T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAJORİZASYON VE MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

İrem KÜÇÜKOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2014
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAJORİZASYON VE MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

İrem KÜÇÜKOĞLU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2014, 79 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Bu çalışma genel matrisler ve 2×2 tipinde Hermityen pozitif yarı tanımlı blok matrisler ile ilgili majorizasyon eşitsizlikleri elde etmek ve bu eşitsizlikler için alt ve üst sınırlar vermek için hazırlanmıştır. Matris eşitsizlikleri matris denklemlerinin çözümlerinde oldukça kolaylık sağlamaktadır. Majorizasyon ise n tane negatif olmayan reel bileşene sahip vektörlerin kısmi sıralaması olarak tanımlanan ve matris teoride eşitsizlikler türetmek için kullanılan temel araçlardan biridir. Majorizasyon tipi matris eşitsizlikleri bilgisayar bilimlerinde, mühendisliklerde, istatistik ve diğer birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bununla birlikte günümüze kadar özdeğerler, singüler değerler ve matris normları için birçok ilginç ve güçlü sonuçlar majorizasyon kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışma ile literatürde bilinen eşitsizlikler incelenerek karşılaştırmalar yapılmış ve bunlar kullanılarak majorizasyon teorisi yardımıyla matrislerin singüler ve özdeğerleri için yeni teoriler ve eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu çalışmanın son bölümünde, elde edilen sonuçlar üzerine gerekli değerlendirmeler ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Blok Matris, Hermityen matris, Majorizasyon, Matris Eşitsizlikleri, Özdeğer, Pozitif tanımlı matris, Pozitif yarı tanımlı matris, Singüler değer, Schur konveks, Üniter İnvaryant Matris Normu

ABSTRACT

MS THESIS

ON MAJORIZATION AND MATRIX INEQUALITIES

İrem KÜÇÜKOĞLU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc.Prof.Dr. Ramazan TÜRKMEN

2014, 79 Pages

Jury
Assoc.Prof.Dr. Ramazan TÜRKMEN
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc.Prof.Dr. Süleyman SOLAK

This study is prepared to obtain majorization inequalities related to 2×2 type hermitian positive semi definite block matrices and give upper and lower bounds for this inequalities. While matrix inequalities provide considerable convenience the solutions of matrix equations, Majorization which is defined as the partial ordering of vectors with n non-negative real components is one of the main tools used to derive inequalities in matrix theory. Majorization type matrix inequalities are used widely in various areas including computer science, engineering, statistics and in many other areas. At the same time up to the present, many interesting and powerful results related to eigenvalues, singular values and matrix norms have been obtained by means of majorization. With this study, the inequalities in the literature have been examined and have been compared and new theories and inequalities for eigenvalues and singular values of matrices have been obtained by means of majorization theory using them. Necessary evaluations and suggestions over the obtained results in this thesis have been given in the final section.

Keywords: Block Matrix, Eigenvalue, Hermitian matrix, Majorization, Matrix Inequalities, Positive definite matrix, Positive semi definite matrix, Singular value, Schur convex, Unitarily invariant norm

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilk olarak majorizasyon teorisi ve matris eşitsizlikleri konusunun öneminden bahsedilmiş ve ardından çalışmamızın amaç ve kapsamı açıklanmıştır. Çalışmamızın kaynak araştırmasına ek olarak yararlanacağımız matris teorinin temel kavramlarına yer verilmiştir. İkinci bölümde, Majorizasyon kavramına temel oluşturan reel sayıların sıralanmasını ve karşılaştırılmasını sağlayan kısmi sıralama bağıntısı anlatılmış ve ardından vektörlerin karşılaştırılmasını sağlayan yöntemlerden biri olan majorizasyon kavramından bahsedilmiştir. Daha sonra genel matrisler ve blok matrisler için bazı majorizasyon tipi eşitsizlikleri yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, majorizasyon teorisi yardımıyla matrislerin singüler ve özdeğerleri için yeni teoriler ve eşitsizlikler tarafımızca ispatlanmıştır. Son olarak, dördüncü bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, değerli bilgilerini paylaşıp, yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN'e, değerli bilgileri ve yardımları ile bana destek olan Arş. Gör. Zübeyde ULUKÖK'e ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İrem KÜÇÜKOĞLU
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}_0$	: $[0,\infty)$ aralığındaki reel sayıların kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n tane reel bileşenli vektörlerin kümesi
$\mathbb{R}^n_+$	: n tane pozitif reel bileşenli vektörlerin kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar
$\mathbb{C}^n$	: n tane kompleks bileşenli vektörlerin kümesi
M_n	: $n\times n$ matrislerin yani n-kare matrislerin kümesi
$M_n(F)$	: F cismi üzerinde tanımlı bütün n-kare matrislerin kümesi
$M_{m,n}$	: $m\times n$ matrislerin kümesi
$M_{m,n}(F)$	: F cismi üzerinde tanımlı bütün $m\times n$ matrislerin kümesi
$A=(a_{ij})$	: a_{ij} elemanlarından oluşan matris
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^T	: A matrisinin transpozu
$\overline{A}$	: A matrisinin kompleks eşleniği
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
$A^{1/2}$	: Pozitif yarı tanımlı A matrisinin karekökü
A^α	: A matrisinin α kuvveti
$\lvert A\rvert$	: $\lvert A\rvert=(A^*A)^{1/2}$
$\det A$	: A matrisinin determinantı
$diag(A)$	: A matrisinin köşegen elemanlarından oluşan köşegen matris
$diag(a_1,a_2,...,a_n)$	: Köşegeni üzerinde $a_1,a_2,...,a_n$ elemanları bulunan köşegen matris
trA	: A matrisinin izi
$\lambda_i(A)$	: A matrisinin $i.$ özdeğeri
$s_i(A)$	: A matrisinin $i.$ singüler değeri
$\lambda(A)$	: $\lambda(A)=(\lambda_1(A),...,\lambda_n(A))$ olmak üzere $A\in M_n$ nın özdeğer vektörü
$\lambda^\alpha(A)$	: $\lambda^\alpha(A)=(\lambda_1^\alpha(A),...,\lambda_n^\alpha(A))=\left((\lambda_1(A))^\alpha,...,(\lambda_n(A))^\alpha\right)$ özdeğer vektörün α kuvveti
$s(A)$	: $s(A)=(s_1(A),...,s_n(A))$ olmak üzere $A\in M_n$ nın singüler değer vektörü
$s^\alpha(A)$	: $s^\alpha(A)=(s_1^\alpha(A),...,s_n^\alpha(A))=\left((s_1(A))^\alpha,...,(s_n(A))^\alpha\right)$ singüler değer vektörünün α kuvveti
$A\geq 0$	: A pozitif yarı tanımlı matrisi
$A>0$	: A pozitif tanımlı matrisi
$A\geq B$	: $A-B$ pozitif yarı tanımlı matrisi
$A\oplus B$	: A *ve* B matrislerinin direkt toplamı yani $A\oplus B=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$

$A \circ B$	: A *ve* B matrislerinin Hadamard çarpımı
$x \circ y$	: $x \circ y = (x_1 y_1, ..., x_n y_n)$
x^m	: $x = (x_1, ..., x_n)$ iken $x^m = (x_1^m, ..., x_n^m)$
e^x	: $x = (x_1, ..., x_n)$ iken $e^x = (e^{x_1}, ..., e^{x_n})$
$x^{\downarrow}$	: $x_1^{\downarrow} \geq x_2^{\downarrow} \geq ... \geq x_n^{\downarrow}$ iken $x^{\downarrow} = (x_1^{\downarrow}, x_2^{\downarrow}, ..., x_n^{\downarrow})$
$x^{\uparrow}$	: $x_1^{\uparrow} \leq x_2^{\uparrow} \leq ... \leq x_n^{\uparrow}$ iken $x^{\uparrow} = (x_1^{\uparrow}, x_2^{\uparrow}, ..., x_n^{\uparrow})$
$x \prec_w y$	: x, y tarafından zayıf majorize edilir yani $\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$, $1 \leq k \leq n$
$x \prec y$	: x, y tarafından majorize edilir yani $x \prec_w y$ *ve* $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$
$x \prec_{w\log} y$	: x, y tarafından zayıf log-majorize edilir yani $\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$, $1 \leq k \leq n$
$x \prec_{\log} y$	: x, y tarafından log-majorize edilir yani $x \prec_{w\log} y$ ve $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$

Kısaltmalar

diag	: Köşegen matris
tr	: Matrisin izi
log	: Logaritma fonksiyonu
ln	: Doğal logaritma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Matris teori matematik bilim dalının en temel araçlarından biridir. Matris eşitsizlikleri ise özellikle matris denklemlerinin çözümlerinde oldukça kolaylık sağlamaktadır. Çalışmamıza temel oluşturan majorizasyon kavramı ise matris teoride eşitsizlikler türetmek için kullanılan temel araçlardan biridir. Majorizasyon eşitsizlikleri, uygulamalı matematiği içeren çeşitli alanlarda, bilgisayar bilimlerinde, mühendisliklerde, istatistik ve diğer birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır (Zhang, 2011). Bu nedenle son on yıl içerisinde bazı araştırmacılar majorizasyon teorisi ve matris eşitsizliklerine odaklanmıştır. Günümüze kadar matrislerin özdeğerleri, singüler değerleri ve matris normları hakkında birçok ilginç ve güçlü sonuçlar majorizasyon kulanılarak elde edilmiştir. Dolayısıyla majorizasyon, matris eşitsizlikleri türetmek için kullanılan en güçlü tekniklerden biridir (Zhan, 2002).

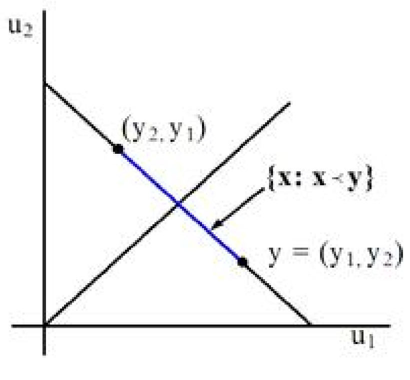
Majorizasyon kavramı optimizasyon, sinyal işleme, kablosuz iletişim, kombinatorik, olasılık, matris teori, graf teori, nümerik analiz ve quantum bilgi teorisi gibi farklı alanlarda başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Bu nedenle majorizasyon son yıllarda çalışılmakta olan bir konu olup birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Böylece majorizasyon teorisinin öncesi ve oluşum evresi önemlidir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde bu oluşum evresinden ayrıntılı bir şekilde bahsedilecektir.

İlk olarak kısaca majorizasyon kavramının çıkış noktasından ve öneminden bahsedelim. Majorizasyon kavramı negatif olmayan n tane bileşene sahip vekörlerin nasıl sıralanabileceği sorusu ile ortaya çıkmıştır (Jorswleck ve Boche, 2006). Majorizasyon kavramının matrisler üzerinde kullanılmasına öncülük eden çalışma ise Schur (1923) "*Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Adwendungen die Determinaten-Theorie Sitzungber*" isimli çalışmadır ve bu çalışmada pozitif yarı tanımlı matrislerin özdeğerleri ve hermityen matrislerin köşegen elamanları incelenmiştir. Schur'un (1923) çalışması, Teorem 1.3.7.6'de verdiğimiz Hadamard eşitsizliğinin anlaşılmasını kolaylaştırmış ve matris teoride başka majorizasyon eşitsizlikleri bulunmasını sağlamıştır. Bu majorizasyon eşitsizlikleri daha çok matrislerin toplamlarının ve çarpımlarının özdeğer ve singüler değerleri için elde edilmiştir. (Marshall ve ark., 1979).

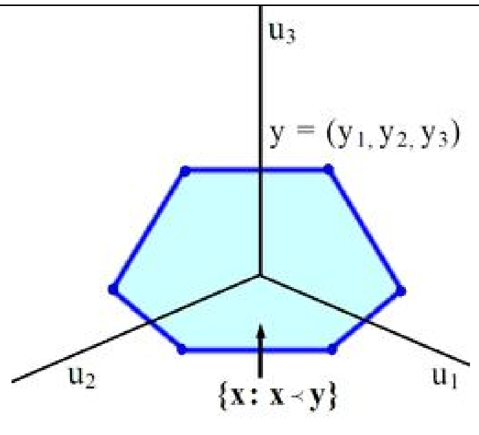
Schur (1923) çalışmasında matrisin esas köşegen elemanları ile özdeğerleri arasındaki bağıntıyı majorizasyon yardımıyla tanımlamıştır. Majorizasyon, iki vektörü karşılaştırırken ya da ilişkilendirirken çok faydalı olan bir kavramdır. Majorizasyon reel vektörler üzerinde tanımlı olduğundan ve hermityen matrislerin de hem köşegen elemanları hem de özdeğerleri reel olduğundan majorizasyon kavramı genellikle hermityen matrisler üzerinden çalışılmıştır. (Horn ve Johnson, 1985).

Ayırca Schur (1923) çalışmasında herhangi bir A n-kare hermityen matrisi için tanımlanan $diag(A) \prec \lambda(A)$ majorizasyon eşitsizliği birçok bilim adamına ışık tutmuş ve bu eşitsizlik yaklaşık yüz yıl sonra Lin ve Wolkowicz (2012) tarafından blok matris formuna genişletilmiştir. Ayrıca birçok matematikçi tarafından matrislerin toplamları, çarpımları ve Hadamard çarpımlarının özdeğer ve singüler değerleri için de değişik şekillerde majorizasyon tipi matris eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Majorizasyon tipi matris eşitsizlikleri hem teorik hem de uygulamalı matematikte çok karşılaşılan bir kavramdır (Lin, 2013). Aynı zamanda bazı geometrik sorulara da cevap bulduğu görülmüştür. Graf teori de dahil olmak üzere matematiğin birçok dalında majorizasyon kavramı kullanılmaktadır. Okuyucu majorizasyon teorisini kullanan bazı uygulamaları (Marshall ve ark., 1979) kitabında bulabilir. Şekil 1.1 ve Şekil 1.2 de majorizasyon kavramının geometrik olarak nasıl ifade edildiği gösterilmektedir.



Şekil 1.1. 2 boyutlu düzlemde majorizasyon kavramının geometrik gösterimi



Şekil 1.2. 3 boyutlu düzlemde majorizasyon kavramının geometrik gösterimi

http://en.wikipedia.org/wiki/Majorization [Ziyaret Tarihi: 19 Haziran 2014]

Bu çalışmada ise matrislerin singüler değer ve özdeğer vektörleri majorizasyon teorisi yardımıyla karşılaştırılmış ve buna bağlı olarak yeni matris eşitsizlikleri elde edilmiştir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışma, matrislerin özdeğer ve singüler değerlerinin majorizasyon eşitsizlikleri başta olmak üzere tüm genel ve blok matrisler üzerindeki matris eşitsizliklerini incelemek ve yeni eşitsizlikler elde etmek amacıyla hazırlanmıştır.

Tez süresi boyunca majorizasyon eşitsizlikleri ile ilgili literatürde yer alan kitap, makale, tez, seminer, sempozyum gibi bilimsel çalışmalar üzerinde incelemeler yapılmış, genel matrisler ve 2×2 tipinde pozitif yarı tanımlı Hermityen blok matrisler için majorizasyon eşitsizlikleri araştırılmış ve daha sonra literatürde yer alan teoremler kullanılarak yeni majorizasyon ve matris eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca matris teorinin temel kavramları kullanılarak literatürde reel sayılar için bilinen eşitsizliklerin genel matrislere ve 2×2 tipinde pozitif yarı tanımlı Hermityen blok matrislere uygulaması araştırılmış ve incelenmiştir.

Biz bu çalışmanın temeli olarak, ilk önce matris teorideki temel kavramlardan bahsedeceğiz ardından pozitif yarı tanımlı blok matrislerin singüler değerleri için bazı eşitsizlikler vereceğiz. Daha sonra blok matrislerin özelliklerinden faydalanarak pozitif yarı tanımlı matrislerin ve pozitif yarı tanımlı blok matrislerin toplamları, çarpımları ve Hadamard çarpımları için bilinen eşitsizlikleri vereceğiz. Bunlara ek olarak üçüncü bölümde de tarafımızca elde edilen majorizasyon ve matris eşitsizliklerini vereceğiz.

1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmamızın bu kısmında, çalışmamızda esinlendiğimiz ve kullandığımız literatürde var olan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Schur (1923), "*Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Adwendungen die Determinaten- Theorie Sitzungber*" isimli çalışmasında determinant temsilcileri üzerine çalışmış ve majorizasyon tipi eşitsizliklere temel olan herhangi bir A hermityen matrisinin köşegen elemanlarının özdeğerleri tarafından majorize edildiğini göstermiştir, yani $diag(A) \prec \lambda(A)$ olduğunu göstermiştir. Bu majorizasyon kavramı ile Hadamard eşitsizliğinin araştımacılar tarafından kolayca anlaşılmasını sağlamıştır.

Hardy ve ark. (1929), "*Some simple inequalities satisfied by convex functions*" isimli çalışmasında konveks fonksiyonların bazı eşitsizliklerini ele almıştır.

Weyl (1949), "*Inequalities between two kinds of eigenvalues of a linear transformation*" isimli çalışmasında lineer dönüşümlerin iki çeşit özdeğerleri arasındaki eşitsizlikleri ele almıştır.

Horn (1950), *"On the singular values of a product of completely continuous operators"* isimli çalışmasında sürekli operatörlerin çarpımının singüler değerleri üzerine çalışmıştır.

Fan (1951), *"Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators*" isimli çalışmasında, sürekli operatörlerin özdeğerlerinin eşitsizlikleri ve özellikleri yer almaktadır.

Visser ve Zaanen (1952), *"On the eigenvalues of compact linear transformations"* isimli çalışmalarında kompakt lineer dönüşümlerin özdeğerleri üzerine çalışmışlardır.

Fan (1954), *"Inequalities for eigenvalues of Hermitian matrices"* isimli çalışmasında Hermityen matrislerin özdeğerleri için eşitsizlikler yer almaktadır.

Rotfel'd (1969), *"The singular values of the sum of completely continuous operators"* isimli çalışmasında sürekli operatörlerin toplamının singüler değerleri yer almaktadır.

Marcus ve Nikolai (1969), *"Inequalities for some monotone matrix functions"* isimli çalışmalarında bazı monoton matris fonksiyonları için eşitsizlikler ele almışlardır.

Thompson (1977), *"Singular values, diagonal elements, and convexity"* isimli çalışmasında singuler değerler, köşegen elemanları ve konvekslik ele almıştır.

Marshall ve ark., (1979) *"Inequalities: Theory of Majorization and Its Application"* isimli kitaplarında majorizasyon teorisi ve uygulamaları hakkındaki eşitsizlikler vermişlerdir.

Bhatia ve Kittaneh (1990), *"On the singular values of a product of operators"* isimli çalışmalarında herhangi A ve B n-kare matrisleri için singüler değerler için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği olarak bilinen

$$2s_j(A^*B) \le s_j(AA^* + BB^*), \quad 1 \le j \le n \tag{1.1}$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Horn ve Johnson (1991), *"Topics in Matrix Analysis"* isimli kitaplarında matrisler ve temel özelliklerini ele almışlardır.

Ando ve Hiai (1994), *"Hölder type inequalities for matrices"* isimli çalışmasında matrislerin hölder tipi eşitsizliklerini ele almışlardır.

Bhatia (1997), *"Matrix Analysis"* isimli kitabında konveks fonksiyon, monoton fonksiyon, matris konveks, matris monoton fonksiyon gibi kavramları vermiştir.

Zhan (2000), *"Some research problems on the Hadamard product and singular values of matrices"* isimli çalışmasında

$$s_j\left(\frac{A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu}}{2}\right)\leq s_j\left(\frac{A+B}{2}\right),\ 0\leq\nu\leq 1 \tag{1.2}$$

eşitsizliğini konjektür olarak bırakmıştır.

Bhatia ve Kittaneh (2000), *"Notes on matrix arithmetic–geometric mean inequalities"* isimli çalışmalarında A ve B pozitif yarı tanımlı matrisleri için

$$2s\left(AB\right)\prec_w s\left(\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\right)$$

majorizasyon eşitsizliğini ve

$$2s_j\left(A^{1/2}B^{3/2}+A^{3/2}B^{1/2}\right)\leq s_j\left(A+B\right),\quad j=1,\ldots,n \tag{1.3}$$

singüler değer eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Zhang (2001), *"Matrix Inequalities by Means of Block Matrices"* isimli çalışmasında $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ tipinde pozitif yarı tanımlı blok matris için

$$M+N\geq\pm\left(K^*+K\right)$$

olduğunu göstermiş ve bu eşitsizlik aracılığıyla 2×2 pozitif blok matrislerin toplamları, çarpımları ve Hadamard çarpımları için eşitsizlik örnekleri vermiştir.

Zhan, X., (2002), *"Matrix Inequalities"* isimli kitabında matris eşitsizlikleri yer almaktadır.

Murad (2003), *“The Löwner Ordering of Hermitian Matrices”* isimli tez çalışmasında hermityen matrisleri ele alarak temel kavram, teorem ve örnekler vermiştir.

Jorswieck ve Boche (2006), *“Majorization and Matrix-Monotone Functions in Wireless Communications”* isimli çalışmasında majorizasyon teori ve matris monoton fonksiyonlar ele almış, başlıca tanımlar, teoremler ve örnekler vermiştir. Kablosuz iletişimde majorizasyonu ve matris-monoton fonksiyonları incelemişlerdir.

Aujla ve Silva (2003), *“Weak majorization inequalities and convex functions”* isimli çalışmalarında konveks ve log-konveks fonksiyonlar yardımıyla majorizasyon tipi özdeğer eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Tao (2006), *“More results on singular value inequalities of matrices”* isimli çalışmasında A ve B pozitif yarı tanımlı matrisleri için

$$2s_j\left(A^{1/2}\left(A+B\right)^{m-1}B^{1/2}\right)\le s_j\left(\left(A+B\right)^m\right),\quad j=1,\ldots,n \tag{1.4}$$

eşitsizliğini elde etmiştir ve (1.4) eşitsizliği $m=2$ durumunda (1.3) eşitsizliğine dönüştüğünden (1.3) eşitsizliğinin bir genellemesini vermiştir. Ayrıca (1.1) eşitsizliğinin yeni bir formu ve genellemesi olan

$$s_j\left(A^{1/4}B^{3/4}+A^{3/4}B^{1/4}\right)\le s_j\left(A+B\right),\quad j=1,\ldots,n$$

elde etmişlerdir ki bu eşitsizlik ile (1.2) konjektürünün $v=\frac{1}{4}$ için doğru olduğunu göstermiştir.

Audenaert (2007), *“A singular value inequality for Heinz means”* isimli çalışmasında matris monoton fonksiyonlar yardımıyla yeni matris eşitsizlikleri ispatlamış ve heinz ortalamaları için singüler değer eşitsizliği olan (1.2) konjektürünü matris monoton fonksiyon yardımıyla ispatlamıştır.

Arnold (2007), “*Majorization: Here, There and Everywhere”* isimli çalışmasında Marshall ve Olkin, (1979) kitabının çıkışından sonra majorizasyon teorisi ile elde edilen eşitsizlikler üzerine oluşan ilginin arttığını ve bu ilginin yaklaşık 25 yıldır devam ettiğini söylerek majorizasyon ve onunla ilgili çeşitli alanlardaki uygulamalardan bahsetmiştir.

Matharu ve Aujla (2010), *"Some majorization inequalities for convex functions of several variables"* isimli çalışmalarında çok değişkenli konveks fonksiyonları içeren bazı zayıf majorizasyon eşitsizlikleri ispatmışlardır.

Furuichi ve Lin (2010), "*A matrix trace inequality and its application"* isimli çalışmalarında pozitif yarı tanımlı matrislerin toplamının iz eşitsizlikleri üzerine var olan bir varsayıma cevap vermişler ve Golden-Thompson eşitsizliğini pozitif yarı tanımlı matrisler için genelleştirmişlerdir.

Zhang (2011), "*Matrix Theory: Basic Results and Techniques"* isimli kitabında matris teorisi ile ilgili temel sonuçlara ve tekniklere yer vermiştir.

Lin ve Wolkowicz (2012), *"An Eigenvalue Majorization Inequality for Positive Semidefinite Block Matrices: In Memory of Ky Fan"* isimli çalışmalarında Schur'un (1923) çalışmasında hermityen matrisler için tanımladığı $diag(A) \prec \lambda(A)$ eşitsizliğini 2×2 tipindeki $H = \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ hermityen blok matrislere taşımışlardır ve bununla

$$diag(H) \prec \lambda(M \oplus N) \prec \lambda(H)$$

majorizasyon eştisizliğini elde etmişlerdir ve pozitif yarı tanımlı blok matrisleri için bazı özdeğer eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Türkmen ve ark. (2012), *"Some inequalities of majorization type"* isimli çalışmalarında $H = \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ pozitif yarı tanımlı blok matrisinde K Hermityen veya Ters-Hermityen olması durumunda,

$$diag\left(H\right) \prec \lambda\left(M \oplus N\right) \prec \lambda\left(H\right) \prec \lambda\left(\left(M+N\right) \oplus 0\right)$$

olduğunu göstermişler ve bazı majorizasyon tipi eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

1.3. Temel Kavramlar

Çalışmamızın bu alt bölümünde çalışmamızda kullandığımız ve matris teoride adı geçen ve çok kullanılan bazı temel tanım, notasyon ve kavramları vereceğiz. Aksi belirtilmedikçe vereceğimiz bu kavramlar için kaynaklarımız Horn ve Johnson (1985), Zhang (1999), Murad (2003) ve Bozkurt ve ark. (2007) tarafından yapılan çalışmalardır.

1.3.1. Matris Teoride Bazı Temel Kavramlar

Hermityen matrislerin, reel sayıların matrislere bir genellemesi olduğu gibi negatif olmayan sayıların matrislere genellemesi pozitif yarı tanımlı matrislerdir (Murad, 2003). Pozitif yarı tanımlı matrisler ilginç ve önemli özellikleri ile matris teoride merkezi bir rol oynamaktadır (Zhang, 2011). Şimdi pozitif yarı tanımlı matrisin tanımını verelim.

Tanım 1.3.1.1 (Pozitif Yarı Tanımlı Matris-Zhang, 1999). A Hermityen matris ve $(.\,,.)$, $\mathbb{C}^n$ üzerinde Öklidyen iç çarpım olmak üzere eğer $\forall x \in \mathbb{C}^n$ için $(Ax, x) = x^* Ax \geq 0$ ise $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris olarak adlandırılır ve $A \geq 0$ ile gösterilir. Aynı şekilde eğer $\forall 0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ için $(Ax, x) = x^* Ax > 0$ ise $A \in M_n$ pozitif tanımlı matris olarak adlandırılır ve $A > 0$ ile gösterilir. Bu tanıma göre,

- Herhangi iki pozitif yarı tanımlı matrisin toplamı da pozitif yarı tanımlıdır.
- Pozitif yarı tanımlı matrisin izi ve determinantı pozitiftir.

Teorem 1.3.1.1 (Zhang, 1999). $A \in M_n$ Hermityen matris olmak üzere A'nın pozitif yarı tanımlı (tanımlı) olması için gerek ve yeter şart bütün öz değerlerinin negatif olmayan reel sayılar olmasıdır.

Teorem 1.3.1.2 (Murad, 2003). $A \in M_n$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart herhangi $B \in M_n$ matrisi için $A = B^* B$ şeklinde yazılabilmesidir. Yani herhangi $B \in M_n$ matrisi için $B^* B$ formundaki *n*-kare matrisler pozitif yarı tanımlı matrislerdir.

Tanım 1.3.1.2 (Matrislerin Hadamard Çarpımı). Aynı boyutlardaki A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı $A \circ B = \left(a_{ij} b_{ij}\right)$ ile tanımlanır. Hadamard çarpımı eleman eleman çarpım veya Schur çarpımı olarak da bilinir. Çarpımın tanımı gereği iki matrisin Hadamard çarpımının yapılabilmesi için mertebelerinin aynı olması gerekir. Hadamard çarpımı, matris çarpımının aksine değişmelidir.

Örnek 1.3.1.1 $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix}6 & -6 & 6\\ 0 & 2 & -7\end{pmatrix}$ matrislerinin Hadamard çarpımları $A\circ B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6 & -6 & 6\\ 0 & 2 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -30 & -36\\ 0 & 8 & -49\end{pmatrix}$ dir.

Teorem 1.3.1.3 (Horn ve Johnson, 1985). Pozitif yarı tanımlı iki matrisin Hadamard çarpımı da pozitif yarı tanımlıdır. Yani $A,B\in M_n$ olmak üzere

$$A,B\geq 0 \;\Rightarrow\; A\circ B\geq 0$$

dır.

1.3.2. Özdeğer ve Singüler Değerler

Tanım 1.3.2.1. $A\in M_n(F)$ $,0\neq x\in\mathbb{C}^n$ ve $\lambda\in F$ skaler bir değer olmak üzere

$$Ax=\lambda x$$

lineer homojen denklem sisteminin sıfır çözümden başka çözümünün olabilmesi için

$$\det(\lambda I-A)=0 \tag{1.6}$$

olması gerekir. (1.6) ile verilen determinant açıldığı zaman, *n*. dereceden λ'ya bağlı bir polinom elde ederiz. Bu $p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ polinomuna A matrisinin *karakteristik polinomu* denir ve ayrıca $p_A(\lambda)=0$ denklemine A matrisinin *karakteristik denklemi* denir.

Tanım 1.3.2.2 (Özdeğerler). $p_A(\lambda)=0$ denkleminin köklerine A matrisinin *öz değerleri* denir ki, bunlar λ skaler değerleridir.

Uyarı 1.3.2.1. Herhangi bir $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n$ matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamına yani $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ toplamına A matrisinin izi denildiğini ve $tr\left(A\right)$ ile gösterildiğini biliyoruz. $\delta(A)=\left\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\right\}$, A'nın tüm öz değerlerinin kümesi olmak üzere, iz fonksiyonu aynı zamanda $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n$ matrisinin özdeğerlerinin toplamıdır. Yani

$$tr\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

dir. Ayrıca determinant fonksiyonu da özdeğerler yardımıyla,

$$\det\left(A\right)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir. Yani $\det A$, A'nın öz değerlerinin çarpımına eşittir.

Teorem 1.3.2.1. A hermityen bir matris ise A matrisinin bütün öz değerleri reeldir. Ters hermityen bir matrisin ise öz değerleri sırf (pür) imajinerdir.

Teorem 1.3.2.2. A $n\times m$ ve B $m\times n$ kompleks matrisler olmak üzere AB çarpımının özdeğerleri ile BA çarpımının sıfırdan farklı özdeğerleri aynıdır.

Tanım 1.3.2.3 (Singüler Değerler). Herhangi bir $A\in M_{m,n}\left(F\right)$ matrisi için A^*, A matrisinin eşlenik transpozu olmak üzere A^*A matrisinin özdeğerlerinin kareköküne A matrisinin singüler değerleri denir ve $s\left(A\right)=\sqrt{\lambda\left(A^*A\right)}=\lambda^{1/2}\left(A^*A\right)$ ile gösterilir.

Uyarı 1.3.2.2. A^*A matrisi hermityen matris olduğundan öz değerlerinin reel olacağı açıktır.

Uyarı 1.3.2.3. A matrisinin modülü $\left|A\right|=\left(AA^*\right)^{1/2}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.3.2.3. $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n$ olmak üzere,

- $s(A)=\lambda\left(|A|\right)=\lambda^{1/2}\left(A^*A\right)=\sqrt{\lambda\left(A^*A\right)}$,
- A Hermityen yani $A^*=A$ ise $s(A)=\left|\lambda(A)\right|$,
- A Pozitif yarı tanımlı yani $A\geq 0$ ise $s(A)=\lambda(A)$

dir.

1.3.3. Özdeğer ve Singüler Değerler için Bazı Eşitsizlikler

Çalışmamızın bu alt bölümünde literatürde var olan ve sonuçlarımızda kullandığımız bazı özdeğer ve singüler değer eşitsizliklerini vereceğiz.

Teorem 1.3.3.1 (Bhatia ve Kittaneh, 1990). A ve B $n\times n$ matrisler olmak üzere

$$2s_j(A^*B)\leq s_j(AA^*+BB^*),\ \ 1\leq j\leq n$$

dir.

Teorem 1.3.3.2 (Bhatia ve Kittaneh, 2000). A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$s_j\left(AB\right)\leq s_j\left(\frac{A+B}{2}\right)^2,\ 1\leq j\leq n$$

dir.

Teorem 1.3.3.3 (Weyl'nin monotonluk prensibi-Horn ve Johnson, 1985). $A,B\in M_n$ hermityen matrisler olmak üzere B pozitif yarı tanımlı matris ise A nın özdeğerleri ve $A+B$ nin özdeğerleri artan sırada düzenlenebilir. Yani $k=1,2,...,n$ için

$$\lambda_k\left(A\right)\leq\lambda_k\left(A+B\right)$$

dir. Bu prensip, hermityen bir matrise pozitif yarı tanımlı bir matris eklendiğinde bu matrisin özdeğeri hermityen matrisin özdeğerinden fazladır şeklinde yorumlanabilir.

1.3.4. Matrislerde Dönüşümler ve Ayrışımlar

Çalışmamızın bu alt bölümünde matrisler üzerinde uygulanan ve sonuçlarımızda kullandığımız bazı dönüşümler ve ayrışımlardan bahsedelim.

Tanım 1.3.4.1 $B = S^{-1}AS$ olacak şekilde singüler olmayan bir $S \in M_n$ matrisi varsa $B \in M_n$ matrisi ile $A \in M_n$ matrisi benzerdir denir.

Teorem 1.3.4.1 $A, B \in M_n$ olmak üzere eğer A ile B matrisleri benzer matrisler ise öz değerleri aynıdır.

Tanım 1.3.4.2 $B = P^* AP$ olacak şekilde bir P üniter matrisi varsa B matrisi ile A matrisi üniter olarak denktir denir.

Teorem 1.3.4.2. $A, B \in M_n$ olmak üzere A ile B matrisleri üniter olarak denk ise öz değerleri aynıdır.

Teorem 1.3.4.3 (Schur'un Üniter Üçgenleştirme Teoremi-Murad, 2003). $A \in M_n$ olsun. Bu taktirde $U^* AU = T$ olacak şekilde $U \in M_n$ üniter matrisi vardır. Öyle ki $T \in M_n$ üst üçgen matristir ve T'nin esas köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleridir. Yani, A matrisi üniter olarak bir üst üçgen matrise benzerdir.

Teorem 1.3.4.4 (Normal matrisler için Spektral Teorem-Murad, 2003). $A \in M_n$ normal matris olması için gerek ve yeter şart A'nın üniter olarak köşegen matrise benzer olmasıdır.

D'nin esas köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleri ve U üniter matris olmak üzere $A = U^* DU$ dir (Zhang, 1999). Bu ayrışıma Spektral ayrışım denir ve bu ayrışım ile normal olan bir matrisin kuvveti kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

Teorem 1.3.4.5 (Singüler Değer Ayrışımı-Murad, 2003). $W \in M_m$ ve $V \in M_n$ üniter matrisler olmak üzere $A \in M_{m,n}$ ise bu matris $A = WDV^*$ formunda yazılabilir ki $D = diag\left(s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A)\right)$ dir.

Teorem 1.3.4.6 (Polar Ayrışım-Murad, 2003). Eğer $A \in M_n$ ise $A = U|A|$ olacak şekilde $U \in M_n$ üniter matrisi vardır. Yani U üniter matrisi ve bir $P \geq 0$ için $A = UP$ şeklinde yazılabilir.

1.3.5. Matris Normları ve Eşitsizlikleri

Matris normu kavramı matrislerin analizinde önemli bir yere sahiptir. Matris normları matrislerin özdeğerleri, singüler değerleri, determinantları ve diğer fonksiyonları ile yakın bir bağa sahiptir (Murad, 2003). Bu alt bölümde bazı norm eşitsizliklerini vermeden önce ilk olarak Matris normu ve Üniter invaryant matris normu kavramlarını açıklayalım.

Tanım 1.3.5.1 (Matris normu). $\forall A, B \in M_n$ matrisleri için $\|.\|: M_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu matris normu olarak adlandırabilmek için

1. $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\|cA\| = |c|\|A\|, \ \forall c \in \mathbb{C}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

aksiyomlarının sağlanması gerekir.

Tanım 1.3.5.2 (Üniter İnvaryant Matris Normu- Zhang, 2011). $\forall U, V \in M_n$ üniter matrisleri ve $\forall A \in M_n$ matrisi için eğer $\|UAV\| = \|A\|$ ise M_n üzerindeki $\|.\|$ normu üniter invaryant olarak adlandırılır. Singüler değerler üniter invaryant matris normu ile yakından ilişkilidir. Örneğin, $A \in M_n$ matrisi için

1. Spektral norm: $\|A\|_s = s_1(A)$

2. Frobenius norm: $\|A\|_2 = \left(tr\left(AA^*\right)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(AA^*\right)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\left(A\right)\right)^{1/2}$
3. Ky Fan k-norm: $\|A\|_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} s_j\left(A\right),\ k = 1,2,...,n$.

matris normları üniter invaryant matris normlarıdır.

Teorem 1.3.5.1 (Ando ve Zhan, 1999). A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler ve $\|.\|$ normu M_n üzerinde tanımlı üniter invaryant matris normu olmak üzere

$$\left\|A^m + B^m\right\| \leq \left\|\left(A+B\right)^m\right\|, \quad 1 \leq m < \infty$$

ve

$$\left\|A^m + B^m\right\| \geq \left\|\left(A+B\right)^m\right\|, \quad 0 < m \leq 1$$

dir.

1.3.6. Artan, Konveks ve Matris Konveks Fonksiyonlar

Tanım 1.3.6.1 (Monoton Artan-Azalan Fonksiyon). A, sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 < x_2$ için $f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$ ise $f\left(x\right)$ fonksiyonuna A üzerinde *monoton artan* fonksiyon, $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ ise *kesin artan* fonksiyon denir. Benzer şekilde, eğer $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 < x_2$ için $f\left(x_1\right) \geq f\left(x_2\right)$ ise $f\left(x\right)$ fonksiyonuna A üzerinde *monoton azalan* fonksiyon, $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$ ise *kesin azalan* fonksiyon denir (Caferov, 2014).

Tanım 1.3.6.2 (Konveks Küme - Horn ve Johnson, 1985). $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Her $x_1, x_2 \in K$ ve $0 \leq \nu \leq 1$ için,

$$\nu x_1 + \left(1-\nu\right) x_2 \in K$$

şartını sağlayan K kümesine konveks küme denir.

Tanım 1.3.6.3 (Konveks-Konkav Fonksiyon). Reel değerli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme üzerinde tanımlı $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi $x_1, x_2 \in K$ ve her $0 \le \nu \le 1$ için

$$f\left(\nu x_1 + \left(1-\nu\right)x_2\right) \le \nu f\left(x_1\right) + \left(1-\nu\right) f\left(x_2\right)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizliğin tersi sağlanıyorsa f fonksiyonuna konkav fonksiyon denilmektedir.

$p \ge 1$ veya $p \le 0$ için $f\left(x\right) = x^p$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde konveks fonksiyondur.

Tanım 1.3.6.4 (Matris Monoton-Operatör Monoton). Eğer $A \le B$ iken $f(A) \le f(B)$ ise f ’e matris monoton fonksiyon denir.

Tanım 1.3.6.5 (Matris Konveks-Operatör Konveks). $A, B \in M_n$ Hermityen matris ve $0 \le \lambda \le 1$ aralığındaki reel sayılar için f fonksiyonu

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \le (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna matris konveks veya operatör konveks fonksiyon denir. $(0,\infty)$ aralığında tanımlı birkaç matris konveks fonksiyon örnekleri verecek olursak,

a) $f(t) = t^{-1}$

b) $f(t) = -t^{1/p}$ $,1 < p < \infty$

matris konveks fonksiyonlardır.

1.3.7. Bazı Eşitsizlikler

Çalışmamızın bu alt bölümünde literatürde yer alan ve çok kullanılan önemli bazı eşitsizlikleri vereceğiz. Aksi belirtilmedikçe vereceğimiz bu kavramlar için kaynağımız Zhang (2011) tarafından yapılan çalışmadır.

Teorem 1.3.7.1. (Jensen Eşitsizliği) $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. $\forall x_i \in I$ ve $t_1, t_2, ..., t_n$ negatif olmayan sayılar olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ olsun. Bu takdirde

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.7.2. (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği) $n > 0$ olmak üzere $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif reel sayıları için

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.7.3. (Genel Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği) Tüm $a_i \geq 0, p_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ olmak üzere

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.7.4. (Hölder Eşitsizliği) $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $a_1, a_2, ...a_n$ ve $b_1, b_2, ...b_n$ reel (kompleks) sayıları için

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.7.5 (Minkowski Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ olsun. $a_1, a_2, ...a_n$ ve $b_1, b_2, ...b_n$ reel (kompleks) sayıları için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.7.6. (Hadamard Eşitsizliği) Pozitif yarı tanımlı A matrisinin köşegen elemanları $a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}$ olmak üzere

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için ya A matrisi köşegen matris olmalı ya da bazı a_{ii} ler için $a_{ii} = 0$ şartının sağlanması gereklidir.

Teorem 1.3.7.7. (Young Eşitsizliği - Kittaneh ve Manasrah, 2010). $a, b \geq 0$ ve $0 \leq \nu \leq 1$ olmak üzere

$$a^{\nu} b^{1-\nu} \leq \nu a + (1-\nu) b$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak $a = b$ olması durumunda olacaktır. Eğer $\nu = \frac{1}{2}$ ise aritmetik geometrik ortalama eşitsizliği elde edilir. Yani

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

olur. Ayrıca $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise Young eşitsizliği

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

şeklinde yazılabilir.

1.3.8. 2×2 Tipinde Blok Matrisler

Bu bölümde ilk olarak çalışmamızda sıkça adı geçen ve eşitsizlikler ürettiğimiz blok matrislerden bahsedip, matrislerin nasıl bloklara ayrıldığını daha iyi anlamaya çalışalım. Öncelikle matrisler üzerindeki işlemlerde sık sık kullanılan, büyük mertebeli matrisler üzerinde yapılan işlemlerde bazı kolaylıklar sağlayan matrislerin bloklara ayrılması metodunu (Bozkurt ve ark., 2007) tanımlayalım.

Tanım 1.3.8.1. Herhangi bir A matrisinin bir kısım satır ve sütunlarının silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin bir *alt matrisi* denir.

$A\in M_{m,n}$ olsun. Bu matrisi, yatay ve dikey çizgilerle çeşitli alt matrislere ayırabiliriz. Bunu

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right) \qquad (1.7)$$

şeklinde basit bir örnekle gösterebiliriz. (1.7) ile verilen A matrisini,

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix},\; A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15}\end{pmatrix},\; A_{21}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix},\; A_{22}=\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35}\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 1.3.8.2 (Bozkurt ve ark., 2007). (1.7) [veya (1.8)] formülleriyle verilen işleme, A matrisini *bloklara ayırma işlemi* denir. Bir matris birden fazla değişik şekilde bloklara ayrılabilir.

Bu çalışmada 2×2 tipinde blok matrisler kullanılmaktadır. 2×2 tipinde blok matrisler ve pozitif yarı tanımlı matrisler, matris eşitsizlikleri üretmede önemli rol oynamaktadır. Bunun için 2×2 tipinde köşegen blok matris ve pozitif yarı tanımlı matris olma arasında güzel bir bağıntı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 1.3.8.1 (Horn ve Johnson, 1985). $A,B\in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\geq 0$$

dir.

Teorem 1.3.8.2 (Zhang, 1999) X ve Y matrisleri herhangi n-kare matrisler ve $A=\begin{pmatrix} X^* & Y^* \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^* & Y^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} XX^* & XY^* \\ YX^* & YY^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$$

matrisi A^*A şeklinde olduğundan

$$A^*A=\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}\geq 0$$

matrisi $M,N\geq 0$ ve $K\in M_n$ olmak üzere daima pozitif yarı tanımlı blok matristir.

1.3.9. Hermityen matrisler için Löwner Sıralama

Tanım 1.3.9.1 (Murad, 2003). $A,B\in M_n$ matrisleri hermityen matris olmak üzere $A-B$ matrisi pozitif yarı tanımlı ise buna Löwner sıralama denir ve $A\geq B$ ile gösterilir. Aynı şekilde $A-B$ matrisi pozitif tanımlı ise $A>B$ yazılabilir.

Teorem 1.3.9.1 (Horn ve Johnson, 1985). $A,B\in M_n$ hermityen matrisler olmak üzere,

- $A\geq B$ ise herhangi bir $C\in M_n$ matrisi için $C^*AC\geq C^*BC$ dir.
- $A>B$ ise herhangi singüler olmayan $C\in M_n$ matrisi için $C^*AC>C^*BC$ dir.

Teorem 1.3.9.2 (Horn ve Johnson, 1985). $A,B\in M_n$ hermityen matrisler ve $A\geq B$ olmak üzere,

- A ve B matrislerinin özdeğerleri azalan ya da artan şekilde aynı sırada sıralanmış olsun. Bu takdirde $j=1,2,...,n$ için $\lambda_j(A)\geq\lambda_j(B)$ dir.
- $tr(A)\geq tr(B)$
- Ek olarak $B\geq 0$ ise $\det(A)\geq\det(B)$ dir.
- Ek olarak $B\geq 0$ ise $|||A|||\geq|||B|||$ dir.

Teorem 1.3.9.3 (Löwner Heinz, Zhan, 2002). $A,B\in M_n$ matrisleri hermityen matrisler olmak üzere eğer $A\geq B\geq 0$ ve $0\leq\nu\leq 1$ ise

$$A^\nu\geq B^\nu$$

dir.

Teorem 1.3.9.4 (Zhang, 1999). $A,B\in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere $B\geq A$ ise,

$$\begin{pmatrix} B & A \\ A & B \end{pmatrix}\geq 0$$

dir.

Teorem 1.3.9.5 (Zhang, 1999). $A\in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler ve $B\in M_{n,m}$ olmak üzere, herhangi pozitif yarı tanımlı $X\in M_m$ matrisi için $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & X \end{pmatrix}$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart

$$X\geq B^*A^{-1}B$$

olmasıdır.

2. MAZORİZASYON TEORİSİ

Pozitif yarı tanımlı matrislerin özdeğerleri ve hermityen matrislerin köşegen elamanları arasındaki bağıntı, Schur (1923) tarafından majorizasyon kavramının matrisler üzerinde kullanılmasıyla ispatlanmıştır. Majorizasyon, iki vektörü karşılaştırırken ya da ilişkilendirirken çok faydalı olan bir kavramdır. Nasıl ki Hermityen matrisler reel sayıların matrislere genellemesi ve pozitif tanımlı matrisler pozitif sayıların matrislere genellemesi ise kısmi sıralama bağıntısının vektörlere genellemesi de majorizasyondur. Majorizasyon kavramına kısaca vektörlerin kısmi sıralama bağıntısı da denilebilir.

Schur'un (1923) çalışması ile Hadamard eşitsizliğinin araştırmacılar tarafından kolayca anlaşılmasından sonra majorizasyon kavramı, matrislerin özdeğer ve singüler değerleri üzerinde matris eşitsizlikleri elde etmek için kullanılmıştır.

Bu bölümde ilk olarak majorizasyon kavramının çıkış noktasından ve öneminden bahsedildi. Ardından majorizasyon kavramı tanımlandı ve daha sonra da genel matrisler ve 2×2 tipinde pozitif yarı tanımlı Hermityen blok matrislerin özdeğerleri için bazı majorizasyon eşitsizlikleri verildi.

2.1. Kısmi Sıralama Bağıntısı ve Reel Sayıların Karşılaştırılması

Bu bölümde majorizasyon teorisinin temelini oluşturan sıralama bağıntılarından bahsedilecektir. Aksi belirtilmedikçe vereceğimiz bu kavramlar için kaynağımız Karakaş (2008) tarafından yapılan çalışmadır.

Tanım 2.1.1. K bir küme ve β, K üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β nın yansıma, ters-simetri ve geçişme özellikleri varsa, βya bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı bulunan bir kümeye kısmi sıralı küme denir.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{R}$ üzerindeki $\leq$ bağıntısı, kısmi sıralama bağıntısıdır. Gerçekten $\leq$, $\mathbb{R}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olup aşağıdaki koşulları sağlar.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \leq x$ ' dir. **(yansıma)**
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ ' dir. **(ters simetri)**
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ 'dir. **(geçişme)**

Tanım 2.1.2. $\leq$, A üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olsun. $(A,\leq)$ kısmi sıralı kümesinin herhangi iki elemanı $x,y\in A$ için $x\leq y$ veya $y\leq x$ ise x ve y elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlardır denir.

2.3. Kompleks Sayıların Modülleri ile Karşılaştırılması

Herhangi iki tamsayı veya iki reel sayı aralarında karşılaştırılırken biri büyük iken diğeri küçüktür. Ama reel sayılar üzerindeki $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı kompleks sayılarda mevcut olmadığından ve her kompleks sayı düzlemde bir nokta ile temsil edildiğinden herhangi iki kompleks sayı karşılaştırılamaz. Kompleks sayılarda sıralama sadece modülleri yardımıyla yapılabilmektedir. Şimdi bu alt bölümde kompleks sayıların nasıl sıralandıklarını görelim.

Tanım 2.3.1. a *ve* b birer reel sayı ve $i=\sqrt{-1}$ $,(i^2=-1)$ olmak üzere $z=a+ib$ kompleks sayısının başlangıç noktasına olan uzaklığına, kompleks sayının mutlak değeri (büyüklüğü ya da modülü) denir ve z kompleks sayısının modülü $|z|$ ile gösterilir ve

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.3.1. $z=6+8i$ olmak üzere $r=|z|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=10$ dur.

Şimdi ise $z_1=8-6i$ ve $z_2=3+4i$ kompleks sayılarını modülleri yardımıyla karşılaştırırsak,

$$|z_1|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=10$$

$$|z_2|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$$

olup $|z_1|>|z_2|$ dir.

2.4. Vektörlerin Karşılaştırılması

$\mathbb{R}^n$ den alınan iki vektör çeşitli yöntemlerle karşılaştırılabilir. Bilinen en basit yöntem olan bileşen bileşen sıralamanın haricinde n tane negatif olmayan bileşene sahip vektörlerin kısmi sıralaması olan majorizasyon ilk olarak Schur (1923) tarafından matrislerin özdeğeri ve köşegen elemanları üzerinde kullanılmıştır. Biz çalışmamızda matrislerin singüler ve özdeğer vektörlerini, vektörlerin kısmi sıralama bağıntısı olarak da bilinen majorizasyon yardımıyla karşılaştırdığımızdan dolayı bu alt bölümde majorizayon kavramını (örnekleri ile birlikte) vereceğiz.

2.4.1. Majorizasyon

Tanım 2.4.1 (Bapat, 1991). $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $x^{\downarrow} = \left(x_1^{\downarrow}, x_2^{\downarrow}, ..., x_n^{\downarrow}\right)$ vektörü, $x_1^{\downarrow} \geq x_2^{\downarrow} \geq ... \geq x_n^{\downarrow}$ olacak şekilde azalan sırada sıralanmış bileşenlere sahip vektöre karşılık gelsin. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için eğer

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \ , \ k = 1, 2, ..., n-1$$

şartı sağlanıyorsa x, y tarafından majorize edilir denir ve $x \prec y$ şeklinde gösterilir. Sadece

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \ , \ k = 1, 2, ..., n$$

ise x, y tarafından zayıf majorize edilir denir ve $x \prec_w y$ şeklinde gösterilir. Açıktır ki, majorizasyon zayıf majorizasyonu gerektirir.

Bu tanım, vektörlerin kısmi toplam yardımıyla lineer eşitsizlik cinsinden ifade edilebilmesini sağlar (Dahl, 2009).

Burada x vektöründeki bileşenler, y vektöründeki bileşenlerden daha az yayılır veya x vektörü y vektörü tarafından kontrol edilir denir (Zhang, 2011).

2.4.2. Temel Bazı Örnekler

Majorizasyon kavramının en temel örneklerinden birini verelim. Eğer $\forall a_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ ise,

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \prec (a_1,a_2,...,a_n) \prec \left(1,0,0,...,0\right)$$

olur. Yukarıdaki şekilde tanımlanan vektörler majorizasyon aracığıyla karşılaştırılabilir (Jorswieck ve Boche, 2007). Yani,

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1},...,\frac{1}{n-1},0\right) \prec ... \prec (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,...,0) \prec \left(1,0,0,...,0\right)$$

olacaktır (Marshall ve Olkin, 1979).

Teorem 2.4.2.1 (Schur, 1923). H , köşegen elemanları $h_1,...,h_n$ ve özdeğerleri $\lambda_1,...,\lambda_n$ olan $n\times n$ mertebeli Hermityen matris olmak üzere,

$$diag(H) \prec \lambda(H)$$

dir. Yani, hermityen bir matrisin köşegen elemanları, özdeğerleri tarafından majorize edilir.

2.5. Doubly Stochastic Matris

Majorizasyonun yararlı bir karakterizasyonu daha vardır. Elemanları reel ve pozitif olan, satır ve sütun elemanlarının toplamı 1 olan matris doubly stochastic matris olarak adlandırılır (Zhan, 2002). Bu matris ile birçok majorizasyon eşitsizliği türetilebilmekte ve bazı teoriler ispatlanabilmektedir.

Tanım 2.5.1 (Schur, 1923). $P = \left(p_{ij}\right) \in M_n$ olsun. Eğer $1 \le i,j \le n$ için $\forall p_{ij} \ge 0$ ve

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1 \ , 1 \le j \le n \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \ , 1 \le i \le n$$

ise $n \times n$ mertebeli P matrisine doubly stochastic matris denir.

Teorem 2.5.1 (Hardy, Littlewood ve Polya, 1929). $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$x \prec y \Leftrightarrow P \text{ doubly stochastic matris } \ni x = Py$$

dir.

Örnek 2.5.1 (Jorswieck ve Boche, 2007). $x = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \prec y = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ olmak üzere buna karşılık gelen doubly stochastic matris $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ tir. Gerçekten $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ olacaktır.

Şimdi Teorem 2.4.2.1'in Doubly Stochastic Matris ile yapılan ispatını verelim.

İspat (Schur,1923) H'nin özdeğerleri $\lambda_1, ..., \lambda_n$ olmak üzere $H = UD_\lambda U^*$ olacak şekilde bir U üniter matrisi vardır. $p_{ij} = u_{ij}\overline{u}_{ij}$ olmak üzere H'nin köşegen elemanları $(h_1, ..., h_n)$ olmak üzere

$$h_i = \sum_j u_{ij}\overline{u}_{ij}\lambda_j \equiv \sum_j p_{ij}\lambda_j \quad , \; i = 1, 2, ..., n$$

şeklindedir. U üniter olduğundan $P = (p_{ij})$ doubly stochastic matristir. Sonuç olarak,

$$(h_1, ..., h_n) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)P$$

olup Teorem 2.5.1'den $h \prec \lambda$ olur. Yani, $diag(H) \prec \lambda(H)$ dir.

2.6. Majorizasyonda Schur Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.6.1 (Schur konveks- Marshall ve ark., 1979). ϕ, $\Re \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere ϕ, $\Re$ üzerinde Schur Konveks olması için gerek şart,

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \le \phi(y)$$

olmasıdır. Benzer şekilde ϕ, $\Re$ üzerinde Schur Konkav olması için gerek şart

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \ge \phi(y)$$

olmasıdır.

Önerme 2.6.1 (Hardy, Littlewood ve Polya, 1929). Tüm sürekli konveks $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar ile verilen

$$\sum g(x_i) \le \sum g(y_i)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $x \prec y$ olmasıdır.

Teorem 2.6.1 (Zhan, 2002). f fonksiyonu herhangi bir konveks fonksiyon olmak üzere,

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad \left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right)\right) \prec_w \left(f\left(y_1\right), f\left(y_2\right), \ldots, f\left(y_n\right)\right)$$

dir.

Teorem 2.6.2 (Zhan, 2002). g fonksiyonu herhangi bir konveks ve artan fonksiyon olmak üzere,

$$x \prec_w y \quad \Rightarrow \quad \left(g\left(x_1\right), g\left(x_2\right), \ldots, g\left(x_n\right)\right) \prec_w \left(g\left(y_1\right), g\left(y_2\right), \ldots, g\left(y_n\right)\right)$$

dir.

Örnek 2.6.1. $x \prec y \Rightarrow \left(|x_1|,...,|x_n|\right) \prec_w \left(|y_1|,...,|y_n|\right)$

Örnek 2.6.2. $x \prec y \Rightarrow \left(x_1^2,...,x_n^2\right) \prec_w \left(y_1^2,...,y_n^2\right)$

Örnek 2.6.3. $x \prec_w y \Rightarrow \left(x_1^r,...,x_n^r\right) \prec_w \left(y_1^r,...,y_n^r\right)$, $r > 1$

Örnek 2.6.4 (Weyl, 1949). $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ve $g(e^z)$ konveks ve artan ise,

$$\left(\log x_1,...,\log x_n\right) \prec_w \left(\log y_1,...,\log y_n\right) \Rightarrow \left(\mathrm{g}(x_1),...,\mathrm{g}(x_n)\right) \prec_w \left(\mathrm{g}(y_1),...,\mathrm{g}(y_n)\right)$$

dır.

2.7. Logaritmik Majorizasyon

Tanım 2.7.1 (Ando ve Hiai, 1994) $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ vektörleri için eğer

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$$

ve

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \ , \ k = 1,2,....,n-1$$

şartı sağlanıyorsa *x, y* tarafından log-majorize edilir denir ve $x \prec_{\log} y$ şeklinde gösterilir. Sadece

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \ , \ k = 1,2,....,n$$

ise x, y tarafından zayıf log-majorize edilir denir ve $x \prec_{w\log} y$ şeklinde gösterilir.

Pozitif bileşenli vektörler için logaritmik majorizasyon, majorizasyondan daha güçlüdür (Zhan, 2002). Çünkü,

$$x \prec_{w\log} y \Rightarrow \ln x \prec_w \ln y$$

ve

$$\ln x \prec_w \ln y \Rightarrow (\ln x_1, \ln x_2, ..., \ln x_n) \prec_w (\ln y_1, \ln y_2, ..., \ln y_n)$$

olup konvekslikten yararlanılacak olursa, yani, Teorem 2.6.2 de $g(t) = e^t$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \ln x \prec_w \ln y & \overset{g(t)=e^t}{\Rightarrow} \left(e^{\ln x_1}, e^{\ln x_2}, ..., e^{\ln x_n}\right) \prec_w \left(e^{\ln y_1}, e^{\ln y_2}, ..., e^{\ln y_n}\right) \\ & \Rightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) \prec_w (y_1, y_2, ..., y_n) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bu sonuçla aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.7.1 (Zhang, 1999). $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ vektörler olmak üzere,

$$x \prec_{w\log} y \;\Rightarrow\; x \prec_w y$$

dir.

2.8. Bazı Majorizasyon Eşitsizlikleri

Bu bölümde genel matrisler için majorizasyon eşitsizlikleri verilip ardından 2×2 tipinde pozitif yarı tanımlı Hermityen blok matrislerin özdeğerleri için bazı majorizasyon eşitsizlikleri verilmiştir. Çalışmamızın bu kısmından itibaren ele alacağımız matrisler genel, reel özdeğerlere sahip hermityen veya pozitif yarı tanımlı matrisler olacağından majorizasyon tanımını kullanabilmek için singüler değerleri ve özdeğerleri vektör formatında göstereceğiz.

Yani, A matrisinin özdeğerleri, özdeğerler reel ise $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq ... \geq \lambda_n(A)$ şeklinde azalan sırada sıralandıktan sonra; özdeğerler reel değil ise özdeğerlerin modülleri $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq ... \geq |\lambda_n(A)|$ şeklinde azalan sırada sıralandıktan sonra $A \in M_n$ nın özdeğer vektörü $\lambda^{\downarrow}(A) = \lambda(A) = (\lambda_1(A), ..., \lambda_n(A))$ ile ifade edilecektir.

Aynı şekilde A matrisinin singüler değerleri, $s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A)$ şeklinde azalan sırada sıralandıktan sonra $A \in M_n$ nın singüler değer vektörü $s^{\downarrow}(A) = s(A) = (s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A))$ ile ifade edilecektir.

2.8.1. Genel Matrisler için Bazı Majorizasyon Eşitsizlikleri

Teorem 2.8.1.1 (Weyl, 1949). Herhangi $n\times n$ kompleks matrisin sıralı özdeğerleri $|\lambda_1(A)|\geq|\lambda_2(A)|\geq\ldots\geq|\lambda_n(A)|$ olmak üzere,

$$\prod_1^k|\lambda_j(A)|\leq\prod_1^k s_j(A),\qquad k=1,\ldots,n-1,$$
$$\prod_1^n|\lambda_j(A)|=\prod_1^n s_j(A).$$

dir. Yani $|\lambda(A)|\prec_{\log} s(A)$ dir.

Eğer $|\lambda_n(A)|>0$ ise bu şartlar,

$$\left(\log|\lambda_1(A)|,\log|\lambda_2(A)|,\ldots,\log|\lambda_n(A)|\right)\prec\left(\log s_1(A),\log s_2(A),\ldots,\log s_n(A)\right)$$

durumuna denktir (Marshall ve ark., 1979).

Teorem 2.7.1'den dolayı herhangi singüler olmayan (regüler) $n\times n$ kompleks matris için,

$$\left(|\lambda_1(A)|,|\lambda_2(A)|,\ldots,|\lambda_n(A)|\right)\prec_w\left(s_1(A),s_2(A),\ldots,s_n(A)\right)$$

dir.

Teorem 2.6.2'den ve $s_i^2(A)=\lambda_i(AA^*)$'den dolayı herhangi $n\times n$ singüler olmayan (regüler) kompleks matris için,

$$\left(|\lambda_1(A)|^2,|\lambda_2(A)|^2,\ldots,|\lambda_n(A)|^2\right)\prec_w\left(s_1^2(A),s_2^2(A),\ldots,s_n^2(A)\right)=\left(\lambda_1(AA^*),\lambda_2(AA^*),\ldots,\lambda_n(AA^*)\right)$$

dir.

Teorem 2.8.1.2 (Schur, 1909). Herhangi singüler olmayan (regüler) $n\times n$ kompleks matris için,

$$\sum_{1}^{n}\lambda_i\left(AA^*\right)=tr\left(AA^*\right)=\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2\geq\sum_{1}^{n}\left|\lambda_i\left(AA^*\right)\right|^2$$

dir.

Teorem 2.8.1.2'de,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{x_{n-1}} \\ \sqrt{x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad x_i>0,\ i=1,2,\ldots,n$$

seçilirse,

$$\sum_{1}^{n}x_i\geq n\prod_{1}^{n}x_i^{1/n}$$

elde edilir ki, bu eşitsizlik aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğidir (Marshall ve ark., 1979).

Teorem 2.8.1.3 (Fan, 1949). Herhangi A kompleks matrisi ve r pozitif tamsayısı için,

$$s^2\left(A^r\right)\prec_w s^{2r}\left(A\right)$$

dir.

Herhangi A $n\times n$ kompleks matrisinin özdeğerlerinin reel kısmı ile birçok teori ortaya çıkmıştır. Reel kısım, $\Re\lambda\left(A\right)$ olarak tanımlanmaktadır.

Teorem 2.8.1.4 (Fan, 1950) Herhangi A $n\times n$ kompleks matrisi için,

$$\left(\Re\lambda_1\left(A\right),\Re\lambda_2\left(A\right),\ldots,\Re\lambda_n\left(A\right)\right)\prec\left(\lambda_1\left(\frac{A+A^*}{2}\right),\lambda_2\left(\frac{A+A^*}{2}\right),\ldots,\lambda_n\left(\frac{A+A^*}{2}\right)\right)$$

dir.

Teorem 2.8.1.5 (Fan, 1951). Eğer A ve B $n\times n$ kompleks matrisler ise,

$$s(A+B)\prec_w s(A)+s(B)$$

dir.

Teorem 2.8.1.6 (Horn, 1950; Visser ve Zaanen, 1959; De Brujin, 1956). A ve B $n\times n$ kompleks matrisler ise,

$$\prod_1^k s_i(AB)\le\prod_1^k s_i(A)s_i(B),\quad k=1,\dots,n-1$$
$$\prod_1^n s_i(AB)=\prod_1^n s_i(A)s_i(B),$$

dir. Yani, $s(AB)\prec_{log} s(A)s(B)$ dir. Aynı zamanda bu $s(AB)\prec_w s(A)s(B)$ eşitsizliğini gerektirir.

Eğer $s_n(AB)>0$ ise bu şartlar,

$$(\log s_1(AB),\log s_2(AB),\dots,\log s_n(AB))\prec(\log s_1(A)s_1(B),\log s_2(A)s_2(B),\dots,\log s_n(A)s_n(B))$$

durumuna denktir (Marshall ve ark., 1979). Çünkü,

$$s_i(A)=\lambda_i^{1/2}(AA^*),\qquad s_i(AB)=\lambda_i^{1/2}(ABB^*A^*)=\lambda_i^{1/2}(A^*ABB^*),\quad i=1,\dots,n$$

dir.

Teorem 2.8.1.7 (De Brujin, 1956; Marshall ve ark., 1979). A ve B $n\times n$ pozitif yarı tanımlı Hermityen matrisler ise,

$$\prod_1^k \lambda_i(AB)\le\prod_1^k \lambda_i(A)\lambda_i(B),\quad k=1,\dots,n-1$$
$$\prod_1^n \lambda_i(AB)=\prod_1^n \lambda_i(A)\lambda_i(B),$$

dir.

Eğer $\lambda_n(AB) > 0$ ise bu şartlar,

$$\left(\log\lambda_1(AB), \log\lambda_2(AB), ..., \log\lambda_n(AB)\right) \prec \left(\log\lambda_1(A)\lambda_1(B), \log\lambda_2(A)\lambda_2(B), ..., \log\lambda_n(A)\lambda_n(B)\right)$$

durumuna denktir (Marshall ve ark., 1979).

Teorem 2.8.1.8 (Marshall ve ark., 1979). $A_1, ..., A_m$ ler $n \times n$ kompleks matrisler ise,

$$\prod_1^k s_i(A_1 ... A_m) \leq \prod_1^k s_i(A_1) ... s_i(A_m), \quad k = 1, ..., n-1$$
$$\prod_1^n s_i(A_1 ... A_m) = \prod_1^n s_i(A_1) ... s_i(A_m)$$

dir.

Eğer $s_n(A_1 ... A_m) > 0$ ise bu şartlar,

$$\begin{aligned}&\left(\log s_1(A_1 ... A_m), \log s_2(A_1 ... A_m), ..., \log s_n(A_1 ... A_m)\right)\\ &\qquad \prec \left(\log s_1(A_1) ... s_1(A_m), \log s_2(A_1) ... s_2(A_m), ..., \log s_n(A_1) ... s_n(A_m)\right)\end{aligned}$$

durumuna denktir.

Teorem 2.8.1.9 (Marshall ve ark., 1979). A ve B $n \times n$ kompleks matrisler ise,

$$\sum_1^k s_i(AB) \leq \sum_1^k \frac{1}{2}\left[\lambda_i(AA^*) + \lambda_i(BB^*)\right], \quad k = 1, ..., n$$

dir. Çünkü Teorem 2.8.1.6'da aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_1^k s_i(AB) &\leq \sum_1^k s_i(A) s_i(B)\\ &\leq \sum_1^k \frac{1}{2}\left[s_i^2(A) + s_i^2(B)\right], \quad k = 1, ..., n\end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.8.1.8 kullanılarak bu sonuç m tane $A_1,...,A_m$ matrislerine

$$\sum_{1}^{k} s_i\left(A_1...A_m\right) \le \sum_{1}^{k} s_i\left(A_1\right)...s_i\left(A_m\right)$$
$$\le \sum_{1}^{k} \frac{1}{m}\left[s_i^m\left(A_1\right)+...+s_i^m\left(A_m\right)\right],\ \ k=1,...,n$$

şeklinde genelleştirilebilir.

Teorem 2.8.1.10 (Marcus, 1969). $A_1,...,A_m$ ler $n\times n$ kompleks matrisler ve ϕ azalan konveks fonksiyon ise,

$$\sum_{1}^{k} \phi\left(s_i\left(A_1...A_m\right)\right) \le \sum_{1}^{k} \frac{1}{m}\left[\phi\left(s_i^m\left(A_1\right)\right)+...+\phi\left(s_i^m\left(A_m\right)\right)\right],\ \ k=1,...,n$$

dir.

Teorem 2.8.1.11 (Fan Dominance Prensibi - Zhang, 1999). $A,B\in M_{m,n}$ olsun. Bu takdirde, $M_{m,n}$ üzerinde tanımlı tüm $\|.\|$ üniter invaryant matris normları için,

$$s(A) \prec_w s(B) \Leftrightarrow \|A\| \le \|B\|$$

dir.

Bu teori zayıf majorizasyon eşitsizliğinden norm eşitsizliği elde etmek için kullanılan çok iyi bir araçtır.

2.8.2. Blok Matrisler için Bazı Majorizasyon Eşitsizlikleri

Teorem 2.8.2.1 (Fan, 1954). H ve $\widetilde{H}$ matrisleri $H=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22}\end{pmatrix}$ ve $\widetilde{H}=\begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22}\end{pmatrix}$ şeklinde Hermityen blok matrisler olsunlar. $H_{11}: l\times l$, $H_{22}: m\times m$ ve $l+m=n$ ise $\mathbb{R}^n$ üzerinde,

$$\left(\lambda\left(H_{11}\right),\lambda\left(H_{22}\right)\right)=\lambda\left(\widetilde{H}\right)\prec\lambda\left(H\right)$$

majorizasyon eşitsizliği vardır.

Teorem 2.8.2.2 (Özdeğer İnterlacing Teorem - Zhang, 2011). $n\times n$ Hermityen H matrisi ve H nin temel alt matrisi M, $m\times m$ matris ve $1\le m\le n$ olmak üzere H matrisi,

$$H=\begin{pmatrix} M & K \\ K^{*} & N \end{pmatrix}$$

şeklinde bloklara ayrılsın. Bu durumda $k=1,2,...,m$ için

$$\lambda_{k+n-m}\left(H\right)\le\lambda_{k}\left(M\right)\le\lambda_{k}\left(H\right)$$

dir. Özellikle de $m=n-1$ olduğunda,

$$\lambda_{n}\left(H\right)\le\lambda_{n-1}\left(M\right)\le\lambda_{n-1}\left(H\right)\le...\le\lambda_{2}\left(H\right)\le\lambda_{1}\left(M\right)\le\lambda_{1}\left(H\right)$$

dir.

Teorem 2.8.2.3 (Zhang, 2001). M, K ve N sırasıyla $m\times n$, $m\times n$ ve $n\times n$ kompleks matrisler olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} M & K \\ K^{*} & N \end{pmatrix}\ge 0$$

dır. $rank\left(K\right)=r$ alınırsa,

$$\mu_{i}=\begin{cases}\max\left\{\lambda_{i}\left(M\right),\lambda_{i}\left(N\right)\right\} & , i\le r \\ 0 & , \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olmak üzere $\mu=\left(\mu_{1},\mu_{2},...,\mu_{n}\right)$ için

$$\log s(K) \prec_w \log \mu$$

dir. Bu aynı zamanda

$$s(K) \prec_w \mu$$

olmasını gerektirir ve aynı zamanda M, K ve N aynı mertebeden kare matrisler ise

$$\log\left|\lambda(K)\right| \prec_w \log \mu \tag{2.1}$$

olacaktır.

İspat (Zhang, 2001). Varsayalım ki, $K \neq 0$ olsun. $D = diag(s_1(K),...,s_r(K))$, U, $m \times r$ ve V, $n \times r$ kısmi üniter matrisler sırasıyla $U^*U = V^*V = I_r$, K matrisinin singüler değer ayrışımı $K = UDV^*$ olsun.

$$\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & V^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^*MU & D \\ D & V^*NV \end{pmatrix} \geq 0$$

olsun. Her bloğun $1 \leq k \leq r$ için $k \times k$ mertebelerinde temel alt matrisini alırsak,

$$\begin{pmatrix} \left[U^*MU\right]_k & [D]_k \\ [D]_k & \left[V^*NV\right]_k \end{pmatrix} \geq 0$$

yazarız. Her bloğun determinantını alacak olursak,

$$\det[D]_k^2 \leq \det\left(\left[U^*MU\right]_k\right)\det\left(\left[V^*NV\right]_k\right)$$

olur veya aynı şekilde her $1 \leq k \leq r$ için,

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(K)^2 \le \prod_{i=1}^{k} \lambda_i\left(\left[U^*MU\right]_k\right) \lambda_i\left(\left[V^*NV\right]_k\right)$$

olur. İnterlacing teoremi ile,

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(K)^2 \le \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(M)\, \lambda_i(N) \le \prod_{i=1}^{k} \mu_i^2$$

elde edilir. (2.1) deki eşitsizlik köşegen elemanları $\lambda_1(K), \lambda_2(K), ..., \lambda_n(K)$ olan T üst üçgen matris ve W üniter alınıp $K = WTW^*$ şeklinde yazılarak elde edilebilir.

Teorem 2.8.2.4 (Rotfel'd, 1969; Thompson, 1977). Eğer G ve H nxn mertebeli pozitif yarı tanımlı Hermityen matrisler ise,

$$(\lambda(G+H), 0) \prec (\lambda(G), \lambda(H))$$

dir.

İspat (Rotfel'd, 1969; Thompson, 1977). G ve H pozitif yarı tanımlı Hermityen matrisler olduğundan, X ve Y $n \times n$ matrisler olmak üzere $G = XX^*$ ve $H = YY^*$ formunda yazılabilir. Eğer $A = [X \quad Y]$ ise $G + H = AA^*$ dir. Dahası AA^* nın sıfırdan farklı özdeğerleri $A^*A = \begin{bmatrix} X^*X & X^*Y \\ Y^*X & Y^*Y \end{bmatrix}$ sıfırdan farklı özdeğerleri ile çakışmaktadır. Yani $\lambda(A^*A) = (\lambda(AA^*), 0)$ dir. Sonuç olarak,

$$\lambda(A^*A) \prec \left(\lambda(X^*X), \lambda(Y^*Y)\right) = (\lambda(G), \lambda(H))$$

olur.

Matris eşitsizlikleri ispatlamada $\begin{pmatrix} H & K \\ K & H \end{pmatrix}$ formundaki blok matrisler, çok önemli rol oynarlar. Şimdi bu formdaki blok matrisler için literatürde var olan teorileri inceleyelim.

Teorem 2.8.2.5 (Zhang-2005). H ve K n-kare kompleks Hermityen matrisler ve $\|.\|$ normu M_n üzerinde tanımlı üniter invaryant matris normu olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} H & K \\ K & H \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad H \geq \pm K \quad \Rightarrow \quad |\lambda(K)| \prec_w \lambda(H) \quad \Rightarrow \quad \|K\| \leq \|H\| \tag{2.2}$$

dir. Gerçekten,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} H & K \\ K & H \end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} H-K & 0 \\ 0 & H+K \end{pmatrix}$$

olur. (2.2) deki blok matrisin özdeğerleri $H \pm K$ 'nınkilerle aynıdır. (2.2) deki H ve K matrislerinin özdeğerlerinin majorizasyon eşitsizlikleri,

$$|\lambda(K)| \prec_w \lambda(H)$$

dir ve bu eşitsizlik Teorem 2.8.2.3 ile

$$\log|\lambda(K)| \prec_w \log\lambda(H) \tag{2.3}$$

şeklinde genişletilebilir.

Teorem 2.8.2.6 (Zhang, 2001- Zhang-2005). M, K ve N n-kare kompleks matrisler olsun.

$$\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \geq 0$$

ise $*$; $+$ veya $\circ$ olmak üzere,

$$M * N \geq \pm\left(K^{*} * K\right) \tag{2.4}$$

dir ve aynı zamanda M_n üzerinde tanımlı $|||\,.\,|||$ üniter invaryant matris normu için

$$|||K^{*} * K||| \leq |||M * N||| \tag{2.5}$$

dir.

İspat (Zhang-2001). Pozitif yarı tanımlı blok matrislerin permütasyon kongüransı da pozitif yarı tanımlı ve iki pozitif yarı tanımlı matrisin toplamı veya Hadamard çarpımı da pozitif yarı tamlı olduğundan

$$\begin{pmatrix} M & K \\ K^{*} & N \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} N & K^{*} \\ K & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M * N & K^{*} * K \\ K^{*} * K & M * N \end{pmatrix} \geq 0$$

dir ve Teorem 2.8.2.5 kullanılarak (2.4) ve (2.5) eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 2.8.2.1 (Zhang, 2001). (2.4) , (2.3)'e uygulanırsa,

$$\log\left|\lambda\left(K + K^{*}\right)\right| \prec_w \log\lambda\left(M + N\right)$$

ve

$$\log\left|\lambda\left(K \circ K^{*}\right)\right| \prec_w \log\lambda\left(M \circ N\right)$$

olur.

Ayrıca Zhang (2001) çalışmasında yer alan blok matris uygulamalarında Teorem 2.8.2.3 kullanılarak yeni majorizasyon eşitsizlikleri elde edilebilir.

Schur (1923), majorizasyon tipi eşitsizliklerine temel olan Hermityen A matrisinin köşegen elemanlarının özdeğerleri tarafından majorize edildiğini göstermiştir, yani $diag(A) \prec \lambda(A)$ olduğunu bulmuştur. Lin ve Wolkowicz (2012) ise yaptıkları çalışmada Schur (1923)'un hermityen matrisler için tanımladığı $diag(A) \prec \lambda(A)$ eşitsizliğini 2×2 tipindeki Hermityen blok matrislere taşımışlardır.

Bunun için $H=\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ Hermityen matrisini ele almışlardır ve $H=\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ Hermityen matrisi için

$$diag(H) \prec \lambda(M \oplus N) \prec \lambda(H)$$

olduğunu göstermişlerdir.

Şimdi pozitif yarı tanımlı 2×2 Hermityen blok matrisler için ters majorizasyon eşitsizlikleri veren Lin ve Wolkowicz (2012) çalışmasını inceleyelim.

Teorem 2.8.2.7 (Lin ve Wolkowicz, 2012). $H=\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ Hermityen pozitif yarı tanımlı matris olsun. Eğer K bloğu da hermityen ise,

$$\lambda(H) \prec \lambda\big((M+N)\oplus 0\big) \tag{2.6}$$

majorizasyon eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.8.2.1 (Lin ve Wolkowicz, 2012). Eğer $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ Hermityen matrisler ise,

$$2\lambda(A) \prec \lambda(A+B) + \lambda(A-B)$$

dır. Bu lemma Ky Fan'nın (1949) bilinen özdeğer eşitsizliği'ne denktir, yani

$$\lambda(A+B) \prec \lambda(A) + \lambda(B)$$

dir.

Lemma 2.8.2.2 (Lin ve Wolkowicz, 2012). $m \geq n$ olmak üzere $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ise

$$\lambda(AA^*) \prec \lambda(AA^* \oplus 0)$$

dır.

Teorem 2.8.2.7'de verilen K bloğunun Hermityen olma gerekliliğini Lin ve Wolkowicz (2012) çalışmasında aşağıdaki örnekle açıklanmıştır.

Örnek 2.8.2.1 (Lin ve Wolkowicz, 2012). $M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ve $K=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ olsun. O halde,

$$\lambda\left(\left(M+N\right)\oplus 0\right)=\left(4+\sqrt{2},4-\sqrt{2},0,0\right)$$

$$\lambda\left(\begin{bmatrix}M & K\\ K^* & N\end{bmatrix}\right)=\left(4+\sqrt{5},4-\sqrt{5},0,0\right)$$

Böylece $\lambda\left(\begin{bmatrix}M & K\\ K^* & N\end{bmatrix}\right)=\lambda\left(H\right)\nprec\lambda\left(\left(M+N\right)\oplus 0\right)$ olacaktır. Yani K matrisinin hermityen olması gerekir.

Teorem 2.8.2.7'nin ispatı (Lin ve Wolkowicz, 2012) $H=\begin{pmatrix}M & K\\ K^* & N\end{pmatrix}$ pozitif yarı tanımlı olduğundan $X,Y\in M_{2n,m}\left(\mathbb{C}\right)$ için $P=\begin{bmatrix}X & Y\end{bmatrix}$, $H=P^*P$ yazılabilir. Böylece $M=X^*X$, $N=Y^*Y$ ve K da Hermityen olduğundan $K=X^*Y=Y^*X$ olur. Lemma 2.8.2.2 ile $\lambda\left(\begin{bmatrix}M & K\\ K^* & N\end{bmatrix}\right)=\lambda\left(PP^*\right)$ dir. (2.6) ile gösterilen majorizasyon eşitsizliği

$$\left\{X^*Y=Y^*X\right\}\Rightarrow\lambda\left(\left(X^*X+Y^*Y\right)\oplus 0\right)\succ\lambda\left(X^*X+Y^*Y\right)$$

şeklinde gösterilecektir. İlk olarak,

$$\begin{aligned}\left(X+iY\right)^*\left(X+iY\right)&=X^*X+Y^*Y+i\left(X^*Y-Y^*X\right)\\&=X^*X+Y^*Y\\\left(X-iY\right)^*\left(X-iY\right)&=X^*X+Y^*Y-i\left(X^*Y-Y^*X\right)\\&=X^*X+Y^*Y\\\left(X+iY\right)\left(X+iY\right)^*&=XX^*+YY^*-i\left(XY^*-YX^*\right)\\\left(X-iY\right)\left(X-iY\right)^*&=XX^*+YY+i\left(XY^*-YX^*\right)\end{aligned}$$

dir.

Burada $A = XX^* + YY^*, B = i\left(XY^* - YX^*\right)$ alınıp Lemma 2.8.2.1 ve Lemma 2.8.2.2 de yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}\lambda\left(\left(X^*X + Y^*Y\right)\oplus 0\right) &= \frac{1}{2}\left\{\lambda\left(\left(X+iY\right)^*\left(X+iY\right)\oplus 0\right) + \lambda\left(\left(X-iY\right)^*\left(X-iY\right)\oplus 0\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\lambda\left(\left(X+iY\right)^*\left(X+iY\right)\right) + \lambda\left(\left(X-iY\right)^*\left(X-iY\right)\right)\right\} \\ &\succ \lambda\left(XX^* + YY^*\right)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.8.2.7'nin özel bir durumu aşağıdaki şekildedir,

Sonuç 2.8.2.1 (Lin ve Wolkowicz, 2012). $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, X^*Y Hermityen matris olmak üzere,

$$\lambda\left(XX^* + YY^*\right) \prec \lambda\left(X^*X + Y^*Y\right)$$

dir.

Sonuç 2.8.2.2 (Lin ve Wolkowicz, 2012). $k \geq 1$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Eğer $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ Hermityen ise,

$$\lambda\left(A^2 + (AB)^k (BA)^k\right) \succ \lambda\left(A^2 + (BA)^k (AB)^k\right)$$

dir.

Sonuç 2.8.2.3 (Lin ve Wolkowicz, 2012). $k \geq 1$ olacak şekilde bir tamsayı, $p \in [0, \infty)$ ve $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ Hermityen matris olsun. Bu takdirde halde,

1. $iz\left(\left(A^2 + (AB)^k (BA)^k\right)^p\right) \geq iz\left(\left(A^2 + (BA)^k (AB)^k\right)^p\right)$, $p \geq 1$
2. $iz\left(\left(A^2 + (AB)^k (BA)^k\right)^p\right) \leq iz\left(\left(A^2 + (BA)^k (AB)^k\right)^p\right)$, $0 \leq p \leq 1$

dir.

Gerçekten $p \geq 1$ için $f(x) = x^p$ konveks $0 \leq p \leq 1$ için konkav olan fonksiyondan dolayı genelliği bozmaksızın Sonuç 2.8.2.2'yi Sonuç 2.8.2.3 takip ederse sonuç görülür (Lin ve Wolkowicz, 2012).

Sonuç olarak özetlersek, M *ve* N'nin ikisi de n-kare matrisler iken, $H = \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ matrisi Hermityen matris olmak üzere,

$$\lambda(M \oplus N) \prec \lambda(H) \tag{2.7}$$

olduğu Ky Fan (bknz, sayfa 330, Marshall ve ark., 2011) tarafından verilen bir teorem ile gösterilmiştir.

Daha sonra Rotfel'd ve Thompson (bknz, sayfa 330, Marshall ve ark., 2011) tarafından n-kare pozitif yarı tanımlı M ve N matrisleri için,

$$\lambda(M \oplus N) \prec (\lambda(M + N), 0) \tag{2.8}$$

olduğu gösterilmiştir.

Genel olarak (2.7) ve (2.8) in sağ tarafları karşılaştırılamaz. Ancak Lin ve Wolkowicz (2012) çalışmasında H nin pozitif yarı tanımlı ve K nın Hermityen olması durumunda,

$$\lambda(H) \prec (\lambda(M + N), 0)$$

olduğunu göstermişlerdir.

Daha sonraları Türkmen ve ark. (2012) çalışmasında herhangi bloklara ayrılmış pozitif yarı tanımlı $H = \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ matrisi için ve K Hermityen veya Ters-Hermityen matris olması durumunda,

$$diag(H) \prec \lambda(M \oplus N) \prec \lambda(H) \prec \lambda((M + N) \oplus 0)$$

olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 2.8.2.8 (Türkmen ve ark., 2012). X ve Y n-kare kompleks matrisler iken $X^{*}Y$ Hermityen veya Ters-Hermityen olsun. Bu takdirde

$$\lambda\left(XX^{*}+YY^{*}\right)\prec\lambda\left(X^{*}X+Y^{*}Y\right)$$

dir.

Teorem 2.8.2.9 (Furuichi ve Lin, 2010). S ve T'nin ikisi de n-kare pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. O halde,

$$\lambda\left(T^{2}+ST^{2}S\right)\prec\lambda\left(T^{2}+TS^{2}T\right)$$

dir.

Teorem 2.8.2.10 (Türkmen ve ark., 2012). M ve N'nin ikisi de n-kare matrisler iken, $H=\begin{pmatrix} M & K \\ K^{*} & N \end{pmatrix}$ matrisi pozitif yarı tanımlı matris olsun. Eğer K Hermityen veya Ters-Hermityen ise,

$$\lambda\left(H\right)\prec\left(\lambda\left(M+N\right),0\right) \tag{2.9}$$

dir.

İspat (Türkmen ve ark., 2012) $H=\begin{bmatrix} X^{*} \\ Y^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X^{*}X & X^{*}Y \\ Y^{*}X & Y^{*}Y \end{bmatrix}$ olsun. Teorem 2.8.2.8'de $M=X^{*}X,\ K=X^{*}Y\ \ ve\ \ N=Y^{*}Y$ alınırsa (2.9) majorizasyon eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

2.8.3. Leibian Fonksiyonları için Bazı Majorizasyon Eşitsizlikleri

Şimdi pozitif yarı tanımlı blok matrisleri kullanarak eşitsizlikler türetmemizi sağlayan Leibian fonksiyonlarını tanıyalım.

Tanım 2.8.3.1 (Zhang, 2005). Matrisler üzerinde tanımlı sürekli kompleks-değerli bir fonksiyon olan L fonksiyonu $A \geq 0$ iken pozitifse yani $L(A) \geq 0$ ise bu fonksiyon Leibian fonksiyonu olarak adlandırılır ve ayrıca L fonksiyonu Leibian fonksiyon ve M, K ve N n-kare kompleks matrisler ise

$$\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |L(K)|^2 \leq L(M)L(N) \tag{2.10}$$

dir. Bu takdirde herhangi bir $A \geq 0$ matrisi için

- $tr(A)$;
- $\det(A)$;
- $s_{\max}(A)$ spektral norm;
- $\|A\|$ üniter invaryant matris normu;
- ilk k tane en büyük özdeğerin mutlak değerlerinin çarpımı $\prod_{i=1}^{k} |\lambda_i(A)|$;
- ilk k tane en büyük singülerin çarpımı $\prod_{i=1}^{k} s_i(A)$.

fonksiyonlarının her biri Leibian fonksiyonuna birer örnektir (Zhang, 2005).

Örnek 2.8.3.1 (Zhang, 2005). $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B \end{pmatrix} \geq 0$ matrisi pozitif yarı tanımlı matris olduğundan

$$|L(A^*B)|^2 \leq L(A^*A)L(B^*B)$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak L fonksiyonu herhangi bir üniter invaryant matris normu $\|.\|$ alınırsa

$$\|A^*B\|^2 \leq \|A^*A\|\|B^*B\|$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 2.8.3.2 (Zhang, 2005). $A,B\geq 0$ olmak üzere herhangi $z\in\mathbb{C}$ için $\begin{pmatrix} A+|z|B & A+zB \\ A+\bar{z}B & A+|z|B \end{pmatrix}\geq 0$ olduğunu biliyoruz. (2,10) ifadesinden

$$\left|L\left(A+zB\right)\right|^2\leq L\left(A+|z|B\right)L\left(A+\bar{z}B\right)$$

olur. Burada yine L fonksiyonu özel olarak $\|.\|$ şeklinde herhangi bir üniter invaryant matris normu alınırsa

$$\|A+zB\|^2\leq\|A+|z|B\|\,\|A+\bar{z}B\|$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 2.8.3.3 (Zhang, 2005). A herhangi matris olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A & A \\ A^* & I \end{pmatrix}\geq 0$$

dir. Buradan her k değeri için

$$\prod_{i=1}^{k}\left|\lambda_i\left(A\right)\right|^2\leq\prod_{i=1}^{k}\left|\lambda_i\left(AA^*\right)\right|$$

dir. Yani,

$$\prod_{i=1}^{k}\left|\lambda_i\left(A\right)\right|\leq\prod_{i=1}^{k}s_i\left(A\right)$$

elde edilir ki, bu eşitsizlik logaritmik majorizasyon tanımı olup

$$\left|\lambda\left(A\right)\right|\prec_{w\log}s\left(A\right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 2.8.3.4 (Zhang, 2005). A ve B aynı mertebeden herhangi iki matris olmak üzere

$$\begin{pmatrix} AA^* & A \\ A^* & I \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} I & B \\ B^* & B^*B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(AA^*\right) \circ I & A \circ B \\ \left(A \circ B\right)^* & I \circ \left(B^*B\right) \end{pmatrix} \geq 0$$

dir. Herhangi H hermityen matris ve $\|.\|$ üniter invaryant matris normu için $\|H \circ I\| \leq \|H\|$ olduğundan Hadamard çarpımlar için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\|A \circ B\|^2 \leq \left\|\left(AA^*\right) \circ I\right\| \left\|\left(B^*B\right) \circ I\right\| \leq \left\|AA^*\right\| \left\|BB^*\right\|$$

ve

$$\prod_{i=1}^{k} s_i^2 \left(A \circ B\right) \leq \prod_{i=1}^{k} s_i \left(AA^* \circ I\right) \prod_{i=1}^{k} s_i \left(I \circ BB^*\right)$$

olur ki bu da

$$s^2 \left(A \circ B\right) \prec \lambda \left(AA^* \circ I\right) \circ \lambda \left(I \circ B^*B\right)$$

majorizasyon eşitsizliğini gerektirir.

3. MAJORİZASYON İÇİN TEMEL SONUÇLAR

Çalışmamızın bu bölümünde majorizasyon teorisi yardımıyla matrislerin singüler ve özdeğerleri için elde ettiğimiz yeni teoriler ve eşitsizlikler verilmiştir.

3.1. Pozitif Tanımlı Matrislerin Direkt Toplamları için Majorizasyon tipi Singüler Değer Eşitsizlikleri

Bu alt bölümde, majorizasyon yardımıyla matrislerin direkt toplamları için Heinz ortalaması, singüler değer, üniter invaryant matris normu ve özdeğerler eşitsizlikleri verilmiştir. Ayrıca 2×2 tipindeki blok matrislerin majorizasyon tipi singüler değer eşitsizlikleri de verilmiştir. Sonuçlarımızı vermeden önce ilk olarak Heinz ortalaması ve iki matrisin direkt toplamı kavramlarını açıklayalım ve bunlar için üretilen eşitsizliklerden bahsedelim.

Heinz Ortalaması, $0\leq v\leq 1$ ve $a,b>0$ olmak üzere

$$H_v\left(a,b\right)=\frac{a^v b^{1-v}+a^{1-v}b^v}{2}$$

şeklinde tanımlanır ve Heinz ortalaması aritmetik ortalama ve geometrik ortalamanın arasında kalır. Yani

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a^v b^{1-v}+a^{1-v}b^v}{2}\leq\frac{a+b}{2} \tag{3.1}$$

dir. (Bhatia ve Davis, 1993) çalışmasında (3.1) eşitsizliğinin pozitif yarıtanımlı matrisler için de doğru olduğunu göstermiş ve (3.1) eşitsizliğini $\|.\|$ üniter invaryant matris normu yardımıyla

$$\left\|A^{1/2}B^{1/2}\right\|\leq\left\|\frac{A^v B^{1-v}+A^{1-v}B^v}{2}\right\|\leq\left\|\frac{A+B}{2}\right\|$$

şeklinde matris formuna genişletmişlerdir.

Ayrıca (Ando,1995) çalışmasında Young eşitsizliğini $A,B \geq 0$ ve $0 \leq \nu \leq 1$ için matris formuna

$$s_j\left(A^{\nu}B^{1-\nu}\right) \leq s_j\left(\nu A + (1-\nu)B\right),\ 0 \leq j \leq 1 \tag{3.2}$$

eşitsizliği ile genişletmiştir.

Audenaert (2007) çalışmasında Zhan'ın (2002) çalışmasında konjektür olarak bırakılan

$$s_j\left(\frac{A^{\nu}B^{1-\nu} + A^{1-\nu}B^{\nu}}{2}\right) \leq s_j\left(\frac{A+B}{2}\right),\ 0 \leq \nu \leq 1 \tag{3.3}$$

eşitsizliğini ispatladıktan sonra Xu ve He (2013), $0 \leq \nu \leq 1$ ve $k = 1,2,...,n$ olmak üzere pozitif tanımlı A ve B matrisleri için

$$\prod_{j=1}^{k}\left|\lambda_j\left[A\left(\frac{A^{\nu}B^{1-\nu} + A^{1-\nu}B^{\nu}}{2}\right)B\right]\right| \leq \prod_{j=1}^{k} s_j\left(\frac{A+B}{2}\right)^3 \tag{3.4}$$

eşitsizliğini göstermişlerdir.

Heinz ortalamaları ve Young eşitsizliği için var olan matris eşitsizliklerini inceledikten sonra iki matrisin direkt toplamını tanımlayalım. $A,B \in M_n$ matrislerinin direkt toplamı M_{2n} üzerinde köşegen blok matristir ve $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanır.

Zhan (2000) çalışmasında iki matrisin direkt toplamı ile pozitif tanımlı A ve B matrisleri için

$$s_j\left(A-B\right) \leq s_j\left(A \oplus B\right) \tag{3.5}$$

şeklinde yeni bir singüler değer eşitsizliği vermiştir ve (3.5) eşitsizliği ile Zhan (2000) iki matrisin farkının singüler değerlerini bu matrislerin direkt toplamlarının singüler değerleri ile üstten sınırlamıştır. Ayrıca Zhan (2004) herhangi H hermityen matrisi için

$$s_j\left(H\right) = \lambda_j\left(H \oplus -H\right),\quad 1 \leq j \leq n \tag{3.6}$$

eşitliğinden hareketle matrislerin direkt toplamının özdeğerleri ile matrisin singüler değeri arasında bir bağlantı elde etmiştir. Bu gelişmeden sonra Bhatia ve Kittaneh (2008) çalışmasında X ve Y hermityen matrisler olmak üzere her $\|.\|$ üniter invaryant matris normu için

$$\pm Y \leq X \;\Rightarrow\; \|Y\| \leq \|X\|$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermişlerdir.

Heinz ortalaması ve direkt toplam için literatürde var olan teoriler ışığında majorizasyon yardımıyla elde ettiğimiz singüler değer eşitsizliklerini vermeden önce sonuçlarımızda etkin olarak kullandığımız tanım ve lemmaları verelim.

3.1.1. Lemmalar

Bu alt bölümde, sonuçlarımızın ispatında kullanacağımız bazı yardımcı lemmaları vereceğiz.

Lemma 3.1.1.1 (Bhatia ve Kittaneh, 2008). X ve Y Hermityen matrisler olmak üzere

$$\pm Y \leq X \;\Rightarrow\; s_j(Y) \leq s_j(X \oplus X), \qquad 1 \leq j \leq n$$

dir.

Lemma 3.1.1.2 (Türkmen ve ark., 2012). $A, B \in M_n$ hermityen matrisler olmak üzere

$$s\left(A \oplus A\right) \prec_w s\left(\left(A+B\right) \oplus \left(A-B\right)\right)$$

dir.

Lemma 3.1.1.3 (Tao, 2006). $A, B \in M_n$ matrisleri pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere,

$$s_j(A+B) \leq s_j\left(\left(A + \left|B^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}\right|\right) \oplus \left(B + \left|A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}\right|\right)\right), \qquad 1 \leq j \leq n \,.$$

dir.

Tanım 3.1.1.1 (Kontraksiyon (Daralma) matris - Zhang, 2011). Herhangi bir $C \in M_n$ matrisi için $s_{\max}(C) = s_1(C) \leq 1$ şartı sağlanıyorsa C matrisine kontraksiyon matris denir. Bu tanıma denk olarak $C^*C \leq I$ veya $\begin{pmatrix} I & C \\ C^* & I \end{pmatrix} \geq 0$ şartları sağlanıyorsa yine C matrisi kontraksiyon matristir.

Lemma 3.1.1.4 (Horn ve Johnson, 1991, s. 208). $M, N \geq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ blok matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart $K = M^{\frac{1}{2}} W N^{\frac{1}{2}}$ olacak şekilde bir W kontraksiyon matrisinin bulunmasıdır. Buna ek olarak bu pozitif yarı tanımlı blok matrisi için,

$$s(K) \prec_{w\log} s\left(M^{\frac{1}{2}}\right) s\left(N^{\frac{1}{2}}\right)$$

majorizasyon eşitsizliği de vardır.

Lemma 3.1.1.5 (Bhatia ve Kittaneh, 2008). A ve B matrisleri pozitif yarı tanımlı matrisler ve $\|.\|$ normu M_n üzerinde tanımlı üniter invaryant matris normu olmak üzere,

$$\|A \oplus B\| \leq \|(A+B) \oplus 0\|$$

dir.

Lemma 3.1.1.6 (Bapat, 1987). X_{11} ve X_{12} n-kare matrisler olmak üzere $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ ise

$$s(X_{12}) \prec_w \frac{1}{2}\{\lambda(X_{11}) + \lambda(X_{22})\}$$

dir.

Lemma 3.1.1.7 (Türkmen ve ark., 2012). $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için

$$x \prec y \Rightarrow e^x \prec_{\log} e^y$$

dir.

Bu teorilere ek olarak aşağıdaki Golden-Thompson Eşitsizliği, (Golden, 1965), (Symanzik, 1965) ve (Thompson, 1965) çalışmalarında bağımsız bir şekilde ispatlanmıştır.

Lemma 3.1.1.8 (Golden-Thompson Eşitsizliği). A ve B Hermityen matrisler olmak üzere,

$$tr\left(e^{A+B}\right) \leq tr\left(e^A e^B\right)$$

ve bunu majorizasyon eşitsizliği formunda yazacak olursak

$$\lambda\left(e^{A+B}\right) \prec \lambda\left(e^A e^B\right)$$

dir.

Lemma 3.1.1.9 (Tao, 2006) $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ blok matrisi herhangi bir pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere $M \in M_m$, $N \in M_n$, $r \equiv \min\{m, n\}$ için

$$s_j\left(K\right) \leq \frac{1}{2}\lambda_j\left(\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}\right), \quad 1 \leq j \leq r$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 3.1.1.10 (Zhang, 2011, s. 327 - Türkmen ve ark., 2012, s. 1306). $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için

$x \leq y$ (bileşen bileşen) $\Rightarrow$ $x \prec_w y$

dir.

3.1.2. Matrislerin Direkt Toplamları için Majorizasyon Eşitsizlikleri

Bu alt bölümde, (3.1.1) alt bölümünde yer alan lemmalar ve tanımlar kullanılarak matrislerin direkt toplamları ve Heinz ortalaması için majorizasyon tipi matris eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bu alt bölümde yer alan sonuçlar tarafımızca ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.2.1 $A, B \geq 0$ matrisler ve C matrisi kontraksiyon matris olmak üzere $j = 1, 2, ..., n$ için

$$s\left(B^{\frac{1}{2}}C^{*}A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right) \prec_{w} 2s\left(\left(A + \left|B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right|\right) \oplus \left(B + \left|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right|\right)\right)$$

dir.

İspat. $A, B \geq 0$ olsun. Herhangi C kontraksiyon matris için

$$\begin{pmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}C^{*}A^{\frac{1}{2}} & B \end{pmatrix} \geq 0$$

olduğu (Zhang, 2001, s. 8) çalışmasından bilindiğinden bu matrise Teorem 2.8.2.6 deki (2.4) eşitsizliği uygulanırsa,

$$A * B \geq \pm\left(B^{\frac{1}{2}}C^{*}A^{\frac{1}{2}} * A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right)$$

elde edilir. Burada Lemma 3.1.1.1 kullanılarak,

$$s_{j}\left(B^{\frac{1}{2}}C^{*}A^{\frac{1}{2}} * A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right) \leq s_{j}\left(\left(A * B\right) \oplus \left(A * B\right)\right)$$

singüler değer eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.1.1.10 de verildiği gibi $x \leq y$ (bileşen bileşen) $\Rightarrow x \prec_{w} y$ olduğu bilindiğinden son eşitsizlik

$$s_j\left(B^{\frac{1}{2}}C^*A^{\frac{1}{2}} * A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right) \prec_w s_j\left(\left(A*B\right)\oplus\left(A*B\right)\right)$$

olacaktır. Burada $*$ ın yerine $+$ alınırsa ve bu eşitsizliğe sırasıyla Lemma 3.1.1.2 ve Fan dominance prensibi yardımıyla Lemma 3.1.1.5 uygulanırsa, $D \in M_n$ hermityen matrisi için

$$\begin{aligned} s\left(B^{\frac{1}{2}}C^*A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right) &\prec_w s\left(\left(A+B\right)\oplus\left(A+B\right)\right) \\ &\prec_w s\left(\left(A+B+D\right)\oplus\left(A+B-D\right)\right) \\ &\prec_w 2s\left(\left(A+B\right)\oplus 0\right) \\ &\prec_w 2s\left(A+B\right) \end{aligned}$$

olur. Buna ek olarak Lemma 3.1.1.10 de verildiği gibi $x \le y$ (bileşen bileşen) $\Rightarrow x \prec_w y$ ifadesi yardımıyla Lemma 3.1.1.3 uygulanırsa

$$s\left(B^{\frac{1}{2}}C^*A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right) \prec_w 2s\left(\left(A+\left|B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right|\right)\oplus\left(B+\left|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right|\right)\right)$$

olur ki, istenen elde edilir.

Teorem 3.1.2.2 $A \ge 0$ matris ve B hermityen matris olmak üzere $j = 1,2,...,n$ için

$$s_j\left(BA+AB\right) \le s_j\left(\left(A+BAB\right)\oplus\left(A+BAB\right)\right)$$

dir.

İspat. $A \ge 0$ olsun. Herhangi bir B matrisi için $\begin{pmatrix} A & AB \\ B^*A & B^*AB \end{pmatrix} \ge 0$ olduğu (Zhang, 2001, s. 10) çalışmasından bilindiğinden Teorem 2.8.2.6 deki (2.4) eşitsizliği bu matrise uygulanırsa,

$$A * B^*AB \ge \pm\left(B^*A * AB\right)$$

elde edilir. Burada Lemma 3.1.1.1 kullanılarak,

$$s_j\left(B^*A * AB\right) \le s_j\left(\left(A * B^*AB\right)\oplus\left(A * B^*AB\right)\right)$$

singüler değer eşitsizliği elde edilir ve $*$ nın yerine $+$ alınırsa ve B matrisi hermityen matris olduğundan,

$$s_j\left(BA+AB\right)\le s_j\left(\left(A+BAB\right)\oplus\left(A+BAB\right)\right)$$

olur.

Sonuç 3.1.2.1 Lemma 3.1.1.10 de verildiği gibi $x\le y$ (bileşen bileşen) $\Rightarrow x\prec_w y$ olduğu bilinmektedir ve bu özellik Teorem 3.1.2.2 de uygulanırsa

$$s\left(BA+AB\right)\prec_w s\left(\left(A+BAB\right)\oplus\left(A+BAB\right)\right)$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.2.3 $A,B\ge 0$ matrisler olmak üzere $j=1,2,...,n$ için eğer $0\le v\le 1$ ise

$$2s_j\left(A\oplus B\right)\le s_j\left(\left(A^{2v}+A^{2-2v}\right)\oplus\left(B^{2v}+B^{2-2v}\right)\right)$$

dir.

İspat. $M=\begin{bmatrix}A^v & 0\\ 0 & B^v\end{bmatrix}$ ve $N=\begin{bmatrix}0 & A^{1-v}\\ B^{1-v} & 0\end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$M^*N=\begin{bmatrix}A^v & 0\\ 0 & B^v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & A^{1-v}\\ B^{1-v} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}$$

olur. $\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$ matrisleri üniter olarak denk olduğundan $s\left(\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}\right)=s\left(\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\right)=s\left(A\oplus B\right)$ dir. Buna ek olarak,

$$MM^*=\begin{bmatrix}A^v & 0\\ 0 & B^v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^v & 0\\ 0 & B^v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{2v} & 0\\ 0 & B^{2v}\end{bmatrix}$$

$$NN^*=\begin{bmatrix}0 & A^{1-v}\\ B^{1-v} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & B^{1-v}\\ A^{1-v} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{2-2v} & 0\\ 0 & B^{2-2v}\end{bmatrix}$$

$$MM^*+NN^*=\begin{bmatrix}A^{2v} & 0\\ 0 & B^{2v}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A^{2-2v} & 0\\ 0 & B^{2-2v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{2v}+A^{2-2v} & 0\\ 0 & B^{2v}+B^{2-2v}\end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir ve $2s_j\left(M^*N\right)\le s_j\left(MM^*+NN^*\right)$ eşitsizliği kullanılarak,

$$2s_j\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right)\le s_j\left(\begin{bmatrix} A^{2v}+A^{2-2v} & 0 \\ 0 & B^{2v}+B^{2-2v} \end{bmatrix}\right)$$

olur ve

$$2s_j\left(A\oplus B\right)\le s_j\left(\left(A^{2v}+A^{2-2v}\right)\oplus\left(B^{2v}+B^{2-2v}\right)\right)$$

elde edilir ki, istenendir. Ayrıca Lemma 3.1.1.10 de verildiği gibi $x\le y$ (bileşen bileşen) $\Rightarrow x\prec_w y$ olduğu bilinmektedir ve bu özellik Teorem 3.1.2.3 de uygulanırsa

$$2s\left(A\oplus B\right)\prec_w s\left(\left(A^{2v}+A^{2-2v}\right)\oplus\left(B^{2v}+B^{2-2v}\right)\right)$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.2.4 A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere $j=1,2,...,n$ için $0\le v\le 1$ ise

$$s_j\left(A^vB^{1-v}+B^{1-v}A^v\right)\le s_j\left(\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\oplus\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\right)$$

dir.

İspat. $XX^*=\begin{bmatrix} A^v \\ B^{1-v} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^v & B^{1-v} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{2v} & A^vB^{1-v} \\ B^{1-v}A^v & B^{2-2v} \end{bmatrix}\ge 0$ dir. Teorem 2.8.2.6 daki (2.4) eşitsizliği kullanılarak $\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\ge\pm\left(A^vB^{1-v}+B^{1-v}A^v\right)$ eşitsizliği elde edilir. X ve Y hermityen matrisleri $\pm Y\le X$ iken $Y\oplus\left(-Y\right)\le X\oplus X$ olduğundan ve bu özellikte $Y=A^vB^{1-v}+B^{1-v}A^v$ ve $X=A^{2v}+B^{2-2v}$ alınırsa

$$\left(A^vB^{1-v}+B^{1-v}A^v\right)\oplus\left(-\left(A^vB^{1-v}+B^{1-v}A^v\right)\right)\le\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\oplus\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)$$

olur. (3.6) eşitliği ve Weyl'nin monotonluk prensibi birleştirilirse $1\le j\le n$ için

$$\begin{aligned} s_j\left(A^vB^{1-v}+B^{1-v}A^v\right) &\le \lambda_j\left(\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\oplus\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\right) \\ &= s_j\left(\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\oplus\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir ki, istenendir.

Sonuç 3.1.2.2 Teorem 3.1.2.4 de eğer $\nu = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$s_j\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right) \le s_j\left(\left(A+B\right)\oplus\left(A+B\right)\right)$$

olacaktır ve buna ek olarak eğer A nın yerine A^2 alınırsa

$$s_j\left(AB+BA\right) \le s_j\left(\left(A^2+B^2\right)\oplus\left(A^2+B^2\right)\right)$$

elde edilir ki, bu eşitsizlik (Bhatia ve Kittaneh, 2008) çalışmasında Bhatia ve Kittaneh tarafından ispatlanmıştır.

Sonuç 3.1.2.3 Lemma 3.1.1.10 de verildiği gibi $x \le y$ (bileşen bileşen) $\Rightarrow x \prec_w y$ olduğu bilinmektedir ve bu özellik Teorem 3.1.2.4 de uygulanırsa

$$s\left(A^{\nu}B^{1-\nu} + B^{1-\nu}A^{\nu}\right) \prec_w s\left(\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\oplus\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\right)$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.2.4 $f\left(x\right) = x^r, r > 1$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde artan ve konveks olduğundan Teorem 2.6.2 kullanılarak

$$s^r\left(A^{\nu}B^{1-\nu} + B^{1-\nu}A^{\nu}\right) \prec_w s^r\left(\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\oplus\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca Fan dominance prensibi sayesinde, son eşitsizlik

$$\left|\left|\left|A^{\nu}B^{1-\nu} + B^{1-\nu}A^{\nu}\right|\right|\right|^r \le \left|\left|\left|\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\oplus\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\right|\right|\right|^r$$

üniter invaryant matris normu eşitsizliğine denktir.

Sonuç 3.1.2.5 Bilindiği gibi

$$XX^* = \begin{bmatrix} A^{\nu} & A^{1-\nu} \\ B^{1-\nu} & B^{\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{\nu} & B^{1-\nu} \\ A^{1-\nu} & B^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{2\nu}+A^{2-2\nu} & A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu} \\ B^{1-\nu}A^{\nu}+B^{\nu}A^{1-\nu} & B^{2\nu}+B^{2-2\nu} \end{bmatrix} \ge 0,$$

matrisi pozitif yarı tanımlıdır. Teorem 2.8.2.6 daki (2.4) eşitsizliği kullanılarak

$$\left(A^{2v}+A^{2-2v}\right)\pm\left(A^{v}B^{1-v}+A^{1-v}B^{v}+B^{1-v}A^{v}+B^{v}A^{1-v}\right)+B^{2v}+B^{2-2v}\geq 0$$

elde edilir. Yani

$$\left(A^{2v}+A^{2-2v}\right)+\left(B^{2v}+B^{2-2v}\right)\geq\pm\left(A^{v}B^{1-v}+A^{1-v}B^{v}+B^{1-v}A^{v}+B^{v}A^{1-v}\right).$$

dir. $P=A^{v}B^{1-v}+A^{1-v}B^{v}$ ve $P^{*}=B^{1-v}A^{v}+B^{v}A^{1-v}$ olmak üzere Lemma 3.1.1.1 kullanılarak

$$s_j\left(P+P^{*}\right)\leq s_j\left(\left(A^{2v}+A^{2-2v}+B^{2v}+B^{2-2v}\right)\oplus\left(A^{2v}+A^{2-2v}+B^{2v}+B^{2-2v}\right)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca Lemma 3.1.1.10 de verildiği gibi $x\leq y$ (bileşen bileşen) $\Rightarrow x\prec_w y$ olduğu bilinmektedir ve bu özellik Teorem 3.1.2.3 de uygulanırsa $1\leq j\leq n$ için

$$s\left(P+P^{*}\right)\prec_w s\left(\left(A^{2v}+A^{2-2v}+B^{2v}+B^{2-2v}\right)\oplus\left(A^{2v}+A^{2-2v}+B^{2v}+B^{2-2v}\right)\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2.5 $A,B\geq 0$ matrisler olmak üzere $0\leq v\leq 1$ ve r pozitif tamsayı ise $j=1,2,...,n$ için

$$2s_j\left(A^{v}\left(A^{2v}+B^{2v-2}\right)^{r}B^{1-v}\right)\leq s_j\left(A^{2v}+B^{2v-2}\right)^{r+1}$$

dir.

İspat. Herhangi bir X matrisi için $X=UP$ Polar ayrışımını kullanarak $\left(XX^{*}\right)^{r+1}=X\left(X^{*}X\right)^{r}X^{*}$ olduğu aşikardır. Burada $X=\begin{bmatrix}A^{v} & 0\\ B^{1-v} & 0\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left(XX^*\right)^{r+1} &= X\left(X^*X\right)^r X^* \\
&= \begin{bmatrix} A^v & 0 \\ B^{1-v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^v & B^{1-v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^v\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)^r A^v & A^v\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)^r B^{1-v} \\ B^{1-v}\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)^r A^v & B^{1-v}\left(A^{2v}+B^{2-2v}\right)^r B^{1-v} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dır. $\left(XX^*\right)^{r+1}$ ile $\left(X^*X\right)^r$ matrisleri üniter olarak denk olduklarından singüler değerleri birbirine eşittir ve ayrıca Lemma 3.1.1.9 kullanılarak ve $1 \le j \le n$ için

$$
2s_j\left(A^v\left(A^{2v}+B^{2v-2}\right)^r B^{1-v}\right) \le s_j\left(XX^*\right)^{r+1} = s_j\left(X^*X\right)^r = s_j\left(A^{2v}+B^{2v-2}\right)^{r+1}
$$

elde edilir ki istenendir.

Sonuç 3.1.2.6 Teorem 3.1.2.5 de eğer $v = \frac{1}{2}$ ise $1 \le j \le n$ için

$$
2s_j\left(A^{1/2}\left(A+B\right)^r B^{1/2}\right) \le s_j\left(A+B\right)^{r+1}
$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu eşitsizlik Bhatia ve Kittaneh tarafından (Bhatia ve Kittaneh 2008) çalışmasında ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.2.6 $A, B \ge 0$ matrisler olmak üzere $0 \le v \le 1$ ise

$$
s\left(A^v B^{1-v} + A^{1-v}B^v\right) \prec_{w\log} s\left(\left(A^{2v}+A^{2-2v}\right)^{1/2}\right) s\left(\left(B^{2v}+B^{2-2v}\right)^{1/2}\right)
$$

dir.

İspat. $X = \begin{bmatrix} A^v & A^{1-v} \\ B^{1-v} & B^v \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$
XX^* = \begin{bmatrix} A^{2v}+A^{2-2v} & A^v B^{1-v} + A^{1-v}B^v \\ B^{1-v}A^v + B^v A^{1-v} & B^{2v}+B^{2-2v} \end{bmatrix} \ge 0,
$$

matrisi pozitif yarı tanımlıdır. Bu matrise Lemma 3.1.1.4 uygulanırsa W matrisi kontraksiyon matris olmak üzere

$$
A^v B^{1-v} + A^{1-v}B^v = \left(A^{2v}+A^{2-2v}\right)^{1/2} W \left(B^{2v}+B^{2-2v}\right)^{1/2}
$$

elde edilir ve buradan yine Lemma 1.3.4 den,

$$s\left(A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu}\right)\prec_{w\log} s\left(\left(A^{2\nu}+A^{2-2\nu}\right)^{1/2}\right)s\left(\left(B^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)^{1/2}\right)$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.2.7 Zayıf logaritmik majorizasyon zayıf majorizasyonu gerektirdiğinden

$$s\left(A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu}\right)\prec_{w} s\left(\left(A^{2\nu}+A^{2-2\nu}\right)^{1/2}\right)s\left(\left(B^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)^{1/2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca Fan dominance prensibi sayesinde, son eşitsizlik

$$\left\|A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu}\right\|\leq\left\|\left(A^{2\nu}+A^{2-2\nu}\right)^{1/2}\right\|\left\|\left(B^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)^{1/2}\right\|$$

üniter invaryant matris normu eşitsizliğine denktir.

Teorem 3.1.2.7 A ve B matrisleri n-kare matrisler olmak üzere eğer $0\leq\nu\leq1$ ise

$$s\left(A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu}\right)\prec_{w}\frac{1}{2}\left\{\lambda\left(A^{2\nu}+A^{2-2\nu}\right)+\lambda\left(B^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\right\},$$

ve ayrıca

$$s\left(A+B\right)\prec_{w}\frac{1}{2}\left\{\lambda\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)+\lambda\left(A^{2-2\nu}+B^{2\nu}\right)\right\}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. $X=\begin{bmatrix}A^{\nu} & A^{1-\nu}\\ B^{1-\nu} & B^{\nu}\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$XX^{*}=\begin{bmatrix}A^{\nu} & A^{1-\nu}\\ B^{1-\nu} & B^{\nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{\nu} & B^{1-\nu}\\ A^{1-\nu} & B^{\nu}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{2\nu}+A^{2-2\nu} & A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu}\\ B^{1-\nu}A^{\nu}+B^{\nu}A^{1-\nu} & B^{2\nu}+B^{2-2\nu}\end{bmatrix}\geq0$$

dir ve Lemma 3.1.1.6 ile,

$$s\left(A^{\nu}B^{1-\nu}+A^{1-\nu}B^{\nu}\right)\prec_{w}\frac{1}{2}\left\{\lambda\left(A^{2\nu}+A^{2-2\nu}\right)+\lambda\left(B^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)\right\}\tag{3.7}$$

olur ve aynı şekilde,

$$X^*X = \begin{bmatrix} A^\nu & B^{1-\nu} \\ A^{1-\nu} & B^\nu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^\nu & A^{1-\nu} \\ B^{1-\nu} & B^\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{2\nu}+B^{2-2\nu} & A+B \\ A+B & A^{2-2\nu}+B^{2\nu} \end{bmatrix}$$

dir ve Lemma 3.1.1.6 ile,

$$s(A+B) \prec_w \frac{1}{2}\left\{\lambda\left(A^{2\nu}+B^{2-2\nu}\right)+\lambda\left(A^{2-2\nu}+B^{2\nu}\right)\right\} \tag{3.8}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.2.8 Teorem 3.1.2.7 deki (3.7) eşitsizliğinde $\nu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} s(A+B) &\prec_w \frac{1}{2}\left\{\lambda\left(A^2\right)+\lambda\left(B^2\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\lambda^2(A)+\lambda^2(B)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve buna ek olarak (3.7) eşitsizliğinde $\nu = \frac{1}{2}$ ise,

$$2s\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right) \prec_w \left\{\lambda(A)+\lambda(B)\right\}$$

dir. Teorem 3.1.2.7 deki (3.8) eşitsizliğinde $\nu = \frac{1}{2}$ ise,

$$s(A+B) \prec_w \lambda(A+B)$$

dir. Teorem 3.1.2.7 deki (3.8) eşitsizliğinde $\nu = 1$ ise,

$$s(A+B) \prec_w \lambda(A)+\lambda(B)$$

eşitsizlikleri elde edilir ki bunlar var olan eşitsizliklerdir.

Teorem 3.1.2.8 A ve B pozitif tanımlı matrisler olmak üzere her $\nu \in [0,1]$ için

$$\left|\lambda\left(e^{A^\nu+B^{1-\nu}}\right)\right| \prec_w e^{s(\nu A+(1-\nu)B)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Golden-Thompson eşitsizliğinde $A = A^\nu$ ve $B = B^{1-\nu}$ alınırsa bu eşitsizlik $\lambda\left(e^{A^\nu+B^{1-\nu}}\right) \prec \lambda\left(e^{A^\nu}e^{B^{1-\nu}}\right)$ şeklini alır. $\lambda\left(e^A\right) = e^{\lambda(A)}$ ve $f(x) = |x|$ fonksiyonu konveks olduğundan, bu eşitsizliğe sırasıyla Teorem 2.8.1.1, (3.2) eşitsizliği, Lemma 3.1.1.7 ve Lemma 3.1.1.8 uygulanırsa,

$$e^{\left|\lambda\left(A^{v}+B^{1-v}\right)\right|} \prec_{w} e^{\left|\lambda\left(A^{v}B^{1-v}\right)\right|}$$
$$\prec_{w} e^{s\left(A^{v}B^{1-v}\right)}$$
$$\prec_{w} e^{s\left(vA+(1-v)B\right)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|\lambda\left(e^{A^{v}+B^{1-v}}\right)\right| \prec_{w} e^{s\left(vA+(1-v)B\right)}$$

olur ki, istenendir.

Teorem 3.1.2.9 A ve B pozitif tanımlı matrisler olmak üzere her $v \in [0,1]$ için

$$e^{\left|\lambda\left(A^{v}B^{1-v}+A^{1-v}B^{v}\right)\right|} \prec_{w} e^{s\left(vA+(1-v)B\right).s\left((1-v)A+vB\right)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Golden-Thompson eşitsizliğinde $A = A^{v}B^{1-v}$ *and* $B = A^{1-v}B^{v}$ alınırsa bu eşitsizlik $\lambda\left(e^{\left(A^{v}B^{1-v}+A^{1-v}B^{v}\right)}\right) \prec \lambda\left(e^{\left(A^{v}B^{1-v}A^{1-v}B^{v}\right)}\right)$ şeklini alır. $\lambda\left(e^{A}\right) = e^{\lambda(A)}$ ve $f(x) = |x|$ fonksiyonu konveks olduğundan, bu eşitsizliğe sırasıyla Teorem 2.8.1.1, Teorem 2.8.1.6 ve Lemma 3.1.1.7 uygulanırsa,

$$e^{\left|\lambda\left(A^{v}B^{1-v}+A^{1-v}B^{v}\right)\right|} \prec_{w} e^{\left|\lambda\left(A^{v}B^{1-v}A^{1-v}B^{v}\right)\right|}$$
$$\prec_{w} e^{s\left(A^{v}B^{1-v}A^{1-v}B^{v}\right)}$$
$$\prec_{w} e^{s\left(A^{v}B^{1-v}\right)s\left(A^{1-v}B^{v}\right)}$$
$$\prec_{w} e^{s\left(vA+(1-v)B\right).s\left((1-v)A+vB\right)}$$

elde edilir. Buradan,

$$e^{\left|\lambda\left(A^{v}B^{1-v}+A^{1-v}B^{v}\right)\right|} \prec_{w} e^{s\left(vA+(1-v)B\right).s\left((1-v)A+vB\right)}$$

olur ki, istenendir.

3.2. Bazı Majorizasyon Eşitsizlikleri ve S-konveks, Log s-konveks, H-konveks, Log h-konveks ve Geometrik konveks Fonksiyonlar yardımıyla Genellemeler

Bu alt bölümde, s-konveks, log s-konveks, h-konveks, log h-konveks ve geometrik konveks fonksiyonlar yardımıyla bazı majorizasyon eşitsizlikleri verilmiştir. Ayrıca bu konveks fonksiyonlar için bazı genellemeler kurulmuştur.

Bu alt bölümde yer alan sonuçlarımızı vermeden önce ilk olarak, s-konveks, log s-konveks, h-konveks, log h-konveks ve geometrik konveks fonksiyon kavramlarını açıklayalım.

Tanım 3.2.1 (Hua ve ark., 2014, *s*-konveks). Bazı $s\in(0,1]$, $\forall x,y\in I$ ve $v\in[0,1]$ için

$$f\left(vx+(1-v)y\right)\le v^s f(x)+(1-v)^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f:I\subseteq\mathbb{R}_0=[0,\infty)\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonuna s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.2.2 (Zhan, 2002, Log *s*-konveks). Bazı $s\in(0,1]$, $\forall x,y\in I$ ve $v\in[0,1]$ için

$$f\left((1-v)x+vy\right)\le\left[f(x)\right]^{(1-v)^s}\left[f(y)\right]^{v^s}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f:I\subseteq\mathbb{R}_0=[0,\infty)\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonuna log s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.2.3 (Zhan, 2002, *h*-konveks). $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere $\forall x,y\in I$ ve $v\in(0,1)$ için

$$f\left(vx+(1-v)y\right)\le h(v)f(x)+h(1-v)f(y)$$

eşitsizliği geçerli ise negatif olmayan $f:I\subseteq\mathbb{R}\to(0,\infty)$ fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.2.4 (Zhan, 2002, Log *h*-konveks). $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $v \in (0,1)$ için

$$f\left(vx+(1-v)y\right) \leq \left[f(x)\right]^{h(v)} \left[f(y)\right]^{h(1-v)}$$

eşitsizliği geçerli ise negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonuna log *h*-konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.2.5 (Zhang ve ark., 2013, Süper-çarpılabilirlik). h fonksiyonu $J \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in J$ için

$$h(xy) \geq h(x)h(y) \tag{3.9}$$

eşitsizliği geçerli ise bu fonksiyona J aralığında süper-çarpılabilir denir Eğer (3.9) eşitsizliğinin tersi sağlanıyorsa h fonksiyonuna J aralığında alt-çarpılabilir fonksiyon denir.

Tanım 3.2.6 (Zhang ve ark., 2013, geometrik konveks). $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $v \in [0,1]$ için

$$f\left(x^v y^{1-v}\right) \leq \left[f(x)\right]^v \left[f(y)\right]^{1-v}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.2.7 (Zhang ve ark., 2013, *h*-geometrik konveks). $h: [0,1] \to \mathbb{R}_0$ ve $h \neq 0$ olsun. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $x, y \in I$ ve $v \in [0,1]$ için

$$f\left(x^v y^{1-v}\right) \leq \left[f(x)\right]^{h(v)} \left[f(y)\right]^{h(1-v)}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna h-geometrik konveks fonksiyon denir.

Bu özel konveks fonksiyonlar yardımıyla elde ettiğimiz majorizasyon eşizliklerini vermeden önce sonuçlarımızda etkili olarak kullandığımız lemmaları verelim.

3.2.1. Lemmalar

Bu alt bölümde, sonuçlarımızın ispatında kullanacağımız bazı yardımcı lemmaları vereceğiz.

Lemma 3.2.1.1 (Aujla ve Bourin, 2007). A ve B pozitif matrisler olmak üzere

$$\lambda^{\downarrow}\left(\log A+\log B\right)\prec\lambda^{\downarrow}\left(\log\left(A^{1/2}BA^{1/2}\right)\right)$$

dir.

Lemma 3.2.1.2 (Zhang ve ark., 2013). $h:[0,1]\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonu, f log h-konveks fonksiyon ve $\forall x_i\in I,\ i=1,2,...,n$ için $\lambda_i>0$ iken $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ olmak üzere

- ya h, $[0,1]$ aralığı üzerinde alt-çarpılabilir ve $f:I\to(0,1]$ şeklinde tanımlı fonksiyon,
- ya da h, $[0,1]$ aralığı üzerinde süper-çarpılabilir ve $f:I\to[1,\infty)$ şeklinde tanımlı fonksiyon,

ise

$$f\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}\right)\le\prod_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i\right)\right]^{h(\lambda_i)}$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 3.2.1.3 (Fan, 1949). A ve B $n\times n$ hermityen matrisler olmak üzere

$$\lambda\left(A+B\right)\prec\lambda\left(A\right)+\lambda\left(B\right)$$

dir ki bu eşitsizlik Ky Fan'ın bilinen özdeğer eşitsizliğidir.

3.2.2. Özel konveks fonksiyonlar yardımıyla Majorizasyon Eşitsizlikleri

Bu alt bölümde, (3.2.1) alt bölümünde yer alan lemmalar ve (3.2) alt bölümündeki tanımlar kullanılarak *s*-konveks, log *s*-konveks, *h*-konveks, log *h*-konveks ve geometrik konveks fonksiyonlar yardımıyla bazı majorizasyon eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca bu konveks fonksiyonlar için bazı genellemeler verilmiştir. Konveks ve log konveks fonksiyonların pozitif tanımlı ve hermityen matrisler için geçerli olduklarını okuyucu (Aujla ve Silva, 2003) çalışmasında görebilir. Bu alt bölümde yer alan sonuçlar orijinal olup tarafımızdan ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.2.1 A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $f : I \subseteq \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu negatif olmayan log *s*-konveks fonksiyon olmak üzere $\forall \nu \in [0,1]$ için

$$\lambda^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right) \prec_{\log} \lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{\nu^s} f(B)^{(1-\nu)^s}\right)$$

majorizasyon eşitsizliği vardır.

İspat. $\log f(t)$ fonksiyonu, I aralığı üzerinde *s*-konveks olduğundan, Tanım 3.2.1 ve Lemma 3.2.1.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\lambda^{\downarrow}\left(\log f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right) &\prec \lambda^{\downarrow}\left(\nu^s \log f(A)+(1-\nu)^s \log f(B)\right)\\ &= \lambda^{\downarrow}\left(\log f(A)^{\nu^s} + \log f(B)^{(1-\nu)^s}\right)\\ &\prec \lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f(A)^{\nu^s/2} f(B)^{(1-\nu)^s} f(A)^{\nu^s/2}\right]\right)\end{aligned}$$

olur. $\lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{\nu^s/2} f(B)^{(1-\nu)^s} f(A)^{\nu^s/2}\right) = \lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{\nu^s} f(B)^{(1-\nu)^s}\right)$ ve log fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan

$$\sum_{j=1}^{k} \log \lambda_j^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right) \le \sum_{j=1}^{k} \log \lambda_j^{\downarrow}\left(f(A)^{\nu^s} f(B)^{(1-\nu)^s}\right), \qquad 1 \le k \le n$$

elde edilir ki, bu eşitsizlik

$$\prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right) \le \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}\left(f(A)^{\nu^s} f(B)^{(1-\nu)^s}\right), \qquad 1 \le k \le n$$

olmasını gerektirir ve bu da logaritmik majorizasyonun tanımı olduğundan böylece

$$\lambda^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right)\prec_{\log}\lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{\nu^s} f(B)^{(1-\nu)^s}\right),\qquad 0\le\nu\le 1$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.2.2 A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon olsun. $f:I\subseteq\mathbb{R}\to(0,\infty)$ fonksiyonu negatif olmayan log h-konveks fonksiyon olmak üzere tüm $\nu\in[0,1]$ için

$$\lambda^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right)\prec_{\log}\lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{h(\nu)} f(B)^{h(1-\nu)}\right)$$

majorizasyon eşitsizliği vardır.

İspat. $\log f(t)$ fonksiyonu, I aralığı üzerinde h-konveks olduğundan, Tanım 3.2.3 ve Lemma 3.2.1.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\lambda^{\downarrow}\left(\log f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right)&\prec\lambda^{\downarrow}\left(h(\nu)\log f(A)+h(1-\nu)\log f(B)\right)\\&=\lambda^{\downarrow}\left(\log f(A)^{h(\nu)}+\log f(B)^{h(1-\nu)}\right)\\&\prec\lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f(A)^{h(\nu)/2} f(B)^{h(1-\nu)} f(A)^{h(\nu)/2}\right]\right)\end{aligned}$$

olur. $\lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{h(\nu)/2} f(B)^{h(1-\nu)} f(A)^{h(\nu)/2}\right)=\lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{h(\nu)} f(B)^{h(1-\nu)}\right)$ ve log fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan

$$\sum_{j=1}^{k}\log\lambda_j^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right)\le\sum_{j=1}^{k}\log\lambda_j^{\downarrow}\left(f(A)^{h(\nu)} f(B)^{h(1-\nu)}\right),\qquad 1\le k\le n$$

elde edilir ki, bu eşitsizlik

$$\prod_{j=1}^{k}\lambda_j^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right)\le\prod_{j=1}^{k}\lambda_j^{\downarrow}\left(f(A)^{h(\nu)} f(B)^{h(1-\nu)}\right),\qquad 1\le k\le n$$

olmasını gerektirir ki, bu da logaritmik majorizasyonun tanımı olduğundan böylece

$$\lambda^{\downarrow}\left(f\left(\nu A+(1-\nu)B\right)\right)\prec_{\log}\lambda^{\downarrow}\left(f(A)^{h(\nu)} f(B)^{h(1-\nu)}\right),\qquad 0\le\nu\le 1$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.2.1 Teorem 3.2.2.2 de eğer $f(t)=e^t$ ve $h(v)=v$ ise

$$\lambda^{\downarrow}\left(e^{vA+(1-v)B}\right)\prec_{\log}\lambda^{\downarrow}\left(e^{Av}e^{B(1-v)}\right),\qquad 0\le v\le 1$$

ve logaritmik majorizasyon zayıf logaritmik majorizasyonu gerektirdiğinden

$$\lambda^{\downarrow}\left(e^{vA+(1-v)B}\right)\prec_{w\log}\lambda^{\downarrow}\left(e^{Av}e^{B(1-v)}\right),\qquad 0\le v\le 1$$

olur. $x,y\in\mathbb{R}^n$ için $x\prec_{w\log}y\Rightarrow x\prec_w y$ olduğundan

$$\lambda^{\downarrow}\left(e^{vA+(1-v)B}\right)\prec_{w}\lambda^{\downarrow}\left(e^{Av}e^{B(1-v)}\right),\qquad 0\le v\le 1. \tag{3.10}$$

elde edilir. Açıktır ki, Golden-Thompson eşitsizliğinde $A=vA$ ve $B=(1-v)B$ olması durumu (3.10) majorizasyon eşitsizliğini gerektirir.

Teorem 3.2.2.3 $A_i,\ i=1,2,...,m$ ler pozitif tanımlı matrisler ve $h:[0,1]\to\mathbb{R}_0$ şeklinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. f log h-konveks fonksiyon ve $\lambda_i>0$ iken $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ olmak üzere

- ya h $[0,1]$ aralığı üzerinde alt-çarpılabilir ve $f:I\to(0,1]$ şeklinde tanımlı fonksiyon,
- ya da h $[0,1]$ aralığı üzerinde süper-çarpılabilir ve $f:I\to[1,\infty)$ şeklinde tanımlı fonksiyon,

ise

$$\lambda^{\downarrow}\left(f\left(\prod_{i=1}^{m}A_i^{\lambda_i}\right)\right)\prec_{\log}\lambda^{\downarrow}\left(\sum_{i=1}^{m-1}f\left(A_i\right)^{h(v_i)}f\left(A_{i+1}\right)^{h(v_{i+1})}\right),\qquad 0\le v\le 1$$

majorizasyon eşitsizliği vardır.

İspat. $\log f(t)$ fonksiyonu, I aralığı üzerinde geometrik konveks olduğundan, Tanım 3.2.6, Tanım 3.2.7, Lemma 3.2.1.2 ve Lemma 3.2.1.1 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\lambda^{\downarrow}\left(\log f\left(\prod_{i=1}^{m} A_i^{\lambda_i}\right)\right) &\prec \lambda^{\downarrow}\left(\log \prod_{i=1}^{m}\left[f\left(A_i\right)\right]^{h(\lambda_i)}\right) \\
&\prec \lambda^{\downarrow}\left(\sum_{i=1}^{m} h(\lambda_i)\log\left[f\left(A_i\right)\right]\right) \\
&= \lambda^{\downarrow}\left(\sum_{i=1}^{m} \log\left[f\left(A_i\right)\right]^{h(\lambda_i)}\right) \\
&= \lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_1\right)\right]^{h(\lambda_1)} + \log\left[f\left(A_2\right)\right]^{h(\lambda_2)} + \ldots + \log\left[f\left(A_{m-1}\right)\right]^{h(\lambda_{m-1})} + \log\left[f\left(A_m\right)\right]^{h(\lambda_m)}\right)
\end{aligned}
$$

ve Lemma 3.2.1.3 uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_1\right)\right]^{h(\lambda_1)} + \log\left[f\left(A_2\right)\right]^{h(\lambda_2)} + \ldots + \log\left[f\left(A_{m-1}\right)\right]^{h(\lambda_{m-1})} + \log\left[f\left(A_m\right)\right]^{h(\lambda_m)}\right) \\
&\prec \lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_1\right)\right]^{h(\lambda_1)} + \log\left[f\left(A_2\right)\right]^{h(\lambda_2)}\right) + \ldots + \lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_{m-1}\right)\right]^{h(\lambda_{m-1})} + \log\left[f\left(A_m\right)\right]^{h(\lambda_m)}\right)
\end{aligned}
$$

olacaktır ve buna ek olarak Lemma 3.2.1.1 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_1\right)\right]^{h(\lambda_1)} + \log\left[f\left(A_2\right)\right]^{h(\lambda_2)}\right) + \ldots + \lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_{m-1}\right)\right]^{h(\lambda_{m-1})} + \log\left[f\left(A_m\right)\right]^{h(\lambda_m)}\right) \\
&\prec \lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_1\right)^{h(\lambda_1)/2} f\left(A_2\right)^{h(\lambda_2)} f\left(A_1\right)^{h(\lambda_1)/2}\right]\right) + \ldots + \lambda^{\downarrow}\left(\log\left[f\left(A_{m-1}\right)^{h(\lambda_{m-1})/2} f\left(A_n\right)^{h(\lambda_m)} f\left(A_{m-1}\right)^{h(\lambda_{m-1})/2}\right]\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için

$\lambda^{\downarrow}\left(f\left(A_i\right)^{h(v_i)/2} f\left(A_{i+1}\right)^{h(v_{i+1})} f\left(A_i\right)^{h(v_i)}\right) = \lambda^{\downarrow}\left(f\left(A_i\right)^{h(v_i)} f\left(A_{i+1}\right)^{h(v_{i+1})}\right)$ ve log fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan $1 \le k \le n$ için

$$
\sum_{j=1}^{k} \log \lambda_j^{\downarrow}\left(f\left(\prod_{i=1}^{m} A_i^{\lambda_i}\right)\right) \le \sum_{j=1}^{k} \log \lambda_j^{\downarrow}\left(\sum_{i=1}^{m-1} f\left(A_i\right)^{h(v_i)} f\left(A_{i+1}\right)^{h(v_{i+1})}\right)
$$

elde edilir ki, bu eşitsizlik

$$
\prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}\left(f\left(\prod_{i=1}^{m} A_i^{\lambda_i}\right)\right) \le \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}\left(\sum_{i=1}^{m-1} f\left(A_i\right)^{h(v_i)} f\left(A_{i+1}\right)^{h(v_{i+1})}\right), \qquad 1 \le k \le n
$$

olmasını gerektirir ki böylece

$$\lambda^{\downarrow}\left(f\left(\prod_{i=1}^{m} A_i^{\lambda_i}\right)\right) \prec_{\log} \lambda^{\downarrow}\left(\sum_{i=1}^{m-1} f\left(A_i\right)^{h(v_i)} f\left(A_{i+1}\right)^{h(v_{i+1})}\right), \qquad 0 \le v \le 1$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilmiş olur.

3.3. Majorizasyon Eşitsizlikleri yardımıyla Bazı Genellemeler

Bu alt bölümde Xu ve He (2013) çalışmasının bir sonucu olan (3.4) eşitsizliğinin bir genellemesi ispatlanmış ve bunun için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Sonuç olarak bu alt bölümde majorizasyon eşitsizlikleri yardımıyla bazı genişlemeler ve genellemeler verilmiştir. Bu alt bölümde yer alan sonuçlar orijinal olup tarafımızdan ispatlanmıştır.

Teorem 3.3.1.1 A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler ve k pozitif tamsayı olmak üzere $m = 1,2,\cdots,n-1$ için

$$\prod_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^{2/k}B^{2(k-1)/k}\right)\right| \le \prod_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)^2$$

dir.

İspat. $v\in[0,1]$ için A^vXB^{1-v} matrisini ele alalım. Herhangi A ve B matrisleri için $\lambda(AB)=\lambda(BA)$ olduğundan sırasıyla A^vXB^{1-v} matrisine Teorem 2.8.1.1 ve Teorem 2.8.1.6 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^vXB^{1-v}\right)\right| &= \prod_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(XA^vB^{1-v}\right)\right| \\ &\le \prod_{j=1}^{m} s_j\left(XA^vB^{1-v}\right) \\ &\le \prod_{j=1}^{m} s_j\left(X\right)s_j\left(A^vB^{1-v}\right)\end{aligned} \tag{3.11}$$

olur. $X = A^vB^{1-v}$ olmak üzere (3.11) eşitsizliğine (3.2) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^{2v}B^{2(1-v)}\right)\right| &\le \prod_{j=1}^{m} s_j\left[vA+(1-v)B\right]^2 \\ &= \prod_{j=1}^{m} \lambda_j\left[vA+(1-v)B\right]^2\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir. Herhangi bir k pozitif tamsayısı için (3.12) eşitsizliği

$$\prod_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^{2/k}B^{2(k-1)/k}\right)\right|\leq\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)^2$$

eşitsizliğini gerektirir.

Sonuç 3.3.1.1 Teorem 3.3.1.1 de bulunan eşitsizlik zayıf logaritmik majorizasyonun tanımı olduğundan aynı zamanda

$$\left|\lambda\left(A^{2/k}B^{2(k-1)/k}\right)\right|\prec_{w\log}\lambda\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)^2$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.1.2 A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler ve m pozitif tamsayı olmak üzere $v\in[0,1]$ ve $1\leq k<\infty$ iken $m=1,2,\cdots,n-1$ için

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left[A^k\left(\frac{A^vB^{1-v}+A^{1-v}B^v}{2^{1/k}}\right)B^k\right]\right|\leq\sum_{j=1}^{m}s_j\left(\frac{A+B}{2^{1/k}}\right)^{2k+1}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. İlk olarak, herhangi A ve B matrisleri için $\lambda(AB)=\lambda(BA)$ olduğundan Teorem 1.3.3.2 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left[A^kXB^k\right]\right|&=\prod_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left[XB^kA^k\right]\right|\\&\leq\prod_{j=1}^{m}s_j(X)s_j\left(B^kA^k\right)\qquad(3.13)\\&\leq\prod_{j=1}^{m}s_j(X)s_j\left(\frac{A^k+B^k}{2}\right)^2\end{aligned}$$

olur. Zayıf logaritmik majorizasyon zayıf majorizasyonu gerektirdiğinden

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^kXB^k\right)\right|\leq\sum_{j=1}^{m}s_j(X)s_j\left(\frac{A^k+B^k}{2}\right)^2\qquad(3.14)$$

elde edilir ve Teorem 1.3.5.1 kullanılarak

$$\sum_{j=1}^{m} s_j\left(\frac{A^k+B^k}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m} s_j\left(A+B\right)^{2k} \tag{3.15}$$

olacaktır. (3.14) ve (3.15) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^k X B^k\right)\right| \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m} s_j\left(X\right) s_j\left(A+B\right)^{2k} \tag{3.16}$$

olur. (3.16) eşitsizliğinde $X = A^v B^{1-v} + A^{1-v}B^v,\ 0 \le v \le 1$ alınırsa

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left[A^k\left(A^v B^{1-v}+A^{1-v}B^v\right)B^k\right]\right| \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m} s_j\left(A^v B^{1-v}+A^{1-v}B^v\right) s_j\left(A+B\right)^{2k} \tag{3.17}$$

olur. (3.13), (3.16) ve (3.17) eşitsizliğinden

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left[A^k\left(A^v B^{1-v}+A^{1-v}B^v\right)B^k\right]\right| \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m} s_j\left(A+B\right)^{2k+1} \tag{3.18}$$

ve (3.18) eşitsizliğinin her iki tarafı $2^{1/k}$ ile bölünecek olursa

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left[A^k\left(\frac{A^v B^{1-v}+A^{1-v}B^v}{2^{1/k}}\right)B^k\right]\right| \le \sum_{j=1}^{m} s_j\left(\frac{A+B}{2^{1/k}}\right)^{2k+1}$$

elde edilir ki, istenendir.

Sonuç 3.3.1.2 Teorem 3.3.1.2 de bulunan eşitsizlik zayıf majorizasyonun tanımı olduğundan aynı zamanda

$$\left|\lambda\left[A^k\left(\frac{A^v B^{1-v}+A^{1-v}B^v}{2^{1/k}}\right)B^k\right]\right| \prec_w s\left(\frac{A+B}{2^{1/k}}\right)^{2k+1}$$

majorizasyon eşitsizliği elde edilmiş olur.

Uyarı 3.3.1.1 Farklı k ve v değerleri için kolaylıkla aşaıdaki gibi bazı sonuçlar elde edilebilir:

Sonuç 3.3.1.2 Teorem 3.3.1.2 de $v=\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^{\frac{2k+1}{2}}B^{\frac{2k+1}{2}}\right)\right|\leq\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{m}s_j\left(A+B\right)^{2k+1}$$

eşitsizliği elde edilir ve $k=1$ ise $j=1,2,\cdots,m$ için

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^{3/2}B^{3/2}\right)\right|\leq\sum_{j=1}^{m}s_j\left(\frac{A+B}{2}\right)^3$$

elde edilir. $v=\frac{1}{2}$ için elde edilen bu durum (Xu ve He, 2013) çalışmasında daha önce bulunmuştur.

Sonuç 3.3.1.3 Teorem 3.3.1.2 de eğer $m=1$ alınırsa $0\leq v\leq 1$ ve $k=1,2,...,n$ için

$$\sum_{j=1}^{k}\left|\lambda_j\left[A\left(\frac{A^vB^{1-v}+A^{1-v}B^v}{2}\right)B\right]\right|\leq\sum_{j=1}^{k}s_j\left(\frac{A+B}{2}\right)^3 \tag{3.19}$$

elde edilir. $x,y\in\mathbb{R}^n$ için $x\prec_{w\log}y\Rightarrow x\prec_w y$ olduğunu biliyoruz. Açıktır ki bu özellik (3.4) eşitsizliğine uygulanınca elde edilen eşitsizlik (3.19) ile aynıdır.

Sonuç 3.3.1.4 Teorem 3.3.1.2 de eğer $k=2$ ve $v=\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(A^{5/2}B^{5/2}\right)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{m}s_j\left(\frac{A+B}{2^{1/2}}\right)^5 \tag{3.20}$$

olur. $s_i^2\left(X\right)=\lambda_i\left(X^*X\right)$ olduğundan (3.20) eşitsizliği

$$\sum_{j=1}^{m}s_j\left(A^{5/4}B^{5/4}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{m}s_j\left(\frac{A+B}{2^{1/2}}\right)^{5/2} \tag{3.21}$$

ile denktir ve aynı zamanda (3.21) eşitsizliği

$$\sum_{j=1}^{m} s_j\left(\left|A^{5/4}B^{5/4}\right|^{2/5}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{m} s_j\left(\frac{A+B}{2^{1/2}}\right)$$

ile denktir. Fan dominance prensibi kullanılırsa

$$\left\|\left|A^{5/4}B^{5/4}\right|^{2/5}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|A+B\right\|$$

üniter invaryant matris normu için yeni bir eşitsizlik elde edilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Çalışmamızın üçüncü bölümünde tez süresince elde edilen yeni eşitsizlikler ve sonuçlar verilmiştir. "Majorizasyon için Temel Sonuçlar" bölümünün 3.1 alt bölümünde, ilk olarak matrislerin direkt toplamları ile Heinz ortalaması, singüler değer, üniter invaryant matris normu ve özdeğerler eşitsizlikleri verilmiş ve daha sonra 2×2 tipindeki pozitif yarı tanımlı blok matrisler kullanılarak yeni majorizasyon tipi singüler değer eşitsizlikleri tarafımızca ispatlanmıştır. Böylece literatürdeki bazı eşitsizlikler için yeni sınırlar elde edilmiştir. 3.2 alt bölümünde ise s-konveks, log s-konveks, h-konveks, log h-konveks ve geometrik konveks fonksiyonlar gibi özel konveks fonksiyonlar yardımıyla yeni majorizasyon eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Ayrıca bu konveks fonksiyonlar için bazı genellemeler kurulmuştur. 3.3 alt bölümünde ise Xu ve He (2013) çalışmasının bir sonucu olan (3.4) eşitsizliğinin bir genellemesi ispatlanmış ve bunun için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Böylece majorizasyon eşitsizlikleri yardımıyla bazı genişlemeler ve genellemeler verilmiştir.

4.2. Öneriler

Bu çalışmada genel matrislerin ve 2×2 tipinde blok matrislerin toplamlarının ve çarpımlarının singüler değer ve özdeğer vektörleri majorizasyon teorisi yardımıyla karşılaştırılmış ve bunlar aracılığıyla yeni matris eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen matris eşitsizliklerinden de Fan dominance prensibi yardımıyla üniter invaryant matris normları için yeni eşitsizlikler elde edilebilir.

Majorizasyon eşitsizlikleri, optimizasyon, sinyal işleme, kablosuz iletişim, kombinatorik, olasılık, matris teori, graf teori, nümerik analiz ve quantum bilgi teorisi gibi farklı alanlarda başarılı bir şekilde kullanıldığından önemli bir yer teşkil eder. Bu nedenle majorizasyon birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir ve bundan sonra 2×2 tipinde başka türde tanımlanmış blok matrisler incelenebilir ve bunlar yardımıyla yeni özdeğer, singüler değer ve matris normaları için matris ve majorizasyon eşitsizlikleri elde edilebilir. n-kare matrisler için bilinen eşitsizlikler blok matrisler için de uygulanarak eşitsizliklerin genel hali elde edilebilir. Ayrıca özel matrisler için majorizasyon teorisi yardımıyla disiplinler arası yeni çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Ando, T., Hiai, F., 1994, Hölder type inequalities for matrices, *Mathematical Inequalities and Applications 1(1),* 1-30.

Ando T., 1995, Matrix Young inequalities, *[J]. Oper Theory Adv Appl*, 75: 33-38.

Ando T., Zhan X., 1999, Norm inequalities related to operator monotone functions, *Math. Ann. 315*, 771-780.

Arnold B. C., Majorization: Here, There and Everywhere, *Statistical Science 2007*, Vol. 22, No. 3, 407–413.

Audenaert, KMR, 2007, A singular value inequality for Heinz means. *Linear Algebra Appl. 422*, 279-283.

Aujla J. S., Silva F. C., 2003, Weak majorization inequalities and convex functions, *Linear Algebra and its Applications 369,* 217–233.

Aujla J. S., Bourin J-C., 2007, Eigenvalue inequalities for convex and log-convex functions, *Linear Algebra and its Applications 424,* 25–35.

Bapat R. B., 1987, Majorization and Singular Values, *Linear and Multilinear Algebra, Vol. 21,* 211-214.

Bapat R. B., 1991, Majorization and singular values III, *Linear and Multilinear Algebra 145,* pp. 59–70.

Bhatia R., Kittaneh F., 1990, On the singular values of a product of operators, *SIAM J. matrix Anal. Appl. 11*, 272-277.

Bhatia, R., 1997, Matrix Analysis, *GTM 169, Springer-Verlag*, NewYork.

Bhatia R., Kittaneh F., 2000 Notes on matrix arithmetic–geometric mean inequalities, *Linear Algebra Appl. 308*, 203–211.

Bhatia R., 2006, Interpolating the arithmetic-geometric mean inequality and its operator version, *Lin. Alg. Appl. 413*, 355–363.

Bhatia R., Kittaneh F., 2008, The matrix arithmetic-geometric mean inequality revisited, *Indian Statistical Institute*, Delhi Centre 7, SJSS Marg, New Delhi-110016, India.

Bostancı, E., Yami, N., Özçakır, Ö., 2012, Zorn Lemma, *Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü*, Çanakkale.

Bozkurt, D., Türen, B., Solak S., 2007. Lineer Cebir. (4. Baskı), Dizgi Ofset, 470s. Konya.

Caferov, Y., 2014, Türev Uygulamaları, *Anadolu Üniversitesi*, http://w2.anadolu.edu.tr/aos/kitap/IOLTP/2285/unite10.pdf [Ziyaret Tarihi: 23 Haziran 2014].

De Brujin, N. G., 1956, Inequalities concerning minors and eigenvalues, *Nieuw. Arch. Wiask. [3] 4,* 18-35.

Fan, K., 1949, On a theorem of Weyl corcerning eigenvalues of linear transformations, *I. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35*, 652-655.

Fan, K., 1950, On a theorem of Weyl corcerning eigenvalues of linear transformations *II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36*, 31-35.

Fan, K., 1951, Maximum properties and inequalities fort he eigenvalues of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 37*, 760-766.

Fan, K., 1954, Inequalities for eigenvalues of Hermitian matrices, *Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. 39*, 131-139.

Furuichi, S., Lin, M., 2010, A matrix trace inequality and its application, *Linear Algebra Appl.,* 433 (2010) 1324-1328.

Dahl, G., 2009, Majorization and network problems, *Proceedings INOC2009 (Int. network optimization conference),* Pisa, April 26–29, 2009.

Golden S., 1965, Lower bounds for the Helmholtz function, *Phys. Rev. 137*, B1127-B1128.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., ve Polya, G., 1929, Some simple inequalities satisfied by convex functions, *Messenger Math. 58*, 145-152.

Hiai F., Zhan X., 2002, Inequalities involving unitarily invariant norms and operator monotone functions, *Linear Algebra Appl. 341*, 151–169.

Horn, A., 1950, On the singular values of a product of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36*, 374-75.

Horn, R., Johnson, C., 1985, Matrix Analysis, *Cambridge Univesity Press,* New York.

Horn R. A., Johnson C. R., 1991, Topics in Matrix Analysis, *Cambridge University Press*.

Hua J., Xi B-Y., Qi F, 2014, Hermite-Hadamard Type Inequalities for Geometric-Arithmetically s-convex functions, *Commun. Korean Math. Soc. 29,* No. 1, pp. 51–63.

Jorswieck E., Boche H., 2006, Majorization and Matrix-Monotone Functions in Wireless Communications, *Foundation and Trends in Communications and Information Theory*, vol 3, no 6, 553–701.

Karakaş H. İ., 2008, Cebir Dersleri, *Başkent Üniversitesi, Türkiye Bilimler Akademisi(TÜBA) Ders Kitapları,* Ankara.

Kittaneh F., Manasrah Y., 2010, Improved Young and Heinz inequalities for matrices, *J. Math. Anal. Appl. 361.,* 262–269.

Lin, M., Wolkowicz, H., 2012, An Eigenvalue Majorization Inequality for Positive Semidefinite Block Matrices: In Memory of Ky Fan, *Linear Multilinear Algebra 60*, 1365-1368.

Lin M., 2013, Angles, Majorization, Wielandt Inequality and Applications by Minghua Lin, PhD thesis in Applied Mathematics, *University of Waterloo*, Waterloo, Ontario, Canada.

Marcus, M., Nikolai, P. J., 1969, Inequalities for some monotone matrix functions, *Canad. J. Math. 21*, 485-494.

Marshall A. W., Olkin, I., Arnold, B. C., 1979, Inequalities: Theory of Majorization and Its Application*, Math. Sci. Eng., vol. 143, Academic Press,* Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publisher], New York-London.

Matharu J.S., Aujla J.S.,2010, Some majorization inequalities for convex functions of several variables, *Mathematical inequalities and applications, 2319.*

Murad, M. M. M. A., 2003, The Löwner Ordering of Hermitian Matrices, *Faculty of Graduate Studies,* The University of Jordan.

Rotfel'd, S. Ju, 1969, The singular values of the sum of completely continuous operators, *Problem of mathematical physics, No. 3: Spectral Theory (Russian) pp. 81-87. Izdat. Leningrad, Univ., Leningrad, 1968. In Spectral Theory (M.S Berman, ed.), Top. Math. Phys., Vol. 3, pp. 73-78 (English version). Consultants Bureau, New York.*

Schur, I., 1909, Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Thorie der Integralgleichungen*, Math. Ann. 66*, 488-510.

Schur, I., 1923, Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Adwendungen die Determinaten- Theorie Sitzungber, *Berlin. Math. Gesellschaft 22*, 9-20 (Issai Schur Collected Works (A. Brauer and H. Rohrbach, eds.) Vol. II. pp. 416-427. Springer- Velag, Berlin, 1973).

Symanzik K., 1965, Proof and refinements of an inequality of Feynman, *J. Math. Phys. 6*, 1155-1156.

Tao Y., 2006, More results on singular value inequalities of matrices, *Linear Algebra and its Applications, 416,* 724-729.

Thompson C. J., 1965, Inequality with applications in statistical mechanics, *J. Math. Phys. 6,* 1812-1813.

Thompson, R. C., 1977, Singular values, diagonal elements, and convexity, *SIAM J. Appl. Math. 32, 39-63.*

Türkmen, R., Paksoy, V. E., Zhang, F., 2012, Some inequalities of majorization type, *Linear Algebra and its Applications 437,* 1305-1316.

Weyl, H., 1949, Inequaliities between two kinds of eigenvalues of a linear transformation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35*, 408-411.

Xu X., He C., 2013, Inequalities for eigenvalues of matrices, *Journal of Inequalities and Applications 2013*, 2013:6.

Varoˇsanec S., 2007, On h-convexity, *J. Math. Anal. Appl. 326,* no. 1, 303–311.

Visser, C.,, Zaanen, A. C., 1952, On the eigenvalues of compact linear transformations, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A55(=Indag. Math. 14)* 71-78.

Zhan X., 2000, Singular values of differences of positive semidefinite matrices, *SIAM J. Anal. Appl. 22*, 819-823.

Zhan X., 2000, Some research problems on the Hadamard product and singular values of matrices, *Linear and Multilinear Algebra 47,* 191–194.

Zhan, X., 2002, Matrix Inequalities, *Springer Verlag*, Berlin.

Zhan X., 2004, On some matrix inequalities, *Linear Algebra Appl. 376*, 299-303.

Zhang B., Xi B-Y., Qi F, 2013, Some Properties and Inequalities for *h*–geometrically convex Functions, *Journal of Classical Analysis Volume 3, Number 2,* 101–108.

Zhang, F., 1999, Matrix Theory: Basic Results and Techniques, *Springer-Verlag*, New York.

Zhang, F., 2001, Matrix Inequalities by Means of Block Matrices, *Mathematical Inequalities & Applications,* Vol. 4, No. 4, 481-490.

Zhang, F., 2005, The Schur complement and its applications. Numerical Methods and Algorithms, *Springer Science Business Media*, Inc. Vol. 4.

Zhang, F., 2011, Matrix Theory: Basic Results and Techniques, *Springer-Verlag*, Second Edition, New York.

Zhongpeng Y., Xiaoxia F., Meixiang C., 2009, The Generalization of Styan Matrix Inequality on Hermitian Matrices, *J. Appl. Math. & Informatics Vol. 27,* No. 3 - 4, pp. 673 – 683.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	İREM KÜÇÜKOĞLU
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Antalya, 05.10.1990
Telefon	**:**	0537 300 16 48
Faks	**:**	
e-mail	**:**	iremkucukoglu@selcuk.edu.tr, iremkucukoglu90@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Hacı Dudu Mehmet Gebizli Y.D.A Lisesi, Muratpaşa, Antalya	2008
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümü, Selçuklu, Konya	2012
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Selçuklu, Konya	2013
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Selçuklu, Konya	2014
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**

UZMANLIK ALANI: Matris Teori

YABANCI DİLLER: İngilizce

YAYINLAR

C. <u>Uluslararası Konferanslarda Sunulan Bildiriler</u>

C1. Küçükoğlu, İ., Baykan, Ö. K., 2013, DWT-SVD Based Image Watermarking Using Artificial Bee Colony Algorithm, *4. International Conference On Matrix Analysis and Applications, ICMAA-2013,* Konya, Turkey.

C2. Küçükoğlu, İ., Türkmen, R., 2014, Some Singular Value Inequalities for Positive Semidefinite Matrices, *Karatekin Mathematics Days 2014 International Mathematics Symposium*, Çankırı, Turkey. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)