of continuity and we localized this type of continuity.Also we gave some new definitions like super-I-continuous functions, I-α-irresolute functions, semi-str.na-I-continuous functions and using this new definitions we gave a new characterization.

Keywords: : na-I-continuous functions, regular-I-open set, δ-I-open set, α-I-open set, I-α-ırresolute functions, semi-I-regularization.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı başından sonuna kadar büyük bir sabır ve titizlikle yöneten, çalışmamın her safhasında yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL Hocam'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı, çalışmalarımda bilgi ve deneyimini benden esirgemeyen Arş.Gör.Tuğba Han ŞİMŞEKLER'e ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayşegül BOZKURT
KONYA-2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
$A - B$	: A fark B
A^t	: A kümesinin tümleyeni
τ_A	: $A \subset X$ olmak üzere X kümesi üzerinde alt uzay topolojisi
(X, τ_A)	: Alt topolojik uzay
ϕ	: Boş küme
$A \subset B$	: B kümesi A kümesini kapsar
$A \not\subset$ B	: B kümesi A kümesini kapsamaz
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
X	: Evrensel küme
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$P(X)$	: Güç kümesi
$\forall$	: Her
(X, τ, I)	: Ideal topolojik uzay
τ	: Topolojik yapı
(X, τ)	: Topolojik uzay
$\Leftarrow$	: Yeter şart
I	: X kümesi üzerindeki herhangi bir ideal
I_c	: X kümesinin sayılabilir alt kümelerinden oluşan ideali
I_f	: X kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideali
$G_{(x)}$	: (X, τ) topolojik uzayındaki x noktasının açık komşuluklar ailesi
$\vartheta_{(x)}$	: (X, τ) topolojik uzayındaki x noktasının komşuluklar ailesi
$\tilde{A}$	: (X, τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ kümesinin yığılma nokta ları kümesi
yoğ(A)	: (X, τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi

1.GİRİŞ

Lokal fonksiyon kavramı ilk defa 1933 yılında Kuratowski tarafından tanımlandı ve özellikleri incelendi (Kuratowski, 1933). 1945 yılında Vaidyanathaswamy (Vaidyanathaswamy, 1960) lokal fonksiyon kavramından yararlanarak yeni bir kapanış işlemi tanımladı ve bu işlemden faydalanarak ideal topolojik uzaylar oluşturdu ve bu topolojinin bir tabanını elde etti. 1964 yılında Hayashi kendi adını verdiği Hayashi uzayını tanımladı. Daha sonra Samuels (Samuels, 1975) 1975 yılında idealleri değiştirerek lokal fonksiyonun bazı ideallerde genel topolojide bilinen kapanış noktası, yoğunlaşma noktası, yığılma noktası ve II.kategoriden nokta kavramlarıyla çakıştığını gösterdi. 1990 yılında Jankovic ve Hamlett (Jankovic, Hamlett, 1990) geçmişte yapılmış tüm bu çalışmaları inceleyerek ideal topolojilerin temelini oluşturan kapsamlı bir çalışma yaptılar.

Biz bu çalışmada; 1986 yılında Gy Ihn Chae,T.Noiri ve Do Won Lee tarafından tanımlanmış na-sürekli fonksiyonları ele aldık ve bu süreklilik çeşidini ideal topolojik uzaylara taşıyarak na-I süreklilik adını verdiğimiz yeni bir süreklilik çeşidi elde ettik, elde ettiğimiz süreklilik çeşidini bilinen diğer süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık ve daha kuvvetlisi ile daha zayıfını bularak yerini tespit ettik. Karşıt örneklerle de yeni tanımladığımız kavramın daha iyi anlaşılmasını hedefledik. Ayrıca yeni kavramların tanımını vererek na-I sürekliliğin bazı özelliklerini elde ettik.

Bu çalışmada (X,τ) topolojik uzayı ve (X,τ, I) ideal topolojik uzayı, üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak alınacaktır. (X,τ) ve (Y,υ) topolojik uzayları kısaca X ve Y ile gösterilecektir. (X, τ) veya (X, τ, I) uzaylarından alınan herhangi bir A alt kümesinin içini ve kapanışını sırasıyla $\text{int}(A)$ ve $Cl(A)$ ile göstereceğiz. Ayrıca (X,τ,I) uzayındaki herhangi bir A alt kümesinin lokal fonksiyonunu kısaca A^* olarak ve yıldız kapanışını da $\text{cl}^*(A)$ olarak göstereceğiz.

2. NA – SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Bu çalışmanın amacı, 1986 yılında Noiri tarafından verilen, na-sürekli fonksiyon olarak tanımlanan, yeni bir fonksiyon sınıfını ayrıntılı incelemektir. Na-sürekli fonksiyon kavramı, Munshi'nin verdiği super-sürekli (Munshi ve Bassan, 1982), fonksiyon sınıfından daha kuvvetli, Arya'nın incelediği strongly-sürekli (Arya ve Gupta,1974)fonksiyon sınıfından daha zayıftır.

(X,τ) ve (Y,υ) topolojik uzaylar olsun. Aksi belirtilmedikçe bu uzaylar üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay alınacaktır. (X,τ) topolojik uzayında alınan herhangi bir A alt kümesinin içi ve kapanışı sırasıyla int(A) ve Cl(A) ile gösterilecektir.

Bir A kümesinin, kapanışının (içinin) içi (kapanışı) kendine eşit oluyorsa 1966'da Dudungji'nin (Dugundji, 1966) tanımladığı üzere A kümesine **regular açık** (A=int(cl(A))) (sırasıyla, **regular kapalı** (A=cl(int(A)))) **küme** denir. (X,τ) topolojik uzayında bütün regular açık (sırasıyla, regular kapalı) kümelerin ailesi RO(X) (RC(X)) ile gösterilecektir.

1966'da Velicko sırasıyla şu tanımları yapmıştır:

(X,τ) topolojik uzayında, bir x noktasını içeren her U regular açık kümesiyle A kümesinin arakesiti boştan farklı ise, x noktasına A kümesinin **δ -kapanış noktası** denir.

(X,τ) topolojik uzayında, bir A kümesinin bütün δ-kapanış noktaları, A kümesi tarafından kapsanırsa, A kümesine **δ-kapalı küme** denir. δ-kapalı kümenin tümleyenine **δ-açık küme** denir. Bir A kümesini içeren bütün δ-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin **δ-kapanışı** denir ve δcl(A) ile gösterilir.

1965 yılında Njaståd; (X,τ) topolojik uzayında, $A \subset int(cl(int(A)))$ oluyorsa A kümesini **α-küme** olarak tanımlamıştır.

(X,τ) uzayında A bir alt küme ve O açık bir küme olmak üzere, eğer A kümesi O kümesi ile bu kümenin semi kapanışı arasında kalıyorsa S.N Maheshwari tarafından **feebly açık küme** (Chae ve Lee, 1986; Das, 1974) olarak adlandırılmıştır. Gyu Ihn Chae ve Do Won Lee (Chae ve Lee, 1986), (X,τ) topolojik uzayında, α-kümelerle feebly-açık kümelerin denkliğini göstermişlerdir. Feebly açık kümenin tümleyenine **feebly-kapalı küme** denir. A kümesini içeren bütün feebly-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin **feebly kapanışı** denir ve fcl(A) ile gösterilir.

(X,τ) uzayında; bütün regular açık kümelerin ailesi RO(X), δ-açık kümelerin ailesi $\delta O(X)$ ve feebly-açık kümelerin ailesi FO(X), α-açıkların ailesi de $\alpha(x)$ sembolü ile gösterilecektir.

2.1. Karakterizasyon

Tanım 2.1.1: f: $X\rightarrow Y$ bir fonksiyonu verilsin. Her $V\in FO(Y)$ kümesi için $f^{-1}(V)\in \delta O(X)$ oluyorsa, bu fonksiyona **na-sürekli fonksiyon** denir (Noiri, 1986).

Teorem 2.1.1: f: $X\rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

a) f fonksiyonu, na-süreklidir;

b) Her $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden her $V\in FO(Y)$ kümesi için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde, x noktasını ihtiva eden bir $U\in \delta O(X)$ kümesi vardır;

c) Her $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden her $V\in FO(Y)$ kümesi için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde, x noktasını ihtiva eden bir $U\in RO(X)$ kümesi vardır;

d) (Y, υ) uzayındaki her F feebly kapalı kümesi için, $f^{-1}(F)$ kümesi δ-kapalıdır;

e) Her $A\subset X$ alt kümesi için, $f(\delta cl(A)) \subset \alpha cl(f(A))$ dır;

f) Her $B \subset Y$ alt kümesi için, $\delta cl(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\alpha cl(B))$ dır.

İspat 2.1.1: **a)$\Rightarrow$b)** f fonksiyonu, na-sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden bir $V\in FO(Y)$ kümesi için, x noktasını ihtiva eden bir $f^{-1}(V)\in \delta O(X)$ bulunur. Böylece $f^{-1}(V)=U$ olup buradan $f(U)\subset V$ elde edilir.

b)$\Rightarrow$c) Bir $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden bir $V\in FO(Y)$ kümesi için $f(U_O)\subset V$ olacak şekilde x noktasını ihtiva eden bir $U_O\in \delta O(X)$ kümesi vardır. δ-açık küme, regular açık kümelerin bileşimi olduğundan (Noiri, 1980), $x\in U\subset U_O$ olacak şekilde bir $U\in RO(X)$ kümesi vardır. Böylece $f(U) \subset V$ elde edilir.

c)$\Rightarrow$d) (Y, υ) uzayında F gibi bir feebly kapalı küme alınsın. Her $x\in f^{-1}(Y\text{-}F)$ noktası için, $x\in U_X \subset f^{-1}(Y\text{-}F)$ olacak şekilde bir $U_X\in RO(X)$ kümesi vardır. Böylece $f^{-1}(F)=\cap\{X\text{-}U_X \mid x\in f^{-1}(Y\text{-}F)\}$ dır. Bu ise $f^{-1}(F)$ kümesinin (X,τ) uzayında δ-kapalı olduğu anlamındadır.

d)$\Rightarrow$**e)** (X,τ) uzayının her A alt kümesi için, fcl(f(A)) kümesi f(A)'yı kapsayan en küçük feebly kapalı kümedir (Chae ve Lee, 1984). Böylece $A\subset f^{-1}$(fcl(f(A))) ve dolayısıyla d) ifadesi gereği δcl(A) $\subset f^{-1}$(fcl(f(A))) olup f(δcl(A))$\subset$fcl(f(A)) elde edilir.

e)$\Rightarrow$**f)** Her $B\subset Y$ alt kümesi için, f(δcl(f^{-1}(B)))$\subset$fcl(f(f^{-1}(B)))$\subset$fcl(B) ve buradan δcl(f^{-1}(B)) $\subset f^{-1}$(fcl(B)) dır.

f)$\Rightarrow$**a)** $V\in$ FO(Y) kümesi alınsın. Bu taktirde Y-V kümesi feebly kapalı bir kümedir ve δcl(f^{-1}(Y-V))$\subset f^{-1}$(fcl(Y-V))=f^{-1}(Y-V)'dir. Böylece f^{-1}(Y-V) kümesi (X,τ) uzayında δ-kapalı küme olup f^{-1}(V) $\in \delta$O(X) olur.

Tanım 2.1.2: f: X$\rightarrow$Y bir fonksiyon olmak üzere, her $x\in X$ noktası ve f(x) noktasının her V komşuluğu için, f(int(cl(U)))$\subset$V olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu varsa bu fonksiyona **super-sürekli fonksiyon** (Munshi ve Bassan, 1982) denir.

Gyu Ihn Chae ve Do Won Lee (Chae ve Lee), feebly-açık kümeler ailesinin (X,τ) uzayı üzerinde, (X,FO(X)) topolojik uzay şeklinde, topoloji belirttiğini göstermişlerdir.

(X,τ) topolojik uzayı için RO(X) bir tabandır. (X,τ) uzayı için bu tabana τ topolojisinin **semi-regülarizasyonu** denir ve τ_S ile gösterilir.

Teorem 2.1.2: f: (X,τ) $\rightarrow$ (Y,υ) bir fonksiyon fonksiyonu verilsin. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) f fonksiyonu na-süreklidir;

(b) Her $x\in X$ noktası için, f_O(x)=f(x) olacak şekilde f_O: (X,τ)$\rightarrow$(Y,FO(Y)) fonksiyonu süper- süreklidir;

(c) Her $x\in X$ noktası için, f_X(x)=f(x) olacak şekilde f_X:(X, τ_S)$\rightarrow$(Y,FO(Y)) fonksiyonu süreklidir;

İspat 2.1.2: (a)$\Rightarrow$(b): (Y, FO(Y)) uzayında V gibi bir açık kümesi verilsin. Hipotez gereği f^{-1}(V)$\in$ δO(X) olur. (Munshi ve Bassan, 1982)' da Teorem 2. 1 gereği, f fonksiyonu süper-sürekli fonksiyondur.

(b) $\Rightarrow$(c): (X,FO(Y)) uzayında her V açık kümesi için, f_{O}^{-1}(V) $\in$ δO(X,τ) ve f_{X}^{-1}(V) kümesi (X, τ_{S}) uzayında açık kümelerdir. Buradan f_{X} fonksiyonu süreklidir.

(c)$\Rightarrow$(a): Her V$\in$ FO(Y,V) kümesi için, V kümesi, (Y,FO(Y)) uzayında açık küme olup f_{X}^{-1}(V) kümesi (X, τ_{S}) uzayında açık kümedir. Böylece f^{-1}(V) $\in$ δO(X,τ) olup f fonksiyonu na-süreklidir.

Tanım 2.1.3: (X, τ) uzayında, x$\in$ X β={B_{λ}} bir süzgeç tabanı olsun. Her V$\in$ RO(X) (V$\in$ FO(X) (Chae ve Lee, 1986) için, $B_{\lambda} \subset$V olacak şekilde bir $B_{\lambda} \in$ β kümesi varsa bu β süzgeç tabanı x noktasına **δ-yakınsar (**Joseph, 1976) (**sf-yakınsar**) denir.

(X, τ) uzayında, bir $\{x_{\lambda}\}_{\lambda\in\delta}$ ağ olmak üzere; eğer bu ağ sonunda x noktasını ihtiva eden her açık küme (her feebly açık küme) içinde kalıyorsa,$\{x_{\lambda}\}_{\lambda\in\delta}$ ağı x noktasına δ-yakınsar (sf-yakınsar).

Teorem 2.1.3: f: (X, τ)→(Y, υ) fonksiyonu için, aşağıdakiler eşdeğerdir:

(a) f fonksiyonu, na-süreklidir;

(b) Her x$\in$ X noktası ve x noktasına δ-yakınsayan her β süzgeç tabanı için, f(β) kümesi de (Y,FO(Y)) uzayındaki f(x) noktasına yakınsar;

(c) Her x$\in$ X noktası ve x noktasına δ-yakınsayan her $\{x_{\lambda}\}_{\lambda\in\delta}$ ağı için, $\{f(x_{\lambda})\}_{\lambda\in\delta}$ kümesi de (Y,FO(Y)) uzayındaki f(x) noktasına yakınsar;

(d) Her x$\in$ X noktası ve x noktasına δ-yakınsayan her β süzgeç tabanı için, f(β) kümesi de (Y,V) uzayındaki f(x) noktasına sf-yakınsar;

(e) Her $x \in X$ noktası ve x noktasına δ -yakınsayan her $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\delta}$ ağı için, $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\delta}$ kümesi de (Y,V) uzayındaki f(x) noktasına sf-yakınsar.

İspat 2.1.3: (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c) ve **(a)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(e)** sırasıyla Teorem 2.1 gereği kolaylıkla ispatlanır.

2.2. Temel Özellikler

Teorem 2.2.1: A alt kümesi, (X, τ) uzayı verilsin, $A \subset X$ açık küme ve f: X$\rightarrow$Y fonksiyonu na-sürekli fonksiyon ise, f|A: A$\rightarrow$Y (A kümesinin kısıtlanışı) fonksiyonu da na- süreklidir.

İspat 2.2.1: $V \in FO(Y)$ alt kümesini alalım. Bu taktirde $f^{-1}(V) \in \delta O(X)$ dir ve böylece bu küme X uzayındaki V_i regular açık kümelerinin bileşimidir. A kümesi (X, τ) uzayında açık bir küme olduğundan, $V_i \cap A$ kümesi A alt uzayında regular açıktır (Noiri, 1980). Böylece $(f|A)^{-1}(V)$ kümesi, $f^{-1}(V_i) \cap A$ kümelerinin bileşimi olup, dolayısıyla $(f|A)^{-1}(V) \in \delta 0(A)$'dır.

Teorem 2.2.2: f: X$\rightarrow$Y ve g: Y$\rightarrow$Z fonksiyonları na-sürekli ise; bu taktirde gof: X$\rightarrow$Z fonksiyonu da na- süreklidir.

İspat 2.2.2: Her δ-açık küme feebly açık küme (Chae ve Lee, 1986) olduğu için ispat aşikârdır.

Lemma 2.2.1: (X, τ) topolojik uzayında $\{X_\lambda | \lambda \in \delta\}$ ailesi verilsin. Her i=1,2,…,n indisi için, $U_{\lambda i} \subset X_{\lambda i}$ olsun. Bu taktirde $\prod_{\lambda\in\delta} X_\lambda$ çarpım uzayında $U=\prod_{i=1}^{n} U_{\lambda i} \times \prod_{\lambda\neq\lambda i} X_\lambda$ kümesinin δ-açık (feebly açık) olması için gerek ve yeter şart her i=1,2,…,n indisi için, $U_{\lambda i} \in \delta O(X_{\lambda i})$ ($U_{\lambda i} \in FO(X_{\lambda i})$) olmasıdır.

İspat 2.2.1: (Herrington, 1974)'den $(\prod X_\lambda)_s = \prod (X_\lambda)_s$. O halde $(X_\lambda)_s$ uzayı X_λ uzayının semi regülarizasyonu olmak üzere, $\prod X_\lambda$ uzayında U kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart $U \in \delta O(\prod X_\lambda)$ olmasıdır. Böylece $U \in \delta O(\prod X_\lambda)$

olması için gerek ve yeter şart, her i=1,2,…,n indisi için $U_{\lambda i}$ ’nin $(X_{\lambda i})_s$ uzayında açık ve dolayısıyla $U_{\lambda i} \in \delta O(X_{\lambda i})$ olmasıdır. Farz edelim ki $U \in FO(\prod X_\lambda)$ olsun. $U \subset$ int (cl(int(U))) $\subset \{\prod_{i=1}^{n}$ int(cl(int($U_{\lambda i}$)))$\times \prod_{\lambda \neq \lambda i} X_\lambda$ idi (Dugundji, 1966). Böylece her i=1,2,…,n indisi için, $U_{\lambda i} \subset$ int(cl(int($U_{\lambda i}$))) bulunur. Bu şekilde her i=1,2,…,n için $U_{\lambda i} \in FO(X_{\lambda i})$ dir. Tersine her i=1,2,…,n için $U_{\lambda i} \in FO(X_{\lambda i})$ kabul edilsin. O zaman $U \subset \prod_{i=1}^{n}$ int(cl(int($U_{\lambda i}$)))$\times \prod_{\lambda \neq \lambda i} X_\lambda \subset$ int(cl(int(U))) olur ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2: Her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ ve her $\{x_\lambda\} \in \prod X_\lambda$ kümesi için $g(\{x_\lambda\}) = \{g_\lambda(x_\lambda)\}$ şeklinde tanımlanan g: $\prod X_\lambda \to \prod Y_\lambda$ fonksiyonları alınsın. Eğer g fonksiyonu na-sürekli ise her $\lambda \in \Lambda$ için g_λ fonksiyonu da na- süreklidir.

İspat 2.2.2: $\beta \in \Lambda$ ve $V_\beta \in FO(Y_\beta)$ kümeleri alınsın. Lemma 3.1. gereği, $V = V_\beta \times \prod_{\lambda \neq \beta} Y_\lambda$ kümesi $\prod Y_\lambda$ uzayında feebly açık kümedir ve $g^{-1}(V) = g_\beta^{-1}(V_\beta) \times \prod_{\lambda \neq \beta} X_\lambda$ kümesi $\prod X_\lambda$ uzayında δ-açık kümedir. Lemma 3.1. gereği $g_\beta^{-1}(V_\beta) \in \delta O(X)$ olup böylece g_β fonksiyonu na-süreklidir.

Teorem 2.2.3: f: X→Y fonksiyonu ve g: X→X×Y her x∈ X noktası için g(x)=(x,f(x)) şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafik fonksiyonu alınsın. Eğer g fonksiyonu na-sürekli ise, f fonksiyonu da na-süreklidir.

İspat 2.2.3: x∈ X noktası ve f(x) noktasını kapsayan V∈ FO(Y) kümesi alınsın. Lemma 3.1 gereği f(x) noktasını kapsayan X×V∈ FO(X×Y) kümesi vardır. g fonksiyonu, na-sürekli olduğundan, Teorem 2.1 gereği g(U) ⊂X×V olacak şekilde x noktasını kapsayan bir U∈ δO(X) kümesi vardır. Böylece f(U) ⊂V elde edilir.

Uyarı 2.2.1: Gyu Ihn Chae ve Do Won Lee (Chae ve Lee, 1986), Örnek 2.2. de A∈ FO(X) ve B∈ FO(Y) için X ×Y çarpım uzayında V∈ FO(X×Y) kümesinin genellikle A ×B kümelerinin bileşimi şeklinde olmayabileceği belirtilmiştir. Bu yüzden Teorem 3.4’ün tersi genellikle doğru olmayabilir.

2.3. Karşılaştırmalar

Bu bölümde na-sürekli ile sürekliliğin birçok güçlü formu arasındaki ilişki incelenmiştir. Burada kullanılacak fonksiyonlar tekrar tanımlanacaktır.

Tanım 2.3.1: f: X→Y bir fonksiyon olmak üzere, eğer her X uzayının her A alt kümesi için $f(cl(A)) \subset f(A)$ oluyorsa, bu fonksiyona **strongly-sürekli fonksiyon** (Levine, 1960) (str.c.) denir.

Uyarı 2.3.1: (Levine 1960, Sonuç 2)'de f:X→Y fonksiyonunun str.c. olması, her $B \subset Y$ kümesi için, $f^{-1}(B)$ kümesinin X uzayında hem açık hem kapalı küme olmasını gerektirdiği gösterilmiştir.

Tanım 2.3.2: f:X→Y bir fonksiyon olmak üzere, eğer Y uzayında her V açık (regular-açık) kümesi için, $f^{-1}(V) \in RO(X)$ ise bu fonksiyona **completely-sürekli fonksiyon** (cc) (Arya ve Gupta, 1974) (β-continuous (βc) (Chae ve Lee, 1984) denir.

Carnahan (Carnahan, 1974), βc fonksiyonları, R-maps olarak adlandırmıştır.

Tanım 2.3.3: f:X→Y fonksiyon olmak üzere, her $x \in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden her V açık komşuluğu için, $f(cl(U)) \subset V$ **[**$f(int(cl(U))) \subset int(cl(V))$, $f(U) \subset int(cl(V))$**]** olacak şekilde x noktasının U gibi bir açık komşuluğu varsa bu fonksiyona, **strongly θ-sürekli fonksiyon** (STθ) (Noiri, 1972) (**δ-sürekli** (δc) (Noiri, 1980), **almost-sürekli** (Ac) (Singal ve Singal, 1968)) denir.

Teorem 2.3.1: strongly sürekli $\Rightarrow$ na-sürekli $\Rightarrow$ super- sürekli $\Rightarrow$ sürekli

İspat 2.3.1: Uyarı 4.1 gereği f: X→Y na-sürekli fonksiyon ve Y uzayında V bir açık küme olsun. Öyleyse her açık küme, feebly açık küme olduğundan $f^{-1}(V) \in \delta O(X)$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu, super-sürekli ((Munshi ve Bassan, 1982) Teorem 2.1) dir. 3.geçiş (Munshi ve Bassan, 1982) ve (Noiri, 1972)'te gösterilmiştir.

Yukarıdaki Teoremin tersinin doğru olmadığı Örnek 2.3.1. ve 2.3.2. ile gösterilmiştir.

Örnek 2.3.1: X={a,b,c} kümesi üzerinde τ ={Ø, {a}, {b}, {a,b},X} topolojisi verilsin. f:X→X fonksiyonu; f(a)=f(b)=a ve f(c)=c şeklinde tanımlansın.

Öyleyse τ =FO(X) olduğundan f fonksiyonu na-süreklidir. Ancak f fonksiyonu, str.θ.c. ve dolayısıyla str.c. (Noiri, 1984) değildir.

Örnek 2.3.2: (R,U) alışılmış uzayda f: R $\rightarrow$R birim fonksiyon olmak üzere, R kümesi, regular açık olduğu için, f fonksiyonu str.θ.c.'dir bununla birlikte R uzayında açık olmayan feebly açıklar olduğu için (Chae ve Lee, 1986), f fonksiyonu na-sürekli değildir. Bu yüzden, süper-sürekli fonksiyonlar genellikle na-sürekli değillerdir.

Uyarı 2.3.2: Na-sürekli ve β-sürekli, sıradaki örnekte görüleceği gibi birbirinden bağımsızlardır.

Örnek 2.3.3: X={a, b, c} kümesi üzerinde τ ={Ø, {a}, X} topolojisi verilsin. Öyleyse f:X$\rightarrow$X birim fonksiyonu β-süreklidir ancak na-sürekli değildir.

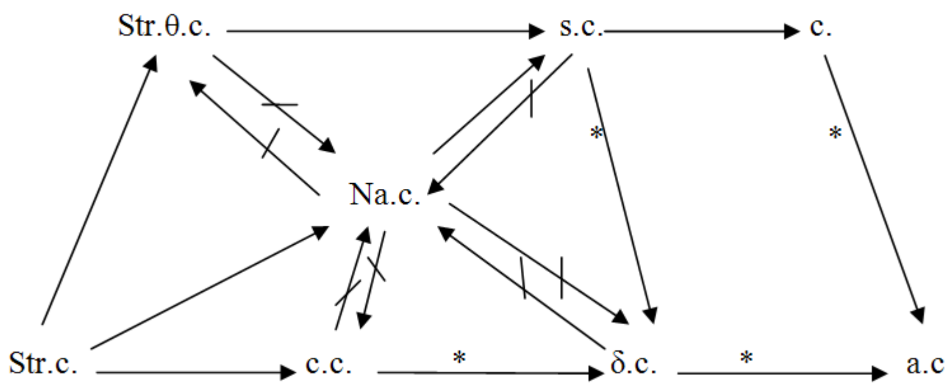
Örnek 2.3.4: (R, U) alışılmış uzayda Y={a, b, c, d} kümesi üzerinde τ ={Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}} topolojisi verilsin.

f: R $\rightarrow$Y fonksiyonu $p \neq q \neq r$ olmak üzere; eğer, $x<p$ ise f(x)=a; eğer, $p<x<q$ ise f(x)=b; eğer, $q<x<r$ ise f(x)=c; eğer x=p, r ise f(x)=d; şeklinde tanımlansın. Öyleyse f fonksiyonu na-süreklidir fakat β-sürekli ve dolayısıyla c.c. değildir.

Uyarı 2.3.3: c.c. ve na-(c) Örnek 4.4. ve sıradaki örnekte gösterildiği gibi birbirinden bağımsızdır:

Örnek 2.3.5: X={a, b, c, d} kümesi üzerinde τ_1={Ø, {c}, {a, b}, {a, b, c}, X} topoljisi; Y={x, y, z} kümesi üzerinde τ_2={Ø, {x}, Y} topolojisi verilsin. f: X$\rightarrow$Y fonksiyonu, f(a)=f(b)=x, f(c)=y, f(d)=z şeklinde tanımlansın. Öyleyse f fonksiyonu, c.c. olup, na.c. değildir.

Bu bölümdeki bu sonuçlardan, aşağıdaki şema elde edilir. *(Biliniyor).



3.İDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümü iki başlık altında işleyeceğiz. Birinci bölümde ideal topolojik uzaylardaki temel tanım ve kavramları vereceğiz. İkinci bölümde ise ideal topolojik uzaylarda çok kullandığımız lokal fonksiyon kavramının tanımı ve bu fonksiyondan faydalanarak elde edilen bazı özellikleri vereceğiz. Yine lokal fonksiyon yardımıyla Kuratowski kapanış işleminin tanımını ve bulunan özelliklerini vereceğiz. Bu sayede tezimizin son kısmında kullanacağımız kavramları bu bölümde ayrıntılı bir şekilde incelemiş olacağız

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: Boş olmayan bir X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir I$\subset P(X)$ ailesi verilsin. Eğer I ailesi,

(ı) Her $A,B\in I$ kümeleri için, $A\cup B\in I$ (sonlu toplamsallık)

(ıı) Her $A\in I$ kümesi ve $B\subseteq A$ alt kümesi için, $B\in I$ (kalıtımsallık)

özelliklerini sağlarsa bu taktirde, I ailesine X **kümesi üzerinde bir ideal** denir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

Tanım 3.1.2: $P(X)$ kümesi, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $\alpha: P(X)\to P(X)$ fonksiyonu,

(ı) $\alpha(\phi)=\phi$

(ıı) $A\in P(X)\Rightarrow A\subseteq\alpha(A)$

(ııı) $A,B\in P(X)\Rightarrow\alpha(A\cup B)=\alpha(A)\cup\alpha(B)$

(ıv) $A\in P(X)\Rightarrow\alpha(\alpha(A))=\alpha(A)$

şartlarını sağlarsa bu taktirde, α küme fonksiyonuna **Kuratowski kapanış işlemi** denir. $K=\{A\in P(X): A=\alpha(A)\}$ ailesine, X kümesi üzerindeki topolojiye göre **kapalılar ailesi** denir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

Uyarı 3.1.1: $P(X)$ kümesi, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $d\ :\ P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

(ı) $d(\phi) = \phi$

(ıı) $A \subset d(A)$

(ııı) $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$

(ıv) $d(d(A)) \subseteq d(A)$

şartlarını sağlasın.

Bu taktirde, $\alpha(A) = A \cup d(A)$ şeklinde tanımlanan α: $P(X) \to P(X)$ fonksiyonu, $P(X)$ güç kümesi üzerinde bir Kuratowski kapanış işlemidir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

İspat. (ı) $\alpha(A) = A \cup d(A)$ ifadesinde $A = \phi$ alırsak $\alpha(\phi) = \phi \cup d(\phi)$ olur. Uyarı 3.1.1 (ı) den, $d(\phi) = \phi$ olup $\alpha(\phi) = \phi$ bulunur.

(ıı) Herhangi bir $A \in P(X)$ alt kümesi için, α küme fonksiyonu tanımından $\alpha(A) = A \cup d(A)$ bağıntısı bulunur. Birleşim işlemi gereği, $A \subset A \cup d(A) = \alpha(A)$ ifadesi elde edilir. Böylece $A \subset \alpha(A)$ olur.

(ııı) Herhangi bir $A, B \in P(X)$ alt kümeleri için, α küme fonksiyonu tanımı ve Uyarı 3.1.1 (ıı) gereği,

$$\alpha(A \cup B) = (A \cup B) \cup d(A \cup B) = (A \cup B) \cup (d(A) \cup d(B)) = (A \cup d(A)) \cup (B \cup d(B))$$
$$= \alpha(A) \cup \alpha(B)$$

ifadesi bulunur. Böylece $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ sonucunu elde ederiz.

(ıv) Herhangi bir $A \in P(X)$ alt kümesi için, α küme fonksiyonu tanımından $\alpha(A) = A \cup d(A)$ olur. Buradan 3.1.1. (ııı) ifadesi gereğince,

$$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A \cup d(A)) = \alpha(A) \cup \alpha(d(A)) = (A \cup d(A)) \cup (d(A) \cup d(d(A)))$$

bağıntısı bulunur. Uyarı 3.1.1 (ııı) ifadesinden, $d(d(A)) \subseteq d(A)$ olur. Böylece $\alpha(\alpha(A)) = A \cup d(A) = \alpha(A)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, $\alpha : P(X) \to P(X)$ küme fonksiyonu Tanım 3.1.2' de verilen Kuratowski kapanış işlemi şartlarını sağlar.

Tanım 3.1.3: X kümesi üzerinde $\varphi = \{\phi, X\}$ şeklinde tanımlanan τ topolojisine **ayrık olmayan topoloji**, (X, φ) ikilisine de **ayrık olmayan uzay** denir (Csaszar, 1997).

Tanım 3.1.4: X kümesi üzerinde tanımlanan $P(X)$ topolojisine **ayrık topoloji**, $(X, P(X))$ ikisine de **ayrık uzay** denir (Csaszar, 1997).

Tanım 3.1.5: (X, τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \upsilon_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap V \neq \phi$ ise, $x \in X$ noktasına A **kümesinin bir kapanış noktası** denir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

Tanım 3.1.6: (X, τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \upsilon_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap V$ kümesinde sayılamayan sonsuz sayıda eleman varsa, $x \in X$ noktasına A **kümesinin bir yoğunlaşma noktası** denir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

Tanım 3.1.7: (X, τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \upsilon_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap (V - \{x\}) \neq \phi$ ise, $x \in X$ noktasına A **kümesinin bir yığılma noktası** denir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

3.2. Lokal Fonksiyon

Tanım 3.2.1: (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. I ailesi X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu taktirde,

$$A^*(I, \tau) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin I\}$$

kümesine A kümesinin I idealine ve τ topolojisine bağlı **lokal fonksiyonu** denir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

$A^*(I,\tau)$ gösterimi için (Jankovic ve Hamlet,1990)'de gösterildiği gibi $A^*(I)$ veya kısaca A^* sembolü kullanılır ve buna A kümesinin lokal fonksiyonu denir.

$X = \phi$ bir küme olmak üzere X kümesindeki en basit idealler minimal ideal ($I = \phi$) ve maksimal ideal $(I = P(X))$ olup A^* kümesi bu ideallere göre (Jankovic ve Hamlet,1990)' de aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$A^*(\{\phi\},\tau) = \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin \phi\right\}$$

$$= \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \neq \phi\right\}$$

$$= Cl(A)$$

Buradan,

$$A^*(\{\phi\},\tau) = Cl(A)$$

sonucu elde edilir.

$$A^*(P(X),\tau) = \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin P(X)\right\} = \phi$$

Buradan,

$$A^*\ (P(X),\tau) = \varnothing$$

sonucu elde edilir.

(X,τ) uzayında I_f (sonlu alt kümeler ideali), I_c (sayılabilir alt kümeler ideali) idealleri için (Jankovic ve Hamlet,1990)' de A^* kümesi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$A^*(I_f,\tau) = \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)},\quad U \cap A \notin I_f\right\}$$

$$= \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)},\quad U \cap A \quad \textit{kümesi sonsuz}\right\}$$

$$= \tilde{A}$$

Buradan,

$$A^*(I_f,\tau) = \tilde{A}$$

sonucu elde edilir.

$$A^*(I_c,\tau) = \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)},\quad U \cap A \notin I_c\right\}$$

$$= \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)},\quad U \cap A \quad \textit{kümesi sayılamaz}\right\}$$

$$= yo\breve{g}(A)$$

Buradan,

$$A^*(I_c,\tau)=yoğ(A)$$

sonucu elde edilir.

(Samuels, 1975)' de, A kümesinin $A^*(I,\tau)$ lokal fonksiyonunun, A kümesinin kapanış noktası, yığılma noktası ve kapanış noktasının bir genelleştirilmesi olduğu verilmiştir.

Teorem 3.2.1: (X,τ) uzayı, X kümesi üzerinde I_1,I_2 idealleri ile birlikte verilen bir topolojik uzay ve $A,B\subseteq X$ olsun. Bu taktirde,

(a) $A\subseteq B\Rightarrow A^*\subseteq B^*$

(b) $I_1\subseteq I_2\Rightarrow A^*(I_2)\subseteq A^*(I_1)$

(c) $A^*=Cl(A^*)\subseteq Cl(A)$ (A^* kümesi kapalı bir kümedir)

(d) $(A^*)^*\subseteq A^*$

(e) $(A\cup B)^*=A^*\cup B^*$

(f) $(A\cap B)^*\subseteq A^*\cap B^*$

(g) $(A^*-B^*)=(A-B)^*-B^*\subseteq(A-B)^*$

(ı) $U\in\tau\ \Rightarrow U\cap A^*=U\cap(U\cap A)^*\subseteq(U\cap A)^*$

(k) $S\in I\ \Rightarrow\ (A\cup S)^*=A^*=(A-S)^*$

(Jankovic ve Hamlet, 1990).

İspat. (a) $x\in A^*$ noktası olsun. O halde Tanım 3.2.1 den her $U\in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $A\cap U\notin I$ dır. $A\subset B$ ise, $A\cap U\subset B\cap U$ olur. Eğer $B\cap U\in I$ olsaydı I idealinin kalıtımsallık özelliğinden, $A\cap U\in I$ olurdu. Bu da, bir çelişki yaratır. O halde her $U\in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $B\cap U\notin I$ dır. Buradan Tanım 3.2.1 gereği, $x\in B^*$ olur. Böylece alt küme tanımı gereği $A^*\subset B^*$ bağıntısı bulunur.

(b) $I_1\subseteq I_2$ ise $I_2^t\subseteq I_1^t$ olur. ……….(1)

$$A^*(I_2)=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\notin I_2\right\}$$

$$A^*(I_2)=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\in I_2^t\right\}\text{ ………. (2)}$$

(1), (2) ifadeleri ve Tanım 3.2.1 kullanılarak,

$$A^*(I_2)=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\in I_1^t\right\}$$

$$=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\notin I_1\right\}$$

$= A^{*}(I_1)$

sonucu elde edilir. Buradan,

$$A^{*}(I_2) \subseteq A^{*}(I_1)$$

olduğu görülür.

(c) Öncelikle $A^{*} = Cl(A^{*})$ eşitliğini gösterelim. Her $A \subset X$ alt kümesi için, $A \subset Cl(A)$ olduğunu biliyoruz. Bu sonuç A kümesinin lokal fonksiyonu içinde sağlanacağından;

$$A^{*} \subseteq Cl(A^{*}) \text{ ………. (3)}$$

bağıntısını elde ederiz. $A^{*}(\{\phi\},\tau) = Cl(A)$, $A^{*}(P(X),\tau) = \phi$ olduğu (Jankovic ve Hamlet, 1990)' de gösterilmiştir. Teorem 3.2.1 (b) den görülür ki kümenin lokal fonksiyonu en büyük değerini $I = \{\phi\}$ minimal ideali için, en küçük değerini de $I = P(X)$ maksimal ideali için alır. O halde (X,τ) uzayındaki her I ideali için $\phi \subseteq I \subseteq P(X)$ ifadesi sağlandığından,

$$\phi \subseteq A^{*}(I,\tau) \subseteq Cl(A) \text{ …………..(4)}$$

olur.

Şimdi de $Cl(A^{*}) \subset A^{*}$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in Cl(A^{*})$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x \notin A^{*}$ olsun. $Cl(A^{*}) = \bigcap\{ F \subset X : F$ kapalı küme ve $A^{*} \subset F \}$ ifadesinden ve $x \in Cl(A^{*})$ olduğundan $A^{*} \subset F$ olan her F kapalı kümesi için, $x \in F$ olur. $A^{*} \subset F$ ve F kapalı küme ise $X - F \subset X - A^{*}$ olup $X - F$ açık kümedir. Buradan $X - F \cap A^{*} = \phi$ bulunur. $x \notin A^{*}$ ifadesinden $x \in (X - A^{*})$ elde edilir ve $x \in F$ olduğundan $F \cap (X - A^{*}) \neq \phi$ olur.

$X - F \cap A^{*} = \phi$ ve $F \cap (X - A^{*}) \neq \phi$ olması $F \subset A^{*}$ olduğunu gösterir. Bu ise bir çelişkidir. O halde,

$$Cl(A^{*}) \subset A^{*} \text{ ……………. (5)}$$

bulunur.

(3), (4) ve (5) ifadelerinden $A^{*} = Cl(A^{*}) \subseteq Cl(A)$ bağıntısı elde edilir.

(d) Herhangi bir $x \in (A^{*}(I))^{*}(I)$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x \notin A^{*}(I)$ olsun.Tanım 3.2.1 gereğince, $x \in (A^{*}(I))^{*}(I) = \{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}$ için, $(U \cap A^{*}) \notin I \}$

olur. Her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $(U \cap A^{*}) \notin I$ ifadesi ve idealin kalıtımsallık özelliği gereğince, $(U \cap A^{*}) \neq \phi$ olduğu bulunur. Kapanış noktası tanımından $x \in Cl(A^{*})$ elde edilir. (e) şıkkı gereğince, $Cl(A^{*}) = A^{*}$ olması $x \in A^{*}$ olduğunu gösterir. Bu ise, bir çelişkidir. O halde $x \in (A^{*})^{*}$ noktası için, $x \in A^{*}$ olduğundan $(A^{*})^{*} \subseteq A^{*}$ bağıntısı elde edilir.

(e) Tanım 3.2.1 gereğince A ve B kümelerinin lokal fonksiyonları,

$$A^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \notin I \right\} \ldots\ldots\ldots.. (6)$$

$$B^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap B \notin I \right\} \ldots\ldots\ldots.. (7)$$

olur.

(6) ve (7) ifadelerinde birleşim işlemi alırsak,

$$A^{*}(I) \cup B^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \notin I \quad veya \quad U \cap B \notin I \right\}$$

$$A^{*}(I) \cup B^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [(U \cap A) \cup (U \cap B)] \notin I \right\}$$

$$A^{*}(I) \cup B^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [U \cap (A \cup B)] \notin I \right\}$$

elde edilir. Tanım 3.2.1'den,

$$A^{*}(I) \cup B^{*}(I) = (A \cup B)^{*}(I)$$

bulunur.

(f) $(A \cap B)^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [U \cap (A \cap B)] \notin I \right\}$

$$(A \cap B)^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [(A \cap U) \cap (B \cap U)] \notin I \right\}$$
$$(A \cap B)^{*}(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [(A \cap U) \notin I \quad ve \quad (B \cap U) \notin I \right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

(8) ifadesi gereği,

$$(A\cap B)^*(I)\subseteq\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad (A\cap U)\notin I\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$(A\cap B)^*(I)\subseteq\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad (B\cap U)\notin I\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

elde edilir. (9) ve (10) ifadelerinin kesişimlerini alırsak,

$$(A\cap B)^*(I)\subseteq A^*(I)\cap B^*(I)$$

olduğu bulunur.

(g) $A\cup B=(A-B)\cup B$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte (*) işlemi uygulanırsa, Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A\cup B)^*=[(A-B)\cup B]^*=(A-B)^*\cup B^*$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının B^{*t} kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$(A\cup B)^*\cap B^{*t}=[(A-B)^*\cup B^*]\cap B^{*t}$$

$$(A^*\cup B^*)\cap B^{*t}=[(A-B)^*\cup B^*]\cap B^{*t}$$

$$(A^*\cup B^{*t})\cup(B^*\cap B^{*t})=[(A-B)^*\cap B^{*t}]\cup(B^*\cap B^{*t})$$

olur. $B^*\cap B^{*t}=\phi$ olduğundan,

$$A^*\cap B^{*t}=(A-B)^*\cap B^{*t}$$

eşitliği elde edilir. Fark işlemi tanımı gereği, $A^*-B^*=(A-B)^*-B^*$ eşitliği yazılır. Bu son eşitlikten

$$A^*-B^*=(A-B)^*-B^*\subseteq(A-B)^*$$

bulunur.

(h) Herhangi bir $x\in U\cap A^*$ noktasını alalım. Kesişim işlemi tanımından $x\in U$ ve $x\in A^*$ dır. Tanım 3.2.1 gereği her $V\in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $V\cap A\notin I$ olur. $x\in U$ ve $U\in\tau$ olduğundan komşuluk tanımı gereği $U\in G_{(x)}$ olur. Bir noktanın komşuları kesişimi yine o noktanın komşuluğu olduğundan $V\cap U\in G_{(x)}$ olur. $x\in A^*$ olup, $[(V\cap U)\cap A]=[V\cap(U\cap A)]\notin I$ ifadesi elde edilir. Tanım 3.2.1 gereği, $x\in(U\cap A)^*$ bulunur. $x\in U\cap A^*$ noktası için, $x\in(U\cap A)^*$ olduğundan

$$U \cap A^* \subseteq (U \cap A)^* \text{ ………. } (11)$$

bulunur. (11) ifadesinde her iki tarafın U kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$[U \cap (U \cap A^*)] \subseteq [U \cap (U \cap A)^*]$$

$$(U \cap A^*) \subseteq [U \cap (U \cap A)^*] \text{ ………… } (12)$$

$U \cap A \subseteq A$ bağıntısı ve Teorem 3.2.1 (a) gereğince;

$$(U \cap A)^* \subseteq A^* \text{ …………… } (13)$$

olur. (13) ifadesinin her iki tarafının U kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$[U \cap (U \cap A)^*] \subseteq U \cap A^* \text{ …………… } (14)$$

bulunur. (12) ve (14) ifadelerinden,

$$U \cap A^* \subseteq U \cap (U \cap A)^* \text{ …………… } (15)$$

eşitliği yazılır. O halde (11) ve (15) ifadeleri gereği,

$$U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$$

bulunur.

(k) $A \cup S = (A - S) \cup S$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte her iki tarafın (*) işlemi alınırsa,

$$(A \cup S)^* = [(A - S) \cup S]^*$$

olur. Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A \cup S)^* = A^* \cup S^* = (A - S)^* \cup S^* \text{ ………….. } (16)$$

elde edilir. Tanım 3.2.1 ve $S \in I$ olduğundan,

$S^* = \{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad (U \cap S) \in I \} = \phi$ olur. (16) ifadesinde $S^* = \phi$ yazılırsa $(A \cup S)^* = A^* = (A - S)^*$ elde edilir.

(Jankovic ve Hamlet, 1990)' de, bir Cl^* işlemi tanımlanmış ve bu işlemin aslında bir Kuratowski kapanış işlemi olduğu aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

Lokal fonksiyon olarak tanımlanan (*) : $P(X) \to P(X)$ fonksiyonu Teorem 3.2.1'in (d) ve (e) şıkları ile,

$$\phi^*(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad (U \cap \phi) \notin I \right\}$$

$$\phi^*(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad \phi \notin I \right\}$$

bulunur. Bu ise, I ideal olduğundan kalıtımsallık özelliği gereği imkansızdır. Dolayısıyla $\phi \in I$ olur. Dolayısıyla $\phi^*(I) = \phi$ olup, (*): $P(X) \to P(X)$ lokal fonksiyonu, Uyarı 3.1.1 de verilen $d : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu ile çakışır. Her $A \subseteq X$ alt kümesi için, $Cl^*(A) = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^* : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu Kuratowski Kapanış işlemidir.

(Jankovic ve Hamlet, 1990) referansında , X kümesindeki minimal ideal olan $I = \{\phi\}$ ve maksimal ideal olan $I = P(X)$ idealleri için, $Cl^*(A)$ kümesi aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$I = \{\phi\}$ minimal ideali için, $A^*(\{\phi\}) = Cl(A)$ olup bu ifade $Cl^*(A) = A \cup A^*$ eşitliğinde yazılırsa $Cl^*(A) = A \cup Cl(A)$ olur. Kapanış işleminin $A \subset Cl(A)$ özelliğinden, $Cl^*(A) = Cl(A)$ olur.

$I = P(X)$ maksimal ideali için, $A^*(P(X)) = \phi$ olup $Cl^*(A) = A \cup A^*$ eşitliğinde yazılırsa, $Cl^*(A) = A$ olur.

Cl^* fonksiyonu yardımıyla üretilen τ^* topolojisi (Jankovic ve Hamlet, 1990) de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.2: τ topolojisi X kümesindeki ilk topoloji olmak üzere, Cl^* fonksiyonu tarafından üretilen topoloji $\tau^*(I,\tau)$ ya da $\tau^*(I)$ (kısaca τ^*) ile gösterilir. Bu topoloji,

$$\tau^*(I) = \{U \subseteq X : Cl^*(X - U) = X - U\}$$

şeklindedir (Jankovic ve Hamlet, 1990).

$I=\{\phi\}$ minimal ideali için, $\tau^{*}(I)=\tau$ elde edilir. $I=P(X)$ maksimal ideali için, $\tau^{*}(I)=P(X)$ olup X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\phi\subseteq I\subseteq P(X)$ olduğundan $\tau\subseteq\tau^{*}(I)\subseteq P(X)$ bağıntısı Teorem 3.2.1’in (b) şıkkından elde edilir.

4. NA-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde ideal topolojik uzaylarda na-I sürekli fonksiyon kavramını tanımladık ve bu süreklilik çeşidinin bazı karakterizasyonlarını verdik. Ayrıca daha önce tanımlanmış bazı süreklilik çeşitleriyle de karşılaştırmasını yaptık.

Amacımız bu sürekliliğin özelliklerini ayrıntılı bir şekilde incelemektir.

4.1.Ön Bilgiler

Tanım 4.1.1: (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ alt kümesi için,$A=int(cl^*(A))$ ($A=cl^*(int(A))$) ise A kümesine **regular-I-açık (regular-I-kapalı) küme** denir (Yüksel ve ark., 2005).

Tanım 4.1.2: (X,τ,I) ideal topolojik uzayında, $A\subset X$ alt kümesi ve X uzayında alınan bir x noktası için;

(1) x'in her U regular I-açık komşuluğuyla A kümesinin arakesiti boştan farklı ise x noktasına A kümesinin **δ-I-kapanış noktası** denir.

(2) A kümesinin bütün δ-I-kapanış noktalarının ailesine A kümesinin **δ-I-kapanışı** denir ve $\mathbf{A}_{\delta-I}$ şeklinde gösterilir.

(3) A kümesi eğer, $A=A_{\delta-I}$ ise bu kümeye **δ-I-kapalı küme** denir. δ-I-kapalı kümenin tümleyenine **δ-I-açık küme** denir (Yüksel ve ark., 2005).

Tanım 4.1.3: (X,τ,I) ideal topolojik uzayında, $A\subset X$ alt kümesi için, $A\subset int(cl^*(int(A)))$ sağlanıyorsa A kümesine **α-I-açık küme** denir (Hatır and Noiri, 2002).

Tanım 4.1.4: (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ alt kümesi için, $A\subset Int(Cl^*(A))$ ($A\subset Cl^*(Int(A))$) ise A kümesine **pre-I-açık küme** (Dontchev, 1996) (**semi-I-açık** (Hatır and Noiri, 2002)) denir. A kümesi pre-I-açık kümeyse $X-A$ pre-I-kapalı kümedir (Dontchev, 1996). A kümesini kapsayan tüm pre-I-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin **pre-I-kapanışı** denir ve $p\imath Cl(A)$ ile gösterilir (Yüksel ve ark., 2007).

A kümesinin kapsadığı tüm pre-I-açık kümelerin birleşimine A kümesinin **pre-I-içi** denir ve $p\imath Int(A)$ ile gösterilir. X uzayının bir x noktasını içeren tüm pre-I-açık kümelerin ailesi $PIO(X,x)$ ile gösterilir.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayında bütün regular I-açık (regular I-kapalı) kümelerin ailesi RIO(X) (RIC(X)) ile, δ-I-açık (δ-I-kapalı) kümelerin ailesi δIO(X) (δIC(X)) ve α-açık kümelerin ailesi de α(x) sembolü ile gösterilecektir.

Lemma 4.1.1: (X,τ,I) ideal topolojik uzayında, regular I-açık kümelerin ailesi bir topoloji tabanı oluşturur.

İspat: Topoloji tabanı olma şartlarından ilki açık olup, ikinci şart ise (Yüksel ve ark., 2005)'den açıktır.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayı için RIO(X) bir tabandır. (X,τ,I) uzayı için bu tabana τ topolojisinin **semi-I-regülarizasyonu** denir ve τ_{SI} ile gösterilir.

Lemma 4.1.2: (X,τ,I) ideal topolojik uzayının **regular-I-uzay** olması için gerek ve yeter şart x noktasının her açık U komşuluğu için $x\in V\subset Cl^*(V)\subset U$ olacak şekilde açık bir V komşuluğunun olmasıdır (Açıkgöz ve ark., 2004).

Tanım 4.1.5: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,V,I_2)$ fonksiyonunda her V∈ αIO(Y) için eğer f^{-1}(V) ∈ αIO(X) oluyorsa bu fonksiyona **I-α-ırresolute** denir (Yüksel, 2003).

4.2. Karakterizasyonlar

Tanım 4.2.1: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,V,I_2)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun na-I-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her V∈ αIO(Y) için, f^{-1}(V) ∈ δIO(X) olmasıdır.

Teorem 4.2.1: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,V,I_2)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir;

(a) f, na-I-süreklidir,

(b) Her x∈ X noktası ve f(x) noktasını içeren her V∈ αIO(Y) kümesi için, f(U) ⊂ V olacak şekilde, x noktasını içeren bir U∈ δIO(X) kümesi vardır;

(c) Her x∈ X noktası ve f(x) noktasını içeren her V∈ αIO(Y) kümesi için, f(U) ⊂ V olacak şekilde, x noktasını içeren bir U∈ RIO(X) kümesi vardır;

(d) (Y,υ,I) uzayındaki her F α-I-kapalı kümesi için f^{-1}(F) kümesi δ-I-kapalıdır;

(e) Her A ⊂ X alt kümesi için, f(δIcl(A)) ⊂ αIcl(f(A)) dır;

(f) Her B ⊂ Y alt kümesi için, δIcl(f^{-1}(B)) ⊂ f^{-1}(αIcl(B)) dır.

İspat: (a)$\Rightarrow$(b) f fonksiyonu, na-I-sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde x$\in$X noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden bir V$\in$ αIO(Y) kümesi için, x noktasını ihtiva eden bir f^{-1}(V)$\in$ δIO(X) bulunur. Böylece f^{-1}(V)=U olup buradan f(U)$\subset$V elde edilir.

(b)$\Rightarrow$(c) Bir x$\in$X noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden bir V$\in$ αIO(Y) kümesi için f(U_O)$\subset$V olacak şekilde x noktasını ihtiva eden bir $U_O \in$ δIO(X) kümesi vardır. δ-I-açık küme, regular-I-açık kümelerin bileşimi olduğundan, x$\in$U$\subset U_O$ olacak şekilde bir U$\in$ RIO(X) kümesi vardır. Böylece f(U) $\subset$V elde edilir.

(c)$\Rightarrow$(d) (Y, υ,I) uzayında F gibi bir α-I-kapalı küme alınsın. Her x$\in f^{-1}$(Y-F) noktası için, x$\in U_X \subset f^{-1}$(Y-F) olacak şekilde bir $U_X \in$ RIO(X) kümesi vardır. Böylece f^{-1}(F)=∩{X-U_X | x$\in f^{-1}$(Y-F)} dır. Bu ise f^{-1}(F) kümesinin (X,τ) uzayında δ-I-kapalı olduğunu gösterir.

(d)$\Rightarrow$(e) (X,τ) uzayının her A alt kümesi için, f(A)$\subset$αIcl(f(A))'dır. Böylece A$\subset f^{-1}$(αIcl(f(A))) olur ve dolayısıyla d) ifadesi gereği f^{-1}(αIcl(A))$\in$ δIC(X) olacağından δIcl(A) $\subset f^{-1}$(αIcl(f(A))) olup f(δIcl(A))$\subset$αIcl(f(A)) elde edilir.

(e)$\Rightarrow$(f) Her B$\subset$Y alt kümesi için, f(δIcl(f^{-1}(B)))$\subset$αIcl(f(f^{-1}(B)))$\subset$αIcl(B) ve buradan δIcl(f^{-1}(B)) $\subset f^{-1}$(αIcl(B)) dır.

(f)$\Rightarrow$(a) V$\in$ αIO(Y) kümesi alınsın. Bu taktirde Y-V kümesi α-I- kapalı bir kümedir ve δIcl(f^{-1}(Y-V))$\subset f^{-1}$(αIcl(Y-V))=f^{-1}(Y-V)'dir. Böylece f^{-1}(Y-V) kümesi (X,τ) uzayında δ-I-kapalı küme olup f^{-1}(V) $\in$ δIO(X) olur.

Tanım 4.2.2: $f:(X,\tau,I_1)\rightarrow(Y,V,I_2)$ bir fonksiyon olmak üzere, her x$\in$X noktası ve f(x) noktasının her V komşuluğu için, f(int(cl^*(U)))$\subset$V olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu varsa bu fonksiyona **super-I-sürekli fonksiyon** denir.

Teorem 4.2.2: $f:(X,\tau,I_1)\rightarrow(Y,\vartheta,I_2)$fonksiyonunun super-I-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her V$\in\vartheta$ kümesi için f^{-1}(V) $\in$ δIO(X) olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: V$\in\vartheta$ ve x$\in f^{-1}$(V) olsun, dolayısıyla *f*(x)$\in$ V'dir. Aynı zamanda f super-I-sürekli fonksiyon olduğundan f(int(cl^*(U)))$\subset$V olacak şekilde X'te x noktasını içeren bir U komşuluğu vardır. Öyleyse x$\in$ int(cl*(U))$\subset f^{-1}$(V) diyebiliriz. Böylece f^{-1}(V) regular-I-açık kümelerin keyfi bileşimi şeklinde ifade edilebileceğinden f^{-1}(V) $\in$ δIO(X)'dir.

$\Leftarrow$**:** Her V$\in \vartheta$ kümesi için f^{-1}(V) $\in$ δIO(X) ise f^{-1}(V) = $\bigcup_{U_i \in RIO(X)} U_i$ 'dir. Öyleyse U$_i$ $\in$ RIO(X)' lerden herhangi birine U dersek;

$$U \subset f^{-1}(V) \Rightarrow \text{int}(\text{cl}^*(U)) \subset f^{-1}(V)$$

$$\Rightarrow f(\text{int}(\text{cl}^*(U))) \subset V$$

elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.3: $f:(X,\tau,I_1)\rightarrow(Y,V,I_2)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir;

(a) f na-I-sürekli fonksiyondur.

(b) x$\in$ X için f_0(x) = f (x) olmak üzere $f_0:(X,\tau,I_1)\rightarrow(Y,\alpha IO(Y),I_2)$ fonksiyonu süper-I-süreklidir.

(c) x$\in$ X için $f_*(x)=f(x)$ olmak üzere $f_*:(X,\tau_{SI},I_1)\rightarrow(Y,\alpha IO(Y),I_2)$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: (a)$\Rightarrow$(b): (Y,αIO(Y))'de aldığımız bir V açık kümesi aynı zamanda αIO(Y) olur. Öyleyse (a)'dan f^{-1}(V) $\in$ δIO(X,τ,I$_1$) 'dır. V$\in$ O(Y,αIO(Y)) iken f^{-1}(V) $\in$ δIO(X,τ,I) olması super-I-sürekliliği gerçekler.

(b)$\Rightarrow$(c): $\forall$ V$\in$ O(Y,αIO(Y)) için f^{-1}(V)$\in$ δIO(X,τ,I$_1$) ve f_*^{-1}(V)$\in$ O(X,τ_{SI},I$_1$) olur. Böylece f_*, süreklidir.

(c)$\Rightarrow$(a): $\forall$ V$\in$ αIO(Y,V,I$_2$) için V$\in$ O(Y,αIO(Y)) ve f_*^{-1}(V)$\in$ O(X,τ_{SI},I$_1$). Böylece f^{-1}(V) $\in$δIO(X,τ,I$_1$) 'dır, bu da f fonksiyonunun na-I-sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 4.2.3: (X, τ ,I) ideal topolojik uzayında $\beta = \{B_\lambda\}$ bir süzgeç tabanı olsun. $\forall$ V$\in$ RIO(X) ($\forall$ V$\in$ αIO(X)) için, B_λ $\subset$V olacak şekilde bir $B_\lambda \in$ β kümesi varsa bu β süzgeç tabanı x noktasına δ-I-yakınsar (sf-I-yakınsar) denir.

(X, τ ,I) ideal topolojik uzayında bir $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\delta}$ ağ olmak üzere; eğer bu ağ sonunda x noktasını ihtiva eden her regular-I-açık küme (her α-I-açık küme) içinde kalıyorsa ağ, x noktasına δ-I-yakınsar (sf-I-yakınsar) denir.

Teorem 4.2.4: $f : (X, \tau, I_1) \to (Y, V, I_2)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir;

(a) *f*, na-I-sürekli fonksiyondur.

(b) $\forall$ x$\in$ X noktası ve x noktasına δ-I-yakınsayan her β süzgeç tabanı için *f* (β) kümesi de (Y,αIO(Y)) uzayındaki *f* (x) noktasına yakınsar.

(c) $\forall$ x$\in$ X noktası ve x noktasına δ-I-yakınsayan her $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\delta}$ ağı için $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\delta}$ kümesi de (Y,αIO(Y)) uzayındaki *f* (x) noktasına yakınsar.

(d) $\forall$ x$\in$ X noktası ve x noktasına δ-I-yakınsayan her β süzgeç tabanı için *f* (β) kümesi de (Y, ϑ ,I) uzayındaki *f* (x) noktasına sf-I-yakınsar.

(e) $\forall$ x$\in$ X noktası ve x noktasına δ-I-yakınsayan her $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\delta}$ ağı için $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\delta}$ kümesi de (Y, ϑ ,I) uzayındaki *f* (x) noktasına sf-I-yakınsar.

İspat: (a)$\Leftrightarrow$(b) $f : (X, \tau, I_1) \to (Y, V, I_2)$ na-I-süreklidir $\Leftrightarrow$ β $\xrightarrow[\delta-I]{}$ x olduğunda $f(\beta) \to f(x)$ olmasıdır.

$\Rightarrow$: f fonksiyonu x$\in$ X noktasında na-I-sürekli olsun. (X, τ ,I) ideal topolojik uzay üzerinde β$\to$x olan bir β süzgeç tabanı alalım. Hipotez gereği f fonksiyonu na-I-sürekli olduğundan, Teorem 2.1.b) gereği;

$\forall$ V$\in$ αIO(Y) için $\exists$U $\in$ δIO(X) $\ni$ f(U)$\subset$V

dir.

β $\xrightarrow[\delta-I]{}$ x olduğundan,süzgeç tabanının tanımı gereği, U $\in$β olur. Ve f(U)$\in$ f(β) elde edilir.Buradan f(x)'in komşuluğu f(β)'den daha kabadır. Böylece f(β) $\to$f(x) olur.

$\Leftarrow$: X kümesi üzerindeki $\forall\beta$ süzgeç tabanı için $\beta\rightarrow$x iken Y kümesi üzerindeki f(β) süzgeç tabanı f(x) $\in$ Y noktasına yakınsasın. B süzgeç tabanı yerine özel olarak ϑ(x) $\xrightarrow[\delta-I]{}$ x olduğundan hipotez gereği f(ϑ(x))→f(x) olur. Buradan, f(ϑ(x)) süzgeç tabanının doğurduğu süzgece β_1 dersek yakınsaklık tanımından $\beta_1\rightarrow$f(x) olup, ϑ(f(x)) $\subset\beta_1$ bulunur. Böylece $\forall$V$\in\vartheta$(f(x)) komşuluğu için, V$\in\beta_1$ elde edilir. Dolayısıyla f(ϑ(x)) $\subset\beta_1$ olduğundan, f(U) $\subset$V ve V $\in$ αIO(Y), olacak şekilde bir U $\in$ δIO(X) komşuluğu vardır. Öyleyse f fonksiyonu x $\in$ X noktasında na-I-süreklidir.

(a) $\Leftrightarrow$ **(c)** $f:(X,\tau,I_1)\rightarrow(Y,V,I_2)$ na-I-süreklidir $\Leftrightarrow (x_\lambda)\xrightarrow[\delta-I]{}$ x olduğunda $f(x_\lambda)\rightarrow$f(x) olmasıdır.

$\Rightarrow$: f na-I-sürekli fonksiyon ve $(x_\lambda)\xrightarrow[\delta-I]{}$ x ise f(x) $\in$ V$\in$ αIO(Y) olur ve aynı zamanda f^{-1}(V) $\in$ RIO(X,x)'tir.

(x_λ), $\forall\lambda\geq\lambda_0\exists$, $(x_\lambda)\in f^{-1}$(V) $\Rightarrow$ $f(x_\lambda)\in$ V$\Rightarrow$ $f(x_\lambda)\rightarrow$f(x)

$\Leftarrow$:f,na-I-sürekli fonksiyon olmasın. Öyleyse $\exists$V$\in$ αIO(Y,f(x))$\forall$ U$\in$ RIO(X,x) f(U)$\not\subset$V$\Rightarrow$U$\not\subset$ f^{-1}(V), x_u $\in$ U, $x_u\notin f^{-1}$(V). x_u elemanını seçerek bir ağ oluşturalım.

$\forall$ $u\geq u_0\exists$ $x_u\in$ U$\Rightarrow$f(x_u)$\in$ f(U) $\not\subset$V,oysaki f(x_u)$\in$ V olmalıydı, öyleyse f , na-I-sürekli fonksiyondur.

(a) $\Leftrightarrow$ **(d)** İspatı, (a)$\Leftrightarrow$ (b) ispatının eşdeğeri olduğu açıktır.

(a) $\Leftrightarrow$ **(e)** İspatı, (a)$\Leftrightarrow$ (c) ispatının eşdeğeri olduğu açıktır.

4.3 Temel Özellikler

Teorem4.3.1: $f:(X,\tau,I_1)\rightarrow(Y,V,I_2)$na-I-sürekli ve $g:(Y,V,I_2)\rightarrow(Z,N,I_3)$ fonksiyonu I-α-irresolute fonksiyon ise gof fonksiyonu na-I-sürekli fonksiyondur.

İspat: V$\in$ αIO(Z,N,I_3) kümesi alacak olursak, g fonksiyonu I-α-irresolute fonksiyon olduğundan g^{-1}(V)$\in$ αIO(Y,V,I_2)'dir. f fonksiyonu na-I-sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in$ δIO(X,τ,I_1) olacaktır, böylece gof fonksiyonu da na-I-sürekli fonksiyon olarak bulunmuş olur.

Sonuç 4.3.1: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,V,I_2)$, $g:(Y,V,I_2)\to(Z,N,I_3)$ fonksiyonları na-I-sürekli ise gof fonksiyonu da na-I-sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 4.3.2: g: (X, τ,I_1)→(Y,V, I_2) gibi bir fonksiyon alalım ve $\forall$ x$\in$ X için G: X→X×Y, g'nin grafik fonksiyonu, G(x)=(x,g(x)) şeklinde tanımlansın. Eğer G na-I-sürekli bir fonksiyon ise g'de na-I-sürekli bir fonksiyondur.

İspat: x$\in$ X ve g(x)'i içeren bir V$\in$ αIO(Y) alalım. g(x)'i içeren bir X×V$\in$ αIO(X×Y) vardır. G na-I-sürekli olduğundan, Teorem 4.2.1'den $\exists$x $\in$U $\in$δIO(X) $\ni$G(U)$\subset$ X×V. Böylece g(u) $\subset$V olur.

Tanım 4.3.1: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,\upsilon,I_2)$ fonksiyon ve $G(f)$ grafiği f fonksiyonunun grafiği olsun. Her $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ noktası için, $(U\times V)\cap G(f)=\varnothing$ olacak şekilde x noktasının U gibi bir δ-I-açık bir komşuluğu ve y noktasının V gibi bir α-I-açık bir komşuluğu varsa $G(f)$ grafiğine **δ-α-I-kapalı** denir.

Lemma 4.3.1: $f:(X,\tau,I)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğinin $X\times Y$ uzayında δ-α-I-kapalı olması için gerek ve yeter şart $\forall(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ için, $f(U)\cap V=\varnothing$ olacak şekilde x noktasının δ-I-açık bir komşuluğu ve y noktasının α-I-açık bir komşuluğunun olmasıdır.

İspat: Tanımın direkt sonucudur.

Tanım 4.3.2: (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. X uzayının birbirinden farklı x,y nokta çifti için, sırasıyla x ve y noktalarını içeren U,V ayrık α-I-açık komşulukları varsa bu uzaya **α-I-T$_2$-uzay** denir (Yüksel ve ark., 2007).

Teorem 4.3.3: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,V,I_2)$ na-I-sürekli fonksiyon ve Y α-I-T_2 uzay ise G(f) grafik fonksiyonu δ-α-I-kapalıdır.

İspat: $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ ise y$\neq$ f(x) dir. Y α-I-T_2- uzay olduğundan sırasıyla f(x),y noktalarını içeren ayrık α-I-açık V,W kümeleri vardır. f na-I-sürekli fonksiyon olduğundan x $\in f^{-1}$(V) $\in$ δIO(X,x).

$f(f^{-1}(V))\cap W\subset V\cap W=\emptyset$ ise $f(f^{-1}(V))\cap W=\emptyset$ olup G(f), δ-α-I-kapalıdır.

4.4.Karşılaştırmalar

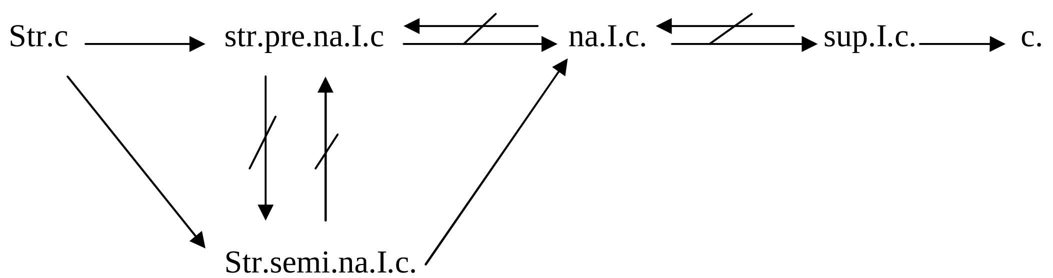
Bu bölümde na-I-süreklilikle, sürekliliğin birçok güçlü formu arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 4.4.1: f: X→Y fonksiyonu eğer $\forall A\subset X$ için f(cl(A)) $\subset$f(A) oluyorsa bu fonksiyona **strongly sürekli fonksiyon** denir (Levine, 1960).

Uyarı 4.4.1: (Levine 1960, Sonuç 2)'de f:X→Y fonksiyonunun str.c. olması, her $B\subset Y$ kümesi için, f^{-1}(B) kümesinin X uzayında hem açık hem kapalı küme olmasını gerektirdiği gösterilmiştir.

Tanım 4.4.3: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,V,I_2)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun st-pre-na-I-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her V$\in$ PIO(Y) için, f^{-1}(V) $\in$ δIO(X) olmasıdır.

Tanım 4.4.4: $f:(X,\tau,I_1)\to(Y,V,I_2)$bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun strong semi-na-I-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her V$\in$ SIO(Y) için, f^{-1}(V) $\in$ δIO(X) olmasıdır.



Örnek 4.3.1: $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\emptyset,X,\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$ topolojisi ile $I=\{\emptyset,\{b\}\}$ ideali ve $Y=\{p,q,r\}$ kümesi üzerinde $\nu=\{\emptyset,Y,\{p\}\}$ topolojisi ile $I_1=\{\emptyset,\{r\}\}$ ideali verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu,I_1)$ fonksiyonu $f(a)=p$

$f(b) = p$ $f(c) = q$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu na-I-süreklidir ancak str-sürekli değildir.

Örnek 4.3.2: $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ topolojisi ile $I = \{\varnothing, \{a\}\}$ ideali ve $Y = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde $\nu = \{\varnothing, Y, \{1\}\}$ topolojisi ile $I_1 = \{\varnothing, \{2\}\}$ ideali verilsin. $f : (X,\tau,I) \to (Y,\nu,I_1)$ fonksiyonu $f(a) = 1$ $f(b) = 2$ $f(c) = 3$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu super-I-süreklidir ancak na-I-sürekli değildir.

Tanım 4.4.2: (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. X uzayının her alt kümesi I-lokal kapalı küme ise (X,τ,I) uzayına **I-submaximal uzay** denir **(**Yüksel ve ark., 2007).

Tanım 4.4.3: (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. X uzayında her A açık alt kümesi için $A^* \neq \varnothing$ oluyorsa bu uzaya **P-I-disconnected** denir (Açıkgöz ve ark., 2005).

Teorem 4.4.1: $f : (X,\tau,I_1) \to (Y,V,I_2)$ olmak üzere, (Y,V,I_2) uzayı I-submaximal ve P-I-disconnected ise aşağıdaki özellikler eşdeğerdir;

1) f str.pre.na.I.c,

2) f str.semi.na.I.c,

3) f na.I.c,

4) f super.I.c.

İspat: **(**Y,V,I) uzayı I-submaximal ve P-I-disconnected ise τ =PIO=SIO=αIO (Açıkgöz ve ark., 2005) olduğundan ispat açıktır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

(X,τ) topolojik uzayında tanımlanan na-sürekli fonksiyonları ele aldık. Bu süreklilik çeşidini ideal topolojik uzaylarda tanımlayarak ideal topolojik uzay ve topolojik uzaylarda daha önceden tanımlanan süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık ve tanımladığımız bu süreklilik çeşidine ait birçok özellik ve karakterizasyon elde ettik.

İncelemiş olduğumuz bu süreklilik çeşidinden yola çıkılarak yeni süreklilik çeşitleri tanımlanarak bu süreklilik çeşidine dair yeni özellikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Arya S.P and Gupta R., 1974, On strongly continuous mappings, Kyungpook Math. Jr., **14,** 131- 143.

Açıkgöz A., Noiri T., Yüksel Ş., 2004, A decomposition of continuity in ideal topological spaces, Acta. Math. Hungar., Vol. **105**(4) ,285-289.

Açıkgöz A., Yüksel Ş. and Noiri T., 2005, α-I-preırresolute functions and β-I-preırresolute functions,Bull.Malays.Math.Sci.Soc,vol. **28**(1).

Bourbaki N. ,1966, General Topology ,Part 1, Addison-Wesley ,Reading, Mass.

Carnahan D. , 1974, Some properties related to compactness in topological spaces, Ph. D. Thesis, Univ. Of Arkansas.

Chae G. I. and Lee D.W., Feebly closed sets and feebly continuity in topological spaces, (Submitted to Jr. Korean Math. Soc.).

Chae G. I. and Lee D. W., 1984, Feebly open sets and feebly continuity in topological spaces, Uslan Inst. Tech. Rep. **15**, 367- 371.

Dugundji J. , 1966, Topology, Allyn and Bacon Inc. Boston.

Das P., 1974, Note on some applications on semi open sets, Prog. Math., **7**, 33- 44.

Dontchev J., 1996, On pre-I-open sets and a decomposition of I- continity,Banyan Math., Vol. 2.

El-Deeb N., Hasenein I. A., Mashhour A. I. and Noiri T., 1983, On p-regular spces, Bull.Math. Ioc. Ici. Math. R. I. Roumanie, **27**(75)**,** 311-315.

Hatır E. and Noiri T., 2002, On decompositions of continuity via idealization,Acta Math.Hungar., **96**, 341-349.

Herrington L.L. , 1974, Properties of nearly compact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. , **45**, 431- 436.

Joseph J. E., 1976, Characterizations of nearly compact spaces, Boll. Un. Math. Italy, **13**, 311- 321.

Jankovic D., Hamlett T.R. ,1990, New topologies from old via ideals, Amer.Math.Monthly.,Vol. **97**, 295-310.

Kuratowski K., 1933, Topologie I, Warszawa.

Levine N., 1960, Strongly continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, **67**, 269.

Munshi B. M. and Bassan D. S., 1982, Super-continuous mappins, Indian Jr. Pure Appl. Math, **13**, 229-236.

Mashhour A. I., Hasanein I. A. and El-Deeb I.N., 1982, A note on semi continuity and pre continuity, Indian J. Pure Appl. Math., **13**, 1119-1123.

Njastad O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific Jr. Math., **15**, 961-970.

Noiri T., 1980, On δ-continuous functions, Jr. Krean Math. Soc., **16**, 161- 166.

Noiri T., 1984, Super-continuity and some strong forms of continuity, Indian Jr. Pure Appl. Math., **15**, 241-250.

Noiri T., 1972, On almost-open mappings, Mem. Miya. Tech. Coll. , **7**, 167-171.

Popa V. and Noiri T., 1992, Almost weakly continuous functions, Demonstratio Math., **25**, 241-251.

Samuels P., 1975, A topology formed from a given topology and ideal, J.London.Math. Hungar.Soc.(2),Vol. **10**, 409-416.

Singal M. K. and Singal A.R., 1968, Almost-continuous mappings, Yokohama Math. Jr., **16**, 161-166.

Velicko N.V., 1968, H-closed topological spaces, Amer. Math. Ioc. Transl., **78,** 103-118

Yüksel Ş., Açıkgöz A. and Gürsel E., 2007, On a new type of continuous functions in ideal topological spaces, The Journal of the Indian Academy of Mathematics, Vol. **28**, 427-438.

Yüksel Ş., Kocaman A. H., Açıkgöz A., 2007-On α-I-Irresolute functions, Far East Journal of Mathematical Sciences (Fjms) **26**(3), 673-684.

Yüksel Ş., Açıkgöz A. , Noiri T., 2005, On δ-I-continuous functions, Turk J Math., **29**, 39-51.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Ayşegül Bozkurt
Uyruğu	**:**	TC.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Mersin/03.05.1985
Telefon	**:**	-
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	ayseguledabozkurt@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	İçel Anadolu Lisesi, Merkez, Mersin	2003
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2008
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2010
Doktora	:	**-**	