



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**STRES DAYANIKLILIK**  
**GÜVENİLİRLİĞİNİN MASKELİ**  
**VERİLERE DAYALI TAHMİNİ**

**Demet SEZER**

**DOKTORA TEZİ**

**İstatistik Anabilim Dalı**

**Aralık-2013**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

### STRES DAYANIKLILIK GÜVENİLİRLİĞİNİN MASKELİ VERİLERE DAYALI TAHMİNİ

**Demet SEZER**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI**

**2013, 79 Sayfa**

#### **Jüri**

**Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI**

**Prof. Dr. Galip OTURANÇ**

**Prof. Dr. Aşır GENÇ**

**Doç. Dr. Coşkun KUŞ**

**Yrd. Doç. Dr. Alper SİNAN**

Bu tez çalışmasında, iki bileşenli paralel ve seri sistemlerde bileşenlerin yaşam zamanı dağılımının üstel olduğu durum için stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli verilere dayalı tahmini ele alınmıştır. Seri sistemlerde tek stres durumu ve iki stres durumu, paralel sistemlerde ise sadece tek stres durumu incelenmiş, her durum için stres-dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri elde edilmiştir. Her bölümdeki simülasyon çalışmaları ile de farklı durumlar için en çok olabilirlik tahmin edicisinin yan ve hata kareler ortalaması açısından performansı incelenmiş ve ayrıca en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin tahmini riskler açısından karşılaştırılmaları verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:**Maskeli veri, paralel sistem, seri sistem, stres-dayanıklılık güvenilirliği

**ABSTRACT**

**Ph.D THESIS**

**ESTIMATION OF STRESS STRENGTH RELIABILITY  
BASED ON MASKED DATA**

**Demet SEZER**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
SELÇUK UNIVERSITY  
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY  
IN STATISTICS**

**Advisor: Asst. Prof. Dr. İsmail KINACI**

**Year, 79Pages**

**Jury**

**Asst. Prof. Dr. İsmail KINACI**

**Prof. Dr. Galip OTURANÇ**

**Prof. Dr. Aşır GENÇ**

**Assoc. Prof. Dr. Coşkun KUŞ**

**Asst. Prof. Dr. Alper SİNAN**

In this thesis, it is considered that the estimation of stress-strength reliability based on masked data for parallel and series systems with two components having exponential lifetime distributions. The case of one stress and the case of two stress is examined for series systems while only the case of one stress is examined for parallel systems and also for all these cases, maximum likelihood and Bayes estimation of stress-strength reliability is obtained. With simulation studies in all sections, the performance of maximum likelihood estimation in point of bias and mean square error and also the comparison between Bayes and maximum likelihood estimates in point of estimated risks for various situations is introduced.

**Keywords:**Masked data, parallel system, series system, stress-strength reliability

## ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI'ya, manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan aileme ve tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Demet SEZER  
KONYA-2013

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ .....</b>	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER .....</b>	<b>vii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR .....</b>	<b>ix</b>
<b>1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR .....</b>	<b>8</b>
2.1. Seri Sistemler .....	8
2.2. Paralel Sistemler .....	9
2.3. Maskeli Örneklemeler .....	11
2.3.1. Seri sistemler.....	12
2.3.2. Paralel sistemler .....	13
2.4. Stres-Dayanıklılık Güvenilirliği .....	14
2.5. Tahmin .....	15
2.5.1. En çok olabilirlik tahmini .....	16
2.5.2. Bayes tahmini .....	16
2.5.2.1. Lindley yaklaşımı .....	18
<b>3. İKİ BİLEŞENLİ SERİ SİSTEMLERDE STRES-DAYANIKLILIK GÜVENİLİRLİĞİNİN MASKELİ VERİLERE DAYALI TAHMİNİ .....</b>	<b>20</b>
3.1. Tekli Stres Durumu.....	22
3.1.1. En çok olabilirlik tahmini .....	24
3.1.1.1. Simülasyon.....	26
3.1.2. Bayes tahmini .....	29
3.1.2.1. Simülasyon.....	34
3.2. İkili Stres Durumu .....	36
3.2.1. En çok olabilirlik tahmini .....	37
3.2.1.1. Simülasyon.....	40
3.2.2. Bayes tahmini .....	49
3.2.2.1. Simülasyon.....	55
<b>4. İKİ BİLEŞENLİ PARALEL SİSTEMLERDE ÜSTEL DAĞILIM İÇİN STRES DAYANIKLILIK GÜVENİLİRLİĞİNİN MASKELİ VERİLERE DAYALI TAHMİNİ .....</b>	<b>60</b>
4.1. Tekli Stres Durumu.....	62
4.1.1. En çok olabilirlik tahmini .....	64
4.1.1.1. Simülasyon.....	65
4.1.2. Bayes Tahmini .....	68

4.1.2.1. Simülasyon.....	71
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....</b>	<b>74</b>
5.1. Sonuçlar .....	74
5.2. Öneriler .....	75
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>76</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>79</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$\Theta$  : Parametre Uzayı

$\mathbb{R}^p$  :  $p$  Boyutlu Uzay

### Kısaltmalar

EÇO : En Çok Olabilirlik

HKO : Hata Kareler Ortalaması

$R$  : Stres-Dayanıklılık Güvenilirliği

o.y.f. : Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

## 1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Stres-dayanıklılık güvenilirliği, belirli bir parçanın veya sistemin, maruz kaldığı strese dayanma olasılığı olarak tanımlanabilmektedir. Maruz kalınan stres  $Y$  ve dayanıklılık  $X$  ile gösterilirse stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R = P(Y < X)$  şeklinde ifade edilebilir. Stres-dayanıklılık güvenilirliği tıp, biyoloji, mühendislik ve ziraat alanlarında oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin, bir mikrobun bir ilaca karşı, bir beton kalıbının maruz kaldığı baskıya, bir ampulün voltaja, bir köprünün kendi üzerindeki ağırlığa vb. dayanması olasılıklarının önceden bilinmesi hiç şüphesiz ki ilgili alanda bazı kararların alınabilmesi açısından oldukça önemlidir. Ancak gerçek hayatta bu tür olasılıkların önceden bilinmesi pek mümkün değildir. Bu sebeple bu olasılıkların yani stres-dayanıklılık güvenilirliklerinin tahmini ayrı bir öneme sahiptir. Şu ana kadar stres-dayanıklılık güvenilirliği ile ilgili yapılan çalışmalarda genellikle stres ve dayanıklılığın aynı dağılım ailesine ait (üstel, Weibull, normal, Gamma, Burr, Pareto gibi) rasgele değişkenler olduğu durum incelenmiştir. Bu çalışmalarda ilk başlarda stres-dayanıklılık güvenilirliğinin tahmini tam örneklem durumunda incelenmiştir. En çok incelenen tahmin edici ise sahip olduğu özellikler açısından en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Ancak bazı varsayımlar altında stres-dayanıklılık güvenilirliği için tam örnekleme dayalı başka tahmin ediciler de incelenmiştir. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

Church ve Harris (1970),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin bağımsız ve normal dağılımlı olmaları durumunda  $R = P(Y < X)$  olasılığı için güven aralıkları elde etmişlerdir.

Tong (1974),  $\Pr(Y < X)$  olasılığının en küçük varyanslı yansız tahmin edicisini  $X$  ve  $Y$  'nin bağımsız ve negatif üstel dağılıma sahip olduğu varsayımı altında kapalı formda elde etmiştir.

Woodward ve Kelley (1977),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin bağımsız ve normal dağılımlı olmaları durumunda  $P(Y < X)$  olasılığının en küçük varyanslı yansız tahmin edicisini yeni bir formda elde etmişlerdir.

Awad ve ark. (1981),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin iki değişkenli üstel dağıldığını varsayarak  $R = P(Y < X)$  stres-dayanıklılık güvenilirliği için üç ayrı tahmin ediciyi incelemişlerdir. Ayrıca  $X$  ve  $Y$  'nin ortalamalarının eşitliğini test etmek için bir test ve ortalamalar arasındaki fark için güven limitleri vermişlerdir.



Kostantine ve Karson (1986),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin sırasıyla  $(M, \lambda)$  ve  $(N, \mu)$  parametrelili gamma dağılımına sahip oldukları ve  $M$  ve  $N$  parametrelerinin bilindiği varsayımı altında  $P(Y < X)$  olasılığı için en çok olabilirlik ve en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Ragab (1991),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin aynı ölçek parametrelili fakat farklı şekil parametrelili genelleştirilmiş lojistik dağılıma sahip olmaları durumunda  $W = P(Y < X)$  stres-dayanıklılık güvenilirliğinin tahmini için en çok olabilirlik, Bayes ve ampirik Bayes metotlarını incelemişlerdir.

Al-Hussanini ve ark. (1997), stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R \equiv P(Y < X)$ 'in parametrik ve parametrik olmayan tahminlerini elde etmişler,  $X$  ve  $Y$ 'nin bağımsız ve log-normal dağılıma sahip olduğu durumda parametrik ve parametrik olmayan tahmin edicilerinin karşılaştırmasını yapmışlardır. Ayrıca hem parametrik hem de parametrik olmayan durum için  $100(1 - \alpha)\%$  güven sınırlarını elde etmişlerdir.

Ahmad ve ark. (1997),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin bağımsız ama özdeş olmayan Burr-X dağılımına sahip oldukları durum için stress-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin en çok olabilirlik, Bayes ve ampirik Bayes tahminlerini incelemişler ve Monte Carlo simülasyon çalışması ile de bu üç tahmin ediciyi kıyaslamışlardır.

Kotz ve ark. (2003) tarafından yazılan kitap,  $P(Y < X)$  stres-dayanıklılık güvenilirliğinin ayrıntılı bir şekilde incelendiği önemli bir eserdir. Bu kitapta başlıca stres-dayanıklılık güvenilirliğinin tarihçesi, matematiksel ifadesi ve tahmini konusu üzerinde durulmuştur. Tahmin aşamasında  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin normal, iki parametrelili üstel, gamma, Pareto, Weibull, Burr tip-X ve tip-XII ve daha başka dağılımlara sahip olmaları durumunda stres-dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicileri incelenmiştir. Yine bazı dağılımlar için en küçük varyanslı yansız tahmin ediciler ve Bayes tahmin edicileri incelenmiştir. Ayrıca kitabın son bölümünde bir çok uygulama ve örneğe yer verilmiştir.

Kundu ve Gupta (2005),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin aynı ölçek parametrelili ve farklı şekil parametrelili genelleştirilmiş üstel dağılıma sahip olmaları durumunda  $P(Y < X)$  için en çok olabilirlik tahmin edicisini ve bu tahmin edicinin asimptotik dağılımını elde etmişlerdir. Bu asimptotik dağılımı kullanarak  $P(Y < X)$  için asimptotik güven aralığını oluşturmuşlardır. Ayrıca ortak olan ölçek parametresinin bilindiği varsayımı altında  $P(Y < X)$  olasılığının en çok olabilirlik tahmin edicisinin

yanında Bayes ve en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerini elde etmişler ve bu tahmin edicilerin performanslarını bir Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırmışlardır.

Kundu ve Gupta (2006),  $X$  ve  $Y$ 'lerin farklı ölçek parametrelili ve aynı şekil parametrelili Weibull dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmaları durumunda  $P(Y < X)$  olasılığının en çok olabilirlik tahminini incelemişlerdir. En çok olabilirlik tahmin edicisinin analitik olarak elde edilememesinden dolayı analitik olarak elde edilebilen yaklaşık en çok olabilirlik tahmin edicisi üzerinde durmuşlardır. Ayrıca en çok olabilirlik tahmin edicisinin asimptotik dağılımını elde etmişler ve buna bağlı olarak da  $P(Y < X)$  için asimptotik güven aralığını vermişlerdir. Yazarlar  $P(Y < X)$  için Bayes tahminini ve karşılık gelen aralıkları elde etmişler ve bir simülasyon çalışması ile yöntemleri karşılaştırmışlardır.

Raqab ve ark. (2008),  $Y \sim GE(\alpha, \lambda, \theta)$  ve  $X \sim GE(\beta, \lambda, \theta)$  olmak üzere  $X$  ve  $Y$ 'nin farklı ölçek ama aynı şekil parametreleri ile üç parametrelili genelleştirilmiş üstel dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler olmaları durumunda  $R = P(Y < X)$ 'in en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerini incelemişler.

Rezaei ve ark. (2010),  $X$  ve  $Y$ 'nin farklı parametrelili genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmaları durumunda  $P(Y < X)$  olasılığının en çok olabilirlik tahminini ve asimptotik dağılımını ve asimptotik dağılımı kullanılarak  $P(Y < X)$ 'in asimptotik bir güven aralığını incelemişlerdir. Ayrıca ortak ölçek parametresinin bilindiği varsayımı altında stres-dayanırlılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicisini, düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicisini, Bayes tahmin edicisini ve güven aralığını elde etmişler ve bu tahmin edicilerin performanslarını Monte Carlo simülasyon çalışmaları ile karşılaştırmışlardır.

Asgharzadeh ve ark. (2013),  $X$  ve  $Y$ 'nin bilinmeyen aynı ölçek parametresi ama farklı şekil parametresi ile veya bilinmeyen aynı şekil parametresi ama farklı ölçek parametresi ile iki parametrelili genelleştirilmiş lojistik dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler olmaları durumunda  $R$ 'nin tahmini konusunu ele almışlardır. Aynı zamanda şekil ve ölçek parametrelerinin farklı olduğu zamanki genel durumu değerlendirmişlerdir.  $R$ 'nin en çok olabilirlik tahmini ve bu tahminin asimptotik dağılımını elde ederek  $R$ 'nin asimptotik güven aralığını elde etmişlerdir. Ayrıca Gibbs

ve Metropolis örneklemelerini kullanılarak  $R$ 'nin örnekleme dayalı bir tahmini ve güven aralığı konusunu incelemişlerdir.

Son zamanlarda sansürlü örneklemeler ve bu örneklemelere dayalı tahmin konusunda yapılan çalışmaların artmasıyla beraber stres-dayanıklılık güvenilirliğinin de çeşitli türlerden sansürlü örneklemelere dayalı tahmini konusunda çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Asgharzadeh ve ark. (2011),  $X$  ve  $Y$ 'nin farklı ölçek parametresi ve aynı şekil parametresi ile Weibull dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmaları durumunda  $R = P(Y < X)$  stres-dayanıklılık güvenilirliğinin ilerleyen tip-II sansürlü örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve yaklaşık en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir. En çok olabilirlik tahmin edicisinin asimptotik dağılımına bağlı olarak  $R$  için asimptotik güven aralığının yanı sıra iki farklı Bootstrap metodu kullanarak elde ettikleri iki farklı güven aralığını vermişlerdir. Ayrıca  $R$ 'nin Bayes tahminini ve tahmine ilişkin güven aralığını Gibbs örnekleme tekniği kullanılarak önermişlerdir.

Saraçoğlu ve ark. (2012),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin bağımsız ve üstel dağılıma sahip olmaları durumunda  $R = P(Y < X)$  stres-dayanıklılık güvenilirliğinin ilerleyen tür sansürlü örnekleme dayalı en çok olabilirlik, en küçük varyanslı yansız ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Ayrıca  $R$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisinin dağılımı ve buna bağlı olarak da  $R$  için güven aralığı oluşturmuşlar ve elde edilen tahmin edicileri bir simülasyon çalışması ile karşılaştırmışlardır.

Lio ve Tsai (2012),  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin Burr XII dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmaları durumunda  $\delta = P(Y < X)$  olasılığının ilerleyen tür ilk bozulmalar sansürlü örnekleme dayalı en çok olabilirlik tahmin edicisini elde etmişlerdir. En çok olabilirlik tahmin edicisinin asimptotik dağılımına bağlı olarak  $\delta$  için asimptotik güven aralıklarının yanı sıra iki farklı Bootstrap metodu kullanarak elde ettikleri iki farklı güven aralığını vermişler ve elde edilen sonuçları bir simülasyon çalışması ile karşılaştırmışlardır.

Güvenilirlik teorisinde  $n$  tane bileşenden oluşan bir sistemin ömrü veya dayanıklılığı ve bunların tahmini konusu da ayrı bir öneme sahiptir. Tahmin aşamasında sistemlerin sadece, yaşam zamanları veya dayanıklılıklarının gözlenmesiyle elde edilen gözlemler kullanılabildiği gibi bunların yanında sistemlerin bozulmasına neden olan bileşenin hangisi olduğunun gözlenmesiyle elde edilen gözlemlerde kullanılabilmektedir. Bununla birlikte bir çok durumda sistemin bozulmasına sebep olan

bileşen yada bileşenler gerek maddi olanaksızlıklar gerekse zorluklar sebebiyle tam olarak incelenemeyebilir. Sonuçta bir sistem bozulması gözlenir ancak bozulmaya sebep olan bileşen(ler) kesin olarak gözlenemeyebilir. Sistemin bozulmasına sebep olan bileşenin gözlenemediği bu tür gözlemler maskeli olarak ifade edilir . Maskeli örneklem konusu ilk defa Miyakawa (1984) tarafından ortaya atılmış ve daha sonra seri ve paralel sistemlerde, alınan örneklemin maskeli olması durumu farklı yaşam zamanı dağılımları için bir çok çalışmada incelenmiştir. Seri sistemler için alınan örneklemin maskeli olması durumunda bugüne kadar yapılan başlıca çalışmalar aşağıda sıralanmıştır.

Miyakawa (1984), iki bileşenden oluşan seri sistemler için, sistem bileşenlerinin yaşam zamanı dağılımlarının parametrik ve parametrik olmayan tahmin edicilerinin elde edilmesi konusunu incelemiştir. Parametrik durum için, bileşenlerin yaşam zamanı dağılımının üstel olduğu durumda en çok olabilirlik tahmin edicisini kapalı formda elde etmiştir. Parametrik olmayan durum için ise, Kaplan ve Meier tahmin edicilerine dayalı bir çok tahmin edici önermiştir.

Usher ve Hodgson (1988), üç bileşenli seri sistemlerde bileşenlerin sabit bozulma oranına sahip olduğu durum için, bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Usher ve Guess (1989), seri sistemlerdeki bileşenlerin güvenilirliklerinin tahmini için iteratif bir yöntem önermişler ve iki bileşenli seri sistemlerde bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının Weibull olması durumu için sayısal bir örnek vermişlerdir.

Guess ve ark. (1991), seri bağlı  $J$  tane bileşenden oluşan sistemlerin bozulmasına sebep olabilecek bileşenler hakkında bir önsel bilgiye sahip olduğu durum için sistemin ve bileşenlerinin güvenilirliklerine ilişkin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Lin ve ark. (1993), Usher ve Hodgson'ın çalışmasını genişleterek üç bileşenli ve bileşenlerinin yaşam zamanı dağılımı üstel olan seri sistemlerde parametrelerin en çok olabilirlik tahmini için basit bir iterasyon önermişlerdir.

Lin ve Guess (1994), Guess ve ark.(1991)'nin çalışmasına ilave bir çalışma yaparak iki bileşenli seri sistemlerde bozulmanın sebebine bağımlı olan farklı oranlardaki maskelemenin en çok olabilirlik tahminine etkisini incelemişlerdir.

Usher (1996),  $J$  bileşenli ve bileşenlerinin yaşam zamanı dağılımının Weibull olduğu seri sistemlerde , bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerinin ve güven aralıklarının bulunması için iteratif bir yöntem sunmuştur.

Sarhan (2001), seri sistemlerde bileşenlerin güvenilirliklerini incelemiş ve sistem bileşenlerinin sabit bozulma oranına sahip olması durumunda bileşen güvenilirliklerinin en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerini elde etmiştir.

Sarhan (2003),  $m$  tane bağımsız ve özdeş olmayan bileşenden oluşan seri sistemleri incelemiş ve iki ve üç bileşenli seri sistemler için bileşenlerin yaşam zamanlarının Weibull dağılımına sahip olması durumu için bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin en çok olabilirlik (EÇO) tahmin edicilerini analitik olarak elde etmiştir.

Sarhan ve El-Gohary (2003), yaşam zamanları Pareto dağılımına sahip  $J$  bileşenden oluşan seri sistemlerin bileşenlerinin yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerini elde etmişlerdir.

Sarhan (2004a), bağımsız ve özdeş olmayan  $J$  bileşenden oluşan seri sistemler için  $j$ . bileşenin hazard fonksiyonunun  $h_j(t) = \alpha_j + \beta_j t$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  olduğu durumda ve daha sonra Sarhan (2004b),  $j$ . bileşenin hazard fonksiyonunun  $h_j(t) = \alpha_j + \beta_j t^{\gamma_j - 1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  olduğu ve  $\gamma$  parametresinin bilindiği varsayımı altında bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerini elde etmiştir.

Sarhan ve Kundu (2008), yaşam zamanı farklı parametrelerle geometrik dağılıma sahip  $J$  bileşenden oluşan seri sistemlerin bileşenlerinin güvenilirliklerinin Bayes tahminini incelemişlerdir.

Hutto ve ark. (2009), seri sistemlerde bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerini karşılaştırmak amacıyla bileşenlerin dağılımlarının Weibull olduğu varsayımı altında radar sistemlerinin güç teçhizatı verilerini kullanarak gerçek veri üzerinden bir çalışma yapmışlardır.

Paralel sistemlerde, alınan örneklemin maskeli olması durumunda en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak bulunamadığından bu alanda çok fazla çalışma yapılamamıştır. Bununla birlikte, Sarhan ve El-Bassiouny (2003) çalışmalarında, birbirine paralel bağlı ve yaşam zamanı dağılımları Weibull olan  $J$  bileşenden meydana gelen paralel sistemleri inceleyerek sistem bileşenlerinin yaşam zamanı dağılımlarının parametreleri için en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerini elde etmişlerdir. Tan (2007), hem seri hem de paralel sistemlerde bileşen güvenilirliğinin

tahmini konusunu incelemiş, bileşen bozulma oranı için bir EM algoritması hazırlamış ve algoritmanın açıklanması amacıyla iki sayısal örnek sunmuştur.

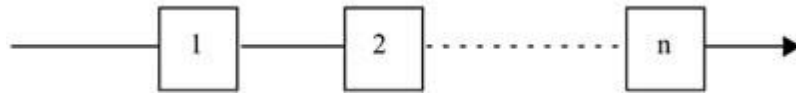
Şu ana kadar ki stres-dayanıklılık güvenilirliği ve tahmini ile ilgili yapılan çalışmalarda örneklemin maskeli olması durumu ele alınmamıştır. Bu çalışmada esas olarak  $R = P(Y < X)$  stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicileri araştırılmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde seri ve paralel sistemler, maskeli örneklemler, stres-dayanıklılık güvenilirliği ve en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri başlıkları altında temel kavramlar tanıtılmıştır. Çalışmanın esasını oluşturan üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise sırası ile seri ve paralel sistemlere ilişkin stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli örneklemlere dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri konusu incelenmiş ve bu tahminlerin performanslarını görebilmek amacıyla yapılan simülasyon çalışmasının sonuçlarına yer verilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise çalışmadan elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez içerisinde sıklıkla kullanılmış olan tanımlar ve temel kavramlar kısaca tanıtılmıştır.

### 2.1. Seri Sistemler

$n$  bileşenden meydana gelen seri bir sistem Şekil 2.1’de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı üzere, seri sistemlerde tüm bileşenler birbirine seri olarak bağlanmışlardır.



Şekil 2.1.  $n$  bileşenli seri bağlı bir sistem

Seri bağlı sistemlerde, eğer herhangi bir bileşen bozulursa tüm sistem bozulmaktadır. Diğer bir deyişle, seri bağlı sistemlerin ömrü, sistemi meydana getiren bileşenlerden ömrü en küçük olan bileşenin ömrü kadardır. Sonuç olarak,

$T_i$ : sistemdeki  $i$ . bileşenin yaşam zamanı(ömrü)

$X$ : sistemin yaşam zamanı

olmak üzere, bileşenleri birbirine seri bağlı ve  $n$  bileşenden meydana gelen bir sistemin yaşam zamanı

$$X = \min \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \quad (2.1)$$

olarak ifade edilebilir. Bir sistemin  $t$  anında yaşıyor (sağlam) olması olasılığı sistemin  $t$  anındaki güvenilirliği olarak ifade edilir. Buna göre sistemdeki  $i$ . bileşenin  $t$  anındaki güvenilirliği,

$$R_i(t) = P(T_i > t) \quad (2.2)$$

olmak üzere,  $n$  bağımsız bileşenden oluşan seri bağlı bir sistemin  $t$  anındaki güvenilirliği,

$$\begin{aligned}
R(t) &= P(X > t) \\
&= P(\min \{T_1, T_2, \dots, T_n\} > t) \\
&= P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t) \\
&= P(T_1 > t) P(T_2 > t) \times \dots \times P(T_n > t) \\
&= R_1(t) R_2(t) \times \dots \times R_n(t)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (2.3)'den de görüldüğü üzere, seri sistemlerde bileşen sayısı arttıkça sistemin güvenilirliği azalmaktadır (Çavuş ve ark.,2002). Eğer  $T_i$  rasgele değişken(r.d.)inin dağılım fonksiyonu

$$F_i(t) = P(T_i \leq t) \tag{2.4}$$

ile gösterilirse bu durumda sistemin yaşam zamanı olan  $X$  r.d.'nin dağılım fonksiyonunu

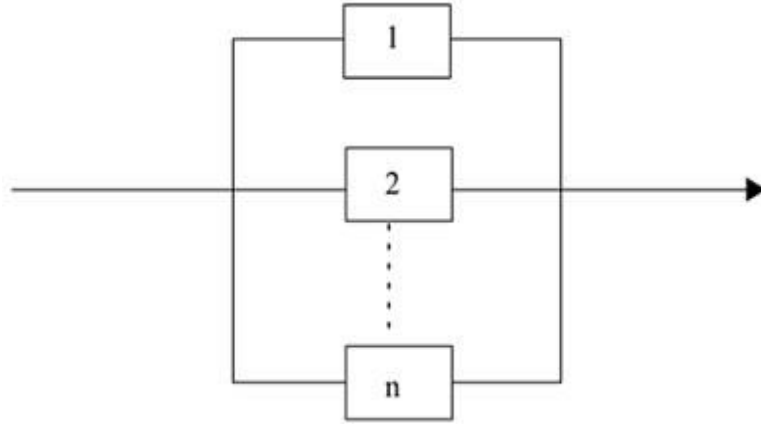
$$\begin{aligned}
F(t) &= P(X \leq t) \\
&= 1 - P(X > t) \\
&= 1 - R(t) \\
&= 1 - [(1 - F_1(t))(1 - F_2(t)) \times \dots \times (1 - F_n(t))]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilebilir.

## 2.2. Paralel Sistemler

$n$  bileşenden meydana gelen paralel bir sistem Şekil 2.2'de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı üzere, paralel sistemlerde tüm bileşenler birbirine paralel olarak bağlanmışlardır.





Şekil 2.2.  $n$  bileşenli paralel bağlı bir sistem

Paralel bağlı sistemlerde, tüm bileşenler bozulana kadar sistem yaşamaya devam eder. Diğer bir deyişle, paralel bağlı sistemlerin ömrü, sistemi meydana getiren bileşenlerden ömrü en büyük olan bileşenin ömrü kadardır. Sonuç olarak,

$T_i$  : sistemdeki  $i$ . bileşenin yaşam zamanı(ömrü)

$X$  : sistemin yaşam zamanı

olmak üzere, bileşenleri birbirine paralel bağlı ve  $n$  bileşenden meydana gelen bir sistemin yaşam zamanı

$$X = \max \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \quad (2.6)$$

olarak ifade edilebilir. Bir sistemin  $t$  anında yaşıyor olması olasılığı sistemin  $t$  anındaki güvenilirliği olarak ifade edilir. Buna göre sistemdeki  $i$ . bileşenin  $t$  anındaki güvenilirliği,

$$R_i(t) = P(T_i > t) \quad (2.7)$$

olmak üzere  $n$  bağımsız bileşenden oluşan paralel bağlı bir sistemin  $t$  anındaki güvenilirliği,

$$\begin{aligned}
R(t) &= P(X > t) \\
&= P(\max\{T_1, T_2, \dots, T_n\} > t) \\
&= 1 - P(\max\{T_1, T_2, \dots, T_n\} \leq t) \\
&= 1 - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_n \leq t) \\
&= 1 - [P(T_1 \leq t) P(T_2 \leq t) \times \dots \times P(T_n \leq t)] \\
&= 1 - [(1 - R_1)(1 - R_2) \times \dots \times (1 - R_n)]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (2.8)'den de görüldüğü üzere, paralel sistemlerde bileşen sayısı arttıkça sistemin güvenilirliği artmaktadır (Çavuş ve ark.,2003). Eğer  $T_i$  r.d.'nin dağılım fonksiyonu

$$F_i(t) = P(T_i \leq t) \tag{2.9}$$

ile gösterilirse bu durumda sistemin yaşam zamanı olan  $X$  r.d.'nin dağılım fonksiyonunu

$$\begin{aligned}
F(t) &= P(X \leq t) \\
&= 1 - P(X > t) \\
&= 1 - R(t) \\
&= F_1(t) F_2(t) \times \dots \times F_n(t)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

### 2.3. Maskeli Örneklemeler

Güvenilirlik teorisinde genellikle, bir bileşenin veya  $n$  tane bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanının dağılımının parametreleri tahmin edilmeye çalışılmaktadır. Seri bağlı  $k$  bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı, en küçük ömürlü bileşenin ömrü (yaşam zamanı) kadar olurken paralel bağlı  $k$  bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı ise en büyük ömürlü bileşenin ömrü kadar olacaktır (Kınacı, 2010). Bununla birlikte hem detaylı başarısızlık analizlerinin yüksek maliyeti hem de teşhis eksikliğinden dolayı bir çok sistem başarısızlığının(bozulmasının) sebebi tam olarak incelenemez. Sonuçta bir sistem başarısızlığı gözlenir ancak başarısızlığa sebep olan bileşen(ler) kesin olarak bilinemeyebilir. Bu tür gözlemler “maskelenmiş” olarak

ifade edilir . Başka bir ifade ile, sistemin bozulmasına sebep olan bileşen(ler)in gözlenemediği durumda elde edilen gözleme, maskeli gözlem denilmektedir.

$k$  bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı  $X$  ve bozulma gerçekleştiğinde bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığı  $S$  ile gösterilsin. Bu durumda,

- Sistemin bozulmasına  $i$ . bileşen neden olduğunda

$$S = \{i\}$$

- Sistemin bozulmasına  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$  olmak üzere  $i_1, i_2, \dots, i_r$  bileşenlerinden biri neden olduğunda

$$S = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$$

olacaktır.  $S$  kümesi birden fazla elemanlı olduğunda yani sistem başarısızlığının nedeninin hangi bileşenden kaynaklandığı kesin olarak bilinmediğinde  $X$  'e "maskeli rasgele değişken" denir. Burada maskeli örneklemeler ve bu örneklemelere ilişkin olabilirlik fonksiyonları seri ve paralel sistemler için ayrı ayrı ele alınmıştır.

### 2.3.1. Seri sistemler

Her biri seri bağlı  $k$  bileşenden oluşan  $n$  tane özdeş sistem ele alınsın. Bu sistemler için,

$T_{ji}$  :  $i$ . sistemdeki  $j$ . bileşenin rasgele yaşam zamanı ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ve ( $j = 1, 2, \dots, k$ )

$X_i$  :  $i$ . sistemin yaşam zamanı ve  $X_i \equiv \min \{T_{1i}, T_{2i}, \dots, T_{ki}\}$

$f_j(t)$  :  $j$ . bileşenin yaşam zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.)

$F_j(t)$  :  $j$ . bileşenin yaşam zamanının dağılım fonksiyonu

$\bar{F}_j(t) = 1 - F_j(t)$  :  $j$ . bileşenin yaşam zamanının yaşam fonksiyonu

$S_i$  :  $X_i$  anında (sistem bozulduğu anda) sistem başarısızlığına sebep olan bileşeni içerdiği bilinen bileşenlerin alt kümesi

$L$  : olabilirlik fonksiyonu

$\ell$  : log-olabilirlik fonksiyonu  $\equiv \ln(L)$

olmak üzere

1)  $T_{ji}$  'ler bağımsız rasgele değişkenlerdir,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  ( $\forall j$  için  $T_{j1}, T_{j2}, \dots, T_{jn}$  'ler aynı dağılımlı olmak üzere)

2)  $i$ . sistem için gözlenebilen nicelikler  $(X_i, S_i)$  'dir.

3) Maskeleme, bozulma sebebinden bağımsız olarak gerçekleşmektedir.

varsayımları altında diğer tüm bileşenlerin yaşadığı bilindiğinde  $j$ . bileşen için  $X_i$  yaşam zamanının koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_j(x_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^j \bar{F}_l(x_i) \quad (2.11)$$

dir.  $i$ . sistemin başarısızlığına sebep olabilen  $j$ . bileşen  $S_i$  kümesine ait olduğundan  $X_i$  'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\sum_{j \in S_i} f_j(x_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k \bar{F}_l(x_i) \quad (2.12)$$

olur. Sonuç olarak, her biri  $k$  bileşenli  $n$  tane sistemden oluşan maskeli örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j \in S_i} \left\{ f_j(x_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k \bar{F}_l(x_i) \right\} \right) \quad (2.13)$$

olacaktır (Guess ve ark., 1987).

### 2.3.2. Paralel sistemler

Her biri paralel bağlı  $k$  bileşenden oluşan  $n$  tane paralel bağlı sistem ele alınsın. Bu sistemler için,

$T_{ji}$ :  $i$ . sistemdeki  $j$ . bileşenin rasgele yaşam zamanı ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ve ( $j = 1, 2, \dots, k$ )

$X_i$ :  $i$ . sistemin yaşam zamanı ve  $X_i \equiv \max \{T_{1i}, T_{2i}, \dots, T_{ki}\}$

$f_j(t)$ :  $j$ . bileşenin yaşam zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$F_j(t)$ :  $j$ . bileşenin yaşam zamanının dağılım fonksiyonu

$S_i$ :  $X_i$  anında sistem başarısızlığına sebep olan bileşeni içerdiği bilinen bileşenlerin alt kümesi

$L$ : olabilirlik fonksiyonu

$\ell$ : log-olabilirlik fonksiyonu  $\equiv \ln(L)$

olmak üzere

1)  $T_{ji}$  'ler bağımsız rasgele değişkenlerdir,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . ( $\forall j$  için  $T_{j1}, T_{j2}, \dots, T_{jn}$  'ler aynı dağılımlı olmak üzere)

2)  $i$ . sistem için gözlenebilen nicelikler  $(X_i, S_i)$  'dir.

3) Maskeleme, bozulma sebebinden bağımsız olarak gerçekleşmektedir.

varsayımları altındadır tüm bileşenlerin öldüğü bilindiğinde  $j$ . bileşen için  $X_i$  yaşam zamanının koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_j(x_i) \prod_{l \in k_j} F_l(x_i) \quad (2.14)$$

dir. Burada  $k_j = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, k$  'dir.  $i$ . sistemin başarısızlığına sebep olabilen  $j$ . bileşen  $S_i$  kümesine ait olduğundan,  $X_i$  'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\sum_{j \in S_i} f_j(x_i) \prod_{l \in k_j} F_l(x_i) \quad (2.15)$$

olur. Sonuç olarak, her biri  $k$  bileşenli  $n$  tane sistemden oluşan maskeli örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L = \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{j \in S_i} f_j(x_i) \prod_{l \in k_j} F_l(x_i) \right] \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir (Sarhan ve El-Bassiouny, 2003).

#### 2.4. Stres-Dayanıklılık Güvenilirliği

Stres-dayanıklılık modeli,  $Y$  stresine maruz kalan ve  $X$  dayanıklılığına sahip bir bileşenin yaşamını tanımlar. Buna göre stres dayanıklılığı aşarsa ( $Y > X$ ) bileşenin

yaşaması mümkün değildir. Stres ve dayanıklılıktan oluşan böyle bir sistemin güvenilirliği  $R = P(Y < X)$  biçiminde ifade edilir (Saraçoğlu, 2007).

Stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$  ile ilgili sonuç çıkarımı istatistiksel kalite kontrolü, mühendislik istatistiği, tıbbi istatistik ve biyoistatistik alanlarında ilgi çekici bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Örneğin bir güvenilirlik çalışmasında  $X$  sistemin dayanıklılığı ve  $Y$  de sisteme uygulanan stres olsun. Bu durumda  $R$ , sistemin yaşama şansını ölçer. Bir sağlık uygulamasında,  $X$  kontrol grubunun yanıtını  $Y$  de tedavi grubunun yanıtını temsil etsin. Bu durumda  $R$ , tedavinin etkinliğini ölçer (Jiang, 2008).

$X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin sürekli olmaları durumunda stres-dayanıklılık güvenilirliği,

$$R = P(Y < X) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^x f_X(x) f_Y(y) dy dx$$

şeklinde elde edilebilir. Burada  $f_X(x)$ ,  $X$ 'in(dayanıklılık) olasılık yoğunluk fonksiyonu(o.y.f.) ve  $f_Y(y)$ ,  $Y$ 'nin(stres) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Literatürde  $R$  ile ilgili sonuç çıkarımı,  $X$  ve  $Y$ 'nin dağılımlarının çeşitli varsayımları altında geniş bir şekilde incelenmiştir. Bu alanda yapılan çalışmaların çoğunda  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin dağılımlarının aynı aileye ait ve bağımsız oldukları kabul edilmiştir.

## 2.5. Tahmin

İstatistik biliminin başlıca problemlerinden birisi parametre tahminidir. Parametre tahmininde esas amaç, içinde bulunan durum için bilinmeyen parametrelerin en iyi özelliklere sahip tahmin edicisini elde etmektir. Literatürde, dağılımların parametrelerini tahmin etmek için çeşitli tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. Bu tezde, bu tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik (EÇO) ve Bayes tahmin yöntemlerine yer verilecektir.

### 2.5.1. En çok olabilirlik tahmini

$X_1, X_2, \dots, X_n$  olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(\cdot|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$  ( $\mathbb{R}^p$ ,  $p$  boyutlu reel uzay) olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere bu rasgele değişkenlerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n | \boldsymbol{\theta}) = f(x_1 | \boldsymbol{\theta}) f(x_2 | \boldsymbol{\theta}) \dots f(x_n | \boldsymbol{\theta}) \quad (2.17)$$

olarak gösterilebilir. Burada,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ 'dir. Eşitlik (2.17) ile verilen ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  $\boldsymbol{\theta}$ 'nın bir fonksiyonu olarak ele alındığında ortak o.y.f.'na olabilirlik fonksiyonu adı verilmekte ve

$$L(\boldsymbol{\theta} | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \boldsymbol{\theta}) \quad (2.18)$$

şeklinde gösterilmektedir (Casella ve Berger, 2002). Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  değeri,  $\boldsymbol{\theta}$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Yani,  $\boldsymbol{\theta}$ 'nın EÇÖ tahmin edicisi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{E\check{C}O} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta} | x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.19)$$

dır. Genellikle olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi yerine olabilirlik fonksiyonunun logaritması olan

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log L(\boldsymbol{\theta} | x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.20)$$

maksimize edilir.

### 2.5.2. Bayes tahmini

Bayes tahmininde, diğer yöntemlerin aksine, parametrelere bir olasılık dağılımına(önsel dağılım) sahip rasgele değişkenler olarak bakılır.

$\theta$  bilindiğinde örneklemin geldiği olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x|\theta)$  olsun. Klasik Bayes yönteminde  $\theta$  parametresinin Bayes tahmin edicisini bulmak için öncelikle  $\theta$ 'nın önsel dağılımı ( $\pi(\theta)$ ) belirlenir. Buradan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ve  $\theta$ 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= f(x|\theta)\pi(\theta) \\ &= f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)\dots f(x_n|\theta)\pi(\theta) \\ &= L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\pi(\theta) \end{aligned} \quad (2.21)$$

olarak yazılabilir. (2.21) eşitliği ile verilen ortak o.y.f.'den,  $X$ 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu  $m(x)$ ,

$$m(x) = \int_{\theta \in \Theta} L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\pi(\theta) d\theta \quad (2.22)$$

elde edilir.  $X$  bilindiğinde  $\theta$ 'nın koşullu olasılık fonksiyonu veya diğer bir deyişle  $\theta$ 'nın sonsal dağılımı  $\pi(\theta|x)$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \frac{f(x, \theta)}{m(x)} \\ &= \frac{L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\pi(\theta)}{\int_{\theta \in \Theta} L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\pi(\theta) d\theta} \end{aligned} \quad (2.23)$$

olacaktır. Burada,  $d\theta = d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_p$  şeklindedir. Karesel kayıp fonksiyonu düşünüldüğünde  $\theta$ 'nın sonsal dağılım altında beklenen değeri,  $\theta$ 'nın Bayes tahmin edicisini verecektir. Sonuç olarak  $\theta$ 'nın Bayes tahmin edicisi  $\hat{\theta}_{Bayes}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{Bayes} &= E(\theta|X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= \int_{\theta \in \Theta} \theta \pi(\theta|x) d\theta \\ &= \frac{\int_{\theta \in \Theta} \theta L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\pi(\theta) d\theta}{\int_{\theta \in \Theta} L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\pi(\theta) d\theta} \end{aligned} \quad (2.24)$$



olarak elde edilir(Roussas, 1973).

### 2.5.2.1. Lindley yaklaşımı

Eşitlik (2.24) ile verilen ve iki integralin oranı şeklinde ifade edilen Bayes tahmin edicisinin elde edilmesinde genellikle güçlükler ortaya çıkmaktadır. Bu amaçla Lindley(1980),

$$\frac{\int_{\Theta} w(\boldsymbol{\theta}) e^{\ell(\boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{\theta}}{\int_{\Theta} v(\boldsymbol{\theta}) e^{\ell(\boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{\theta}} \quad (2.25)$$

formundaki iki integralin oranının yaklaşık olarak elde edilebildiği bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem (2.25) eşitliğinin  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$  etrafında Taylor serisine açılımına dayanmaktadır. Bu yöntemin aşamaları kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ , parametre vektörünü

$\ell(\boldsymbol{\theta})$ , olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını

$w(\boldsymbol{\theta})$  ve  $v(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ 'nin rasgele seçilmiş fonksiyonlarını

$\Theta$ ,  $\boldsymbol{\theta}$  parametre uzayını

temsil etsin.  $\pi(\boldsymbol{\theta})$ , ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere ve  $w(\boldsymbol{\theta}) = u(\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta})$  alınarak  $u(\boldsymbol{\theta})$ 'nin sonsal beklenen değeri,

$$E[u(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{X}] = \frac{\int_{\Theta} u(\boldsymbol{\theta}) e^{\ell(\boldsymbol{\theta})+G(\boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{\theta}}{\int_{\Theta} e^{\ell(\boldsymbol{\theta})+G(\boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{\theta}} \quad (2.26)$$

ile elde edilir. Burada,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'dir. Eşitlik (2.26)'daki  $G(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ 'nin ortak önsel dağılımının logaritmasıdır ve  $G(\boldsymbol{\theta}) = \ln \pi(\boldsymbol{\theta})$  şeklinde ifade edilebilir. Lindley (1980), eşitlik (2.26)'daki integrallerin oranının asimtotik olarak

$$E[u(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{X}] \approx \left\{ u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (u_{ij} + 2u_i g_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \ell_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \right\}_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \quad (2.27)$$

eşitliğine yaklaştığını ifade etmiştir. Eşitlik (2.27)'de  $p$ , bilinmeyen parametre sayısıdır. Ayrıca,

$$\ell_{ijk} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\ell_{ij} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$\sigma_{ij} = \left[ -\ell_{ij} \right]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$g_i = \frac{\partial G}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

olarak elde edilmektedir.

### 3. İKİ BİLEŞENLİ SERİ SİSTEMLERDE STRES-DAYANIKLILIK GÜVENİLİRLİĞİNİN MASKELİ VERİLERE DAYALI TAHMİNİ

Bölüm (2)'de  $k$  bileşenden oluşan seri sistemlerin özelliklerinden bahsedilmiş ve ayrıca bu sistemlerden elde edilen bir örneklemin maskeli örneklem olması durumunda, bileşenlerin dayanıklılıklarının sahip oldukları olasılık dağılımlarının bilinmeyen parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılacak olan olabilirlik fonksiyonunun nasıl elde edileceğine değinilmişti. Bu bölümde ise bunlardan farklı olarak seri sistemlerin bir stres altındaki dayanıklılıkları Bölüm (2.4)'de ele alınan stres-dayanıklılık modeli ile incelenecektir. Bu inceleme, sadece sistemlerin iki bileşenden oluştuğu ve her birinin dayanıklılıklarının sahip olduğu olasılık dağılımının üstel dağılım olduğu durum için gerçekleştirilmiştir. Çünkü üç ve daha fazla bileşenden oluşan sistemler için stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ , analitik olarak elde edilememektedir.

İki bileşenden oluşan seri sistemlerin stres-dayanıklılık güvenilirlikleri iki alt durum için ayrı ayrı ele alınmıştır. İlk olarak seri sistemin tek bir strese maruz kaldığı durumda, ikinci olarak da seri sistemin başka bir iki bileşenli seri bağlı strese maruz kaldığı durumda stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin nasıl elde edildiğine değinilmiştir. Ayrıca  $R$ 'nin tahmini için alınan örneklemlerin maskeli olmaları durumunda  $R$ 'nin en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Son olarak bir simülasyon çalışması ile en çok olabilirlik tahmin edicileri ortalama yan ve ortalama HKO(Hata kareler ortalaması) değerleri açısından incelenmiş ve tahmini riskler açısından Bayes tahmin edicisi ile kıyaslanmıştır. Burada bahsedilen ve daha sonra bahsedilecek olan tahmini riskler, simülasyonun her bir tekrarında elde edilen karesel kayıp değerlerinin ortalaması olarak hesaplanmaktadır.

İki bileşenden oluşan seri sistemlerde stres-dayanıklılık güvenilirliğinin incelenmesi amacıyla iki bileşenli seri bir sistem göz önüne alınsın ve sistemin dayanıklılığı  $X$  ve bozulma gerçekleştiğinde bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığı  $S$  ile gösterilsin. Bu durumda,

- Sistemin bozulmasına 1. bileşen neden olduğunda

$$S = \{1\}$$

- Sistemin bozulmasına 2. bileşen neden olduğunda

$$S = \{2\}$$

- Sistemin bozulmasına neden olan bileşen bilinmiyorsa

$$S = \{1, 2\}$$

olacaktır. Sistemin bozulmasının hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenemediğinde (maskelendiğinde, yani  $S = \{1, 2\}$  durumunda)  $X$  'e “maskeli rasgele değişken” denir.

Bunun gibi birbirinden bağımsız çalışan, iki bileşenli ve bileşenlerinin dayanıklılıklarının dağılımı üstel olan  $n$  tane seri sistem düşünölsün. Bu seri sistemler için,

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemin dayanıklılığını

$S_i, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemde bozulmaya sebep olan bileşen(ler)i

$T_{1i}, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemdeki 1. bileşenin dayanıklılığını

$T_{2i}, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemdeki 2. bileşenin dayanıklılığını

gösterebilirsin.

Ayrıca  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n}, f_1(t_1; \theta_1) = \theta_1 e^{-\theta_1 t_1}, \theta_1 > 0, t_1 > 0$  olasılık yoğunluk fonksiyonlu ve  $F_1(t_1; \theta_1) = 1 - e^{-\theta_1 t_1}$  dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler ve  $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n}, f_2(t_2; \theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 t_2}, \theta_2 > 0, t_2 > 0$  olasılık yoğunluk fonksiyonlu  $F_2(t_2; \theta_2) = 1 - e^{-\theta_2 t_2}$  dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere  $T_{1i}$  ile  $T_{2i}, i = 1, 2, \dots, n$  de birbirinden bağımsız r.d.'ler olsun.  $i$ . sistemin dayanıklılığı,

$$X_i = \min \{T_{1i}, T_{2i}\}, i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere 1., 2., ...,  $n$ . sistem için gözlenebilen nicelikler olan sistemin dayanıklılıkları ve sistemin bozulmasına sebep olan bileşen(ler) sırasıyla  $(X_1, S_1), (X_2, S_2), \dots, (X_n, S_n)$  ile gösterilebilirsin.

Bu  $n$  tane sistemin  $n_1$  tanesinin bozulma nedeninin birinci bileşenden,  $n_2$  tanesinin ikinci bileşenden kaynaklandığı gözlenip,  $n_3$  tanesinin hangi bileşenden kaynaklandığının gözlenemediği varsayılabilirsin ( $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ). Bu durumda  $(X_1, S_1), (X_2, S_2), \dots, (X_n, S_n)$  örnekleminde  $S_i = \{1\}$  olanlar  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$  ile,  $S_i = \{2\}$  olanlar  $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$  ile ve  $S_i = \{1, 2\}$  olanlar  $X_{31}, X_{32}, \dots, X_{3n_3}$  ile gösterilmek üzere  $(X_1, S_1), (X_2, S_2), \dots, (X_n, S_n)$  örneklemini

$$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}, X_{31}, X_{32}, \dots, X_{3n_3} \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilebilir.

(3.1) ile gösterilen maskeli örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j \in S_i} f_j(x_i) (1 - F_{3-j}(x_i)) \right) \quad (3.2)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.2) ile verilen olabilirlik fonksiyonu (3.1) örnekleminin bağlı olarak daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n_1} f_1(x_{1i}) (1 - F_2(x_{1i})) \prod_{i=1}^{n_2} f_2(x_{2i}) (1 - F_1(x_{2i})) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n_3} [f_1(x_{3i}) (1 - F_2(x_{3i})) + f_2(x_{3i}) (1 - F_1(x_{3i}))] \\ &= \theta_1 e^{-\theta_1 x_{11}} e^{-\theta_2 x_{11}} \theta_1 e^{-\theta_1 x_{12}} e^{-\theta_2 x_{12}} \dots \theta_1 e^{-\theta_1 x_{1n_1}} e^{-\theta_2 x_{1n_1}} \\ &\quad \times \theta_2 e^{-\theta_2 x_{21}} e^{-\theta_1 x_{21}} \theta_2 e^{-\theta_2 x_{22}} e^{-\theta_1 x_{22}} \dots \theta_2 e^{-\theta_2 x_{2n_2}} e^{-\theta_1 x_{2n_2}} \\ &\quad \times [\theta_1 e^{-\theta_1 x_{31}} e^{-\theta_2 x_{31}} + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{31}} e^{-\theta_1 x_{31}}] [\theta_1 e^{-\theta_1 x_{32}} e^{-\theta_2 x_{32}} + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{32}} e^{-\theta_1 x_{32}}] \\ &\quad \times \dots [\theta_1 e^{-\theta_1 x_{3n_3}} e^{-\theta_2 x_{3n_3}} + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{3n_3}} e^{-\theta_1 x_{3n_3}}] \\ &= \theta_1^{n_1} e^{-(\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}} \theta_2^{n_2} e^{-(\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}} (\theta_1 + \theta_2)^{n_3} e^{-(\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^{n_3} x_{3i}} \\ &= \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2} (\theta_1 + \theta_2)^{n_3} e^{-(\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned} \quad (3.3)$$

olarak ifade edilebilir.

### 3.1. Tekli Stres Durumu

Bu kesimde iki bileşenli bir seri sistemin bir stres altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliği incelenecektir. Burada sistemin bileşenlerinin dayanıklılıkları  $T_1$  ve  $T_2$  'nin bağımsız ve sırasıyla  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  parametrelili üstel dağılıma sahip olduğu ve bu sistemin

maruz kaldığı  $Y$  stresinin de  $\beta$  parametrelili üstel dağılım olduğu varsayılmıştır. Bu durumda sistemin dayanıklılığı  $X$  r.d. ile ifade edilirse

$$X = \min \{T_1, T_2\} \quad (3.4)$$

şeklinde olacaktır.  $T_1$  ve  $T_2$  r.d.'lerinin o.y.f.'ları ve dağılım fonksiyonları

$$f_1(t_1; \theta_1) = \theta_1 e^{-\theta_1 t_1}, \quad \theta_1 > 0, t_1 > 0 \quad \text{ve} \quad F_1(t_1) = 1 - e^{-\theta_1 t_1} \quad (3.5)$$

$$f_2(t_2; \theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 t_2}, \quad \theta_2 > 0, t_2 > 0 \quad \text{ve} \quad F_2(t_2) = 1 - e^{-\theta_2 t_2} \quad (3.6)$$

şeklinde olduğundan  $X$  r.d.'nin yani iki bileşenli seri sistemin yaşam zamanının dağılım fonksiyonu (2.5) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - [(1 - F_1(x))(1 - F_2(x))] \\ &= 1 - e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

ve buradan  $X$  r.d.'nin o.y.f.

$$f_X(x) = (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}, \quad x > 0 \quad (3.8)$$

olacaktır. Buradan görülüyor ki  $X$  r.d.'i  $\theta_1 + \theta_2$  parametrelili üstel dağılıma sahiptir. Ayrıca  $Y$  stresi  $\beta$  parametrelili üstel dağılıma sahip olduğundan  $Y$ 'nin o.y.f. ve dağılım fonksiyonu sırasıyla

$$f_Y(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y > 0 \quad (3.9)$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\beta y}, \quad y > 0 \quad (3.10)$$

şeklinde olacaktır. Buna göre, dayanıklılığı  $X$  ile ifade edilen böyle bir sistemin bir  $Y$  stresi altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliği

$$\begin{aligned}
R &= P(Y < X) \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^x f_X(x) f_Y(y) dy dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) F_Y(x) dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} ((\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}) (1 - e^{-\beta x}) dx \\
&= \frac{\beta}{\theta_1 + \theta_2 + \beta}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir. Bundan sonraki kısımda, Eşitlik (3.11) ile elde edilen  $R = \frac{\beta}{\theta_1 + \theta_2 + \beta}$  stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri üzerinde durulacaktır.

### 3.1.1. En çok olabilirlik tahmini

Stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin maskeli verilere dayalı en çok olabilirlik tahmininin elde edilebilmesi için iki bileşenli  $n$  seri sistemden oluşan  $\mathbf{X}$  maskeli örnekleme ve  $m$  gözlemden oluşan ve  $\mathbf{X}$ 'den bağımsız olan  $\mathbf{Y}$  örnekleme ele alınsın. Bu durumda  $\mathbf{X}$  maskeli örnekleme ve  $\mathbf{Y}$  örnekleme sırasıyla

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}, X_{31}, X_{32}, \dots, X_{3n_3}) \\
\mathbf{Y} &= (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)
\end{aligned}$$

olmak üzere  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
L(\theta_1, \theta_2, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{x}) L(\beta | \mathbf{y}) \\
&= \prod_{i=1}^{n_1} f_1(x_{1i}) (1 - F_2(x_{1i})) \prod_{i=1}^{n_2} f_2(x_{2i}) (1 - F_2(x_{2i})) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{n_3} [f_1(x_{3i}) (1 - F_2(x_{3i})) + f_2(x_{3i}) (1 - F_1(x_{3i}))] \\
&\quad \times \prod_{i=1}^m f_Y(y_i) \\
&= \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2} (\theta_1 + \theta_2)^{n_3} \beta^m e^{-(\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\beta \sum_{i=1}^m y_i}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak elde edilmektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$$\ell(\theta) = n_1 \ln \theta_1 + n_2 \ln(\theta_2) + n_3 \ln(\theta_1 + \theta_2) - (\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^n x_i + m \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^m y_i \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu  $\ell(\theta)$ 'nin parametrelere göre türevleri,

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{n_1}{\theta_1} + \frac{n_3}{\theta_1 + \theta_2} - \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{n_2}{\theta_2} + \frac{n_3}{\theta_1 + \theta_2} - \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta} - \sum_{i=1}^m y_i \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. Buna göre olabilirlik denklemlerinin

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_2} \right|_{\theta_2 = \hat{\theta}_2} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} \right|_{\beta = \hat{\beta}} = 0$$

olduğu düşünülürdüğünde bu denklemlerden  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  ve  $\hat{\beta}$ ,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n n_1}{(n_1 + n_2) \sum_{i=1}^n x_i} \quad (3.17)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n n_2}{(n_1 + n_2) \sum_{i=1}^n x_i} \quad (3.18)$$



$$\hat{\beta} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m y_i} \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilir. Buradan EÇO tahmin edicisinin invaryantlık özelliği kullanılarak (3.11) eşitliğindeki stres- dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicisi  $\hat{R}_{EÇO}$ ,

$$\hat{R}_{EÇO} = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\beta}} \quad (3.20)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.20)'de, Eşitlik (3.17), (3.18) ve (3.19) ile elde edilen  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  ve  $\hat{\beta}$  yerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılarak yeniden düzenlenirse  $\hat{R}_{EÇO}$ ,

$$\hat{R}_{EÇO} = \frac{m / \sum_{i=1}^m y_i}{n / \sum_{i=1}^n x_i + m / \sum_{i=1}^m y_i} \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.21)'den görüldüğü üzere, stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi, sistem bileşenlerinin dayanıklılıklarının ve maruz kalınan stresin üstel olması durumunda alınan örneklemin maskeli olup olmamasına bağlı değildir.

### 3.1.1.1. Simülasyon

Bu kesimde (3.11) eşitliğinde elde edilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin (3.20) eşitliği ile verilen en çok olabilirlik tahmin edicisinin yan ve HKO açısından performansı bir simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Sonuçlar çeşitli  $n, m$  ve maskeleme oranı  $p$  için 10000 tekrarla elde edilmiştir.

Çizelge (3.1)'de  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5$  ve  $\beta = 5$  durumunda  $R$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi için simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama HKO değerleri

verilmiştir. Çizelge (3.2)'de aynı sonuçlar  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5$  ve  $\beta = 3$  durumu için, Çizelge (3.3)'de ise aynı sonuçlar  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3$  ve  $\beta = 3$  durumu için elde edilmiştir.

**Çizelge 3.1.**  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta = 5$  için simülasyon sonuçları

$(n, m)$	$p$	$R$	Ortalama EÇO tahmini	Ortalama yan	HKO
(10,5)	0	0.3333	0.3545	0.0212	0.0156
	0.5	0.3333	0.3561	0.0228	0.0164
	0.8	0.3333	0.3526	0.0192	0.0155
(10,10)	0	0.3333	0.3408	0.0074	0.0096
	0.5	0.3333	0.3397	0.0063	0.0097
	0.8	0.3333	0.3422	0.0088	0.0100
(20,20)	0	0.3333	0.3374	0.0041	0.0050
	0.5	0.3333	0.3357	0.0024	0.0048
	0.8	0.3333	0.3357	0.0024	0.0048
(20,50)	0	0.3333	0.3318	-0.0016	0.0034
	0.5	0.3333	0.3334	0.0000	0.0034
	0.8	0.3333	0.3326	-0.0007	0.0034
(50,50)	0	0.3333	0.3352	0.0019	0.0020
	0.5	0.3333	0.3351	0.0017	0.0020
	0.8	0.3333	0.3345	0.0011	0.0020

Çizelge (3.1)'de sistemin bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1, \theta_2$  ve stresin bozulma oranı  $\beta$ 'nin birbirine eşit olduğu durum ele alınmıştır. Buna göre,  $n$  ve  $m$  arttıkça ortalama yan ve HKO azalmaktadır. Sistemdeki maskeleme oranı ( $p$ ) değiştirildiğinde ise bu değerlerin beklenildiği üzere değişmediği görülmektedir.

**Çizelge 3.2.**  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta = 3$  için simülasyon sonuçları

$(n,m)$	$p$	$R$	Ortalama EÇO tahmini	Ortalama yan	HKO
(10,5)	0	0.2308	0.2545	0.0238	0.0112
	0.5	0.2308	0.2537	0.0230	0.0120
	0.8	0.2308	0.2552	0.0244	0.0117
(10,10)	0	0.2308	0.2386	0.0078	0.0067
	0.5	0.2308	0.2400	0.0093	0.0067
	0.8	0.2308	0.2410	0.0102	0.0067
(20,20)	0	0.2308	0.2365	0.0057	0.0032
	0.5	0.2308	0.2359	0.0051	0.0033
	0.8	0.2308	0.2360	0.0053	0.0033
(20,50)	0	0.2308	0.2312	0.0004	0.0022
	0.5	0.2308	0.2313	0.0005	0.0022
	0.8	0.2308	0.2315	0.0008	0.0022
(50,50)	0	0.2308	0.2326	0.0018	0.0012
	0.5	0.2308	0.2321	0.0014	0.0013
	0.8	0.2308	0.2325	0.0018	0.0013

Çizelge (3.2)'de sistemin bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1$  ve  $\theta_2$ 'nin eşit(sistem bileşenleri özdeş), stresin bozulma oranı  $\beta$ 'nin bunlardan farklı olduğu durum ele alınmıştır. Bu durumda da Çizelge (3.1)'deki ile benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 3.3.  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3, \beta = 3$  için simülasyon sonuçları

$(n,m)$	$p$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(10,5)	0	0.2727	0.2945	0.0217	0.0133
	0.5	0.2727	0.2960	0.0233	0.0137
	0.8	0.2727	0.2956	0.0229	0.0137
(10,10)	0	0.2727	0.2815	0.0087	0.0081
	0.5	0.2727	0.2809	0.0082	0.0080
	0.8	0.2727	0.2815	0.0088	0.0081
(20,20)	0	0.2727	0.2783	0.0056	0.0041
	0.5	0.2727	0.2762	0.0034	0.0040
	0.8	0.2727	0.2769	0.0041	0.0040
(20,50)	0	0.2727	0.2737	0.0009	0.0027
	0.5	0.2727	0.2720	-0.0007	0.0027
	0.8	0.2727	0.2725	-0.0002	0.0028
(50,50)	0	0.2727	0.2743	0.0015	0.0016
	0.5	0.2727	0.2743	0.0016	0.0016
	0.8	0.2727	0.2748	0.0021	0.0016

Çizelge (3.3)'de ise sistemin bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1$  ve  $\theta_2$ 'nin birbirinden farklı olduğu durum(sistem bileşenlerinin özdeş olmadığı durum) ele alınmıştır. Burada da, Çizelge (3.1)'deki ile benzer sonuçlar elde edilmiştir.

### 3.1.2. Bayes tahmini

Burada, iki bileşenli seri sistemler için stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli verilere dayalı Bayes tahmini için  $\theta_1$ 'in  $(\gamma_1, \delta_1)$  parametrelili Gamma,  $\theta_2$ 'nin  $(\gamma_2, \delta_2)$  parametrelili Gamma,  $\beta$ 'nin  $(\rho, \psi)$  parametrelili Gamma önsel(prior) dağılımlarına sahip rasgele değişkenler olduğu varsayılmıştır. Bu durumda  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$ 'nin önsel dağılımları,

$$\pi(\theta_1) = \frac{\delta_1^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \theta_1^{\gamma_1-1} e^{-\delta_1 \theta_1}, \theta_1 > 0 \quad (3.22)$$

$$\pi(\theta_2) = \frac{\delta_2^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2)} \theta_2^{\gamma_2-1} e^{-\delta_2 \theta_2}, \theta_2 > 0 \quad (3.23)$$

$$\pi(\beta) = \frac{\psi^\rho}{\Gamma(\rho)} \beta^{\rho-1} e^{-\psi\beta}, \beta > 0 \quad (3.24)$$

olacaktır. Stres-dayanıklılık güvenilirliğinin Bayes tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{Bayes} &= \frac{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} R f(x, y, \theta_1, \theta_2, \beta) d\theta}{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} f(x, y, \theta_1, \theta_2, \beta) d\theta} \\ &= \frac{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} u(\theta_1, \theta_2, \beta) e^{\ell(\theta_1, \theta_2, \beta) + G(\theta_1, \theta_2, \beta)} d\theta}{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} e^{\ell(\theta_1, \theta_2, \beta) + G(\theta_1, \theta_2, \beta)} d\theta} \end{aligned} \quad (3.25)$$

olarak elde edilir. (3.25) eşitliğindeki  $u(\theta_1, \theta_2, \beta)$ ,  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$ 'nin bir fonksiyonu olup

$$u(\theta_1, \theta_2, \beta) = R = \frac{\beta}{\theta_1 + \theta_2 + \beta} \quad (3.26)$$

dir.  $\ell(\theta_1, \theta_2, \beta)$  ise, (3.13) eşitliği ile verilen olabilirlik fonksiyonunun logaritması olup

$$\begin{aligned} \ell(\theta_1, \theta_2, \beta) &= n_1 \ln \theta_1 + n_2 \ln \theta_2 + n_3 \ln(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad - (\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^n x_i + m \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^m y_i \end{aligned} \quad (3.27)$$

dir.  $G(\theta_1, \theta_2, \beta)$ , ortak önsel dağılımın logaritmasıdır ve

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2, \beta) &= \ln \frac{\delta_1^{\gamma_1} \delta_2^{\gamma_2} \psi^{\rho_1} \psi^{\rho}}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\rho)} + (\gamma_1 - 1) \ln \theta_1 + (\gamma_2 - 1) \ln \theta_2 \\ &\quad + (\rho - 1) \ln \beta - \delta_1 \theta_1 - \delta_2 \theta_2 - \psi \beta \end{aligned} \quad (3.28)$$

olarak elde edilmiştir.

Stres-dayanıklılık güvenilirliğinin Bayes tahmininin elde edildiği eşitlik (3.25)'de integralin elde edilmesi oldukça karmaşık olacağından stres-dayanıklılık güvenilirliğinin yaklaşık Bayes tahmini için Lindley'in yaklaşımının kullanılması tercih edilmiştir. Buna göre eşitlik (3.25) ile verilen Bayes tahmini, eşitlik (2.27) ile verilen Lindley yaklaşım metodu kullanılarak

$$\hat{R}_{Bayes} \cong u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (u_{ij} + 2u_i g_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \ell_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \quad (3.29)$$

ile elde edilir. Eşitlik (3.29)'daki toplamlar açıldıktan ve sıfır çıkan türevler atıldıktan sonra yapılan düzenlemeler sonucunda  $R$ 'nin yaklaşık Bayes tahmini,

$$\hat{R}_{Bayes} \cong \left\{ \begin{array}{l} u(\theta_1, \theta_2, \beta) + (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\ + \frac{1}{2} [A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12}) + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22}) + C] \end{array} \right\} \Bigg|_{\substack{\theta_1 = \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 = \hat{\theta}_2 \\ \beta = \hat{\beta}}} \quad (3.30)$$

olarak hesaplanabilir. Eşitlik (3.30)'daki  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  ve  $\hat{\beta}$  sırasıyla  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$ 'nin EÇÖ tahminleridir.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ve  $\alpha_4$  sırasıyla

$$\begin{aligned} \alpha_i &= g_1 \sigma_{i1} + g_2 \sigma_{i2}, i = 1, 2 \\ \alpha_3 &= g_3 \sigma_{33} \\ \alpha_4 &= u_{12} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} (u_{11} \sigma_{11} + u_{22} \sigma_{22} + u_{33} \sigma_{33})$$

dir.  $\sigma_{ij}$ 'ler,  $[-\ell_{ij}]$  matrisinin tersinin elemanları olmak üzere

$$\sigma_{ij} = [-\ell_{ij}]^{-1}, i, j = 1, 2, 3 \quad (3.32)$$

olarak ifade edilebilir.  $A, B$  ve  $C$  ise sırasıyla

$$A = \ell_{111}\sigma_{11} + \ell_{121}\sigma_{12} + \ell_{221}\sigma_{22} + \ell_{211}\sigma_{21}$$

$$B = \ell_{112}\sigma_{11} + \ell_{122}\sigma_{12} + \ell_{222}\sigma_{22} + \ell_{212}\sigma_{21} \quad (3.33)$$

$$C = \ell_{333}u_3\sigma_{33}\sigma_{33}$$

olarak elde edilmektedir. (3.30), (3.31), (3.32) ve (3.33) eşitliklerinin sağ tarafındaki 1,2 ve 3 indisleri sırasıyla  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$  parametrelerini temsil etmektedir. Ayrıca  $\theta$ 'nın yaklaşık Bayes tahmininin elde edildiği Eşitlik (3.29)'daki türevler,

$$\ell_{11} = -\frac{n_1}{\theta_1^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$\ell_{22} = -\frac{n_2}{\theta_2^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$\ell_{33} = -\frac{m}{\beta^2}$$

$$\ell_{12} = \ell_{21} = -\frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$\ell_{13} = \ell_{31} = 0$$

$$\ell_{23} = \ell_{32} = 0$$

$$\ell_{111} = \frac{2n_1}{\theta_1^3} + \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$\ell_{222} = \frac{2n_2}{\theta_2^3} + \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$\ell_{333} = \frac{2m}{\beta^3}$$

$$\ell_{112} = \ell_{121} = \ell_{211} = \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$\ell_{113} = \ell_{131} = \ell_{311} = 0$$

$$\ell_{122} = \ell_{212} = \ell_{221} = \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$\ell_{322} = \ell_{232} = \ell_{223} = 0$$

$$l_{323} = l_{332} = l_{233} = 0$$

$$l_{331} = l_{313} = l_{133} = 0$$

$$l_{123} = l_{132} = l_{213} = l_{231} = l_{312} = l_{321} = 0$$

$$g_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{\theta_1} - \delta_1$$

$$g_2 = \frac{\gamma_2 - 1}{\theta_2} - \delta_2$$

$$g_3 = \frac{\rho - 1}{\beta} - \psi$$

$$u_1 = -\frac{\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^2}$$

$$u_2 = -\frac{\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^2}$$

$$u_3 = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 + \beta} - \frac{\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^2}$$

$$u_{11} = \frac{2\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^3}$$

$$u_{22} = \frac{2\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^3}$$

$$u_{33} = -\frac{2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^2} + \frac{2\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^3}$$

$$u_{12} = u_{21} = \frac{2\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^3}$$

$$u_{13} = u_{31} = -\frac{1}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^2} + \frac{2\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^3}$$

$$u_{23} = u_{32} = -\frac{1}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^2} + \frac{2\beta}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta)^3}$$



$$[\ell_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{n_1}{\theta_1^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & -\frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & 0 \\ -\frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & -\frac{n_2}{\theta_2^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir.

### 3.1.2.1. Simülasyon

Bu kesimde (3.11) eşitliğinde verilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin (3.20) eşitliği ile verilen en çok olabilirlik ve (3.29) eşitliği ile verilen ve Lindley'in yöntemi ile elde edilen yaklaşık Bayes tahmin edicileri bir simülasyon çalışması ile tahmini riskler açısından kıyaslanmıştır. 10000 tekrar sonucunda çeşitli  $n, m, p$  ve prior parametreleri için her iki tahmin ediciye ilişkin elde edilen tahmini risk değerleri Çizelge (3.4) ve Çizelge (3.5)'de verilmiştir.

**Çizelge 3.4.**  $\gamma_1 = 2, \delta_1 = 2, \gamma_2 = 1, \delta_2 = 1, \rho = 1, \psi = 1$  için tahmini risk değerleri

$(n, m)$	$p$	EÇÖ tahmini için tahmini riskler	Bayes tahmini için tahmini riskler
(10,5)	0	0.0104	0.0086
	0.5	0.0109	0.0090
	0.8	0.0109	0.0093
(10,10)	0	0.0066	0.0058
	0.5	0.0070	0.0060
	0.8	0.0068	0.0059
(20,20)	0	0.0034	0.0032
	0.5	0.0034	0.0031
	0.8	0.0034	0.0031
(20,50)	0	0.0024	0.0022
	0.5	0.0024	0.0022
	0.8	0.0024	0.0021
(50,50)	0	0.0014	0.0013
	0.5	0.0014	0.0013
	0.8	0.0013	0.0013

Çizelge (3.4)'e göre  $n$  ve  $m$  arttıkça  $R$ 'nin hem EÇO tahmininde hem de Bayes tahmininde tahmini riskler açısından azalma olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, sistemdeki maskeleye oranı arttıkça her iki tahminde de genel olarak tahmini risklerin değişmediği gözlenmiştir. Bunlardan daha da önemlisi, EÇO ve Bayes tahminlerinin risklerine bakıldığında, her durum için Bayes tahminlerinin risklerinin EÇO tahminlerinin risklerinden daha küçük olduğu görülmektedir. Özellikle  $n$  ve  $m$ 'nin küçük değerleri için EÇO ve Bayes tahminlerinin risk değerleri arasındaki fark daha büyüktür. Doğal olarak  $n$  ve  $m$  değeri büyüdükçe bu fark azalmaktadır. Bu durumda stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin tahmininde,  $n$  ve  $m$ 'nin küçük değerleri için Bayes tahminlerinin, büyük değerleri (özellikle  $n > 20$  ve  $m > 20$ ) için ise hesaplama kolaylığı açısından EÇO tahminlerinin elde edilmesinin uygun olacağı söylenebilir.

**Çizelge 3.5.**  $\gamma_1 = 2, \delta_1 = 2, \gamma_2 = 1, \delta_2 = 1, \rho = 2, \psi = 2$  için tahmini risk değerleri

$(n, m)$	$p$	EÇO tahmini için tahmini riskler	Bayes tahmini için tahmini riskler
(10,5)	0	0.0126	0.0109
	0.5	0.0126	0.0108
	0.8	0.0122	0.0108
(10,10)	0	0.0078	0.0066
	0.5	0.0081	0.0069
	0.8	0.0078	0.0066
(20,20)	0	0.0039	0.0035
	0.5	0.0040	0.0036
	0.8	0.0040	0.0037
(20,50)	0	0.0026	0.0024
	0.5	0.0027	0.0025
	0.8	0.0027	0.0025
(50,50)	0	0.0016	0.0015
	0.5	0.0016	0.0015
	0.8	0.0016	0.0015

Çizelge (3.5)'de stresin önsel parametreleri değiştirilerek tahmini riskler yeniden incelenmiştir. Simülasyon sonuçlarına bakıldığında, Çizelge (3.4)'dekine benzer sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

### 3.2. İkili Stres Durumu

Bu bölümde, iki bileşenli bir seri sistemin başka bir iki bileşenli seri bağlı bir strese maruz kaldığı durum için stres-dayanıklılık güvenilirliği incelenecektir. Burada sistemin bileşenlerinin dayanıklılıkları  $T_1$  ve  $T_2$ 'nin bağımsız ve sırasıyla  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  parametrelili üstel dağılıma sahip olduğu ve bu sistemin maruz kaldığı  $Y$  stresinin de bileşenleri  $V_1$  ve  $V_2$ 'nin bağımsız ve sırasıyla  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  parametrelili üstel dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Bu durumda sistemin dayanıklılığı,  $X$  r.d. ile ve bu sistemin maruz kaldığı stres de  $Y$  r.d. ile ifade edilirse

$$X = \min \{T_1, T_2\} \quad (3.34)$$

ve

$$Y = \min \{V_1, V_2\} \quad (3.35)$$

şeklinde olacaktır.  $T_1, T_2, V_1$  ve  $V_2$  r.d.'lerinin o.y.f.'ları ve dağılım fonksiyonları

$$f_1(t_1; \theta_1) = \theta_1 e^{-\theta_1 t_1}, \quad \theta_1 > 0, t_1 > 0 \quad \text{ve} \quad F_1(t_1) = 1 - e^{-\theta_1 t_1} \quad (3.36)$$

$$f_2(t_2; \theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 t_2}, \quad \theta_2 > 0, t_2 > 0 \quad \text{ve} \quad F_2(t_2) = 1 - e^{-\theta_2 t_2} \quad (3.37)$$

$$h_1(v_1; \beta_1) = \beta_1 e^{-\beta_1 v_1}, \quad \beta_1 > 0, v_1 > 0 \quad \text{ve} \quad H_1(v_1) = 1 - e^{-\beta_1 v_1} \quad (3.38)$$

$$h_2(v_2; \beta_2) = \beta_2 e^{-\beta_2 v_2}, \quad \beta_2 > 0, v_2 > 0 \quad \text{ve} \quad H_2(v_2) = 1 - e^{-\beta_2 v_2} \quad (3.39)$$

şeklinde olduğundan  $X$  ve  $Y$  rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları (2.5) eşitliğine göre sırasıyla,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - [(1 - F_1(x))(1 - F_2(x))] \\ &= 1 - e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= 1 - \left[ (1 - H_1(y))(1 - H_2(y)) \right] \\
&= 1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)y}, \quad y > 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

olmakta ve buradan  $X$  ve  $Y$  r.d.'lerinin o.y.f. sırasıyla,

$$f_X(x) = (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}, \quad x > 0 \tag{3.42}$$

$$f_Y(y) = (\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)y}, \quad y > 0 \tag{3.43}$$

şeklinde olacaktır. Eşitlik (3.40) ve (3.42)'den görülüyor ki  $X$  r.d.'i  $\theta_1 + \theta_2$  parametrelili üstel dağılıma ve Eşitlik (3.41) ve (3.43)'den görülüyor ki  $Y$  r.d.'i  $\beta_1 + \beta_2$  parametrelili üstel dağılıma sahiptir. Buna göre dayanıklılığı  $X$  ile ifade edilen iki bileşenli böyle bir sistemin, iki bileşenli bir  $Y$  stresi altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliği

$$\begin{aligned}
R &= P(Y < X) \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^x f_X(x) f_Y(y) dy dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) F_Y(x) dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} ((\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}) (1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)x}) dx \\
&= \frac{\beta_1 + \beta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

olarak elde edilir. Bundan sonraki kesimde, eşitlik (3.44) ile elde edilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri üzerinde durulacaktır.

### 3.2.1. En çok olabilirlik tahmini

Stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin maskeli verilere dayalı en çok olabilirlik tahmininin elde edilebilmesi için iki bileşenli  $n$  seri sistemden oluşan  $\mathbf{X}$  maskeli örnekleme ve iki bileşenli  $m$  seri sistemden oluşan ve  $\mathbf{X}$ 'den bağımsız olan  $\mathbf{Y}$  maskeli örnekleme ele alınsın. Bu durumda  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Y}$  maskeli örneklemleri sırasıyla

$$\mathbf{X} = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}, X_{31}, X_{32}, \dots, X_{3n_3}) \quad (3.45)$$

ve

$$\mathbf{Y} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1m_1}, Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2m_2}, Y_{31}, Y_{32}, \dots, Y_{3m_3}) \quad (3.46)$$

olmak üzere  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  örnekleminin olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{x}) L(\beta_1, \beta_2 | \mathbf{y}) \\ &= \prod_{i=1}^{n_1} f_1(x_{1i})(1 - F_2(x_{1i})) \prod_{i=1}^{n_2} f_2(x_{2i})(1 - F_1(x_{2i})) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n_3} [f_1(x_{3i})(1 - F_2(x_{3i})) + f_2(x_{3i})(1 - F_1(x_{3i}))] \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{m_1} h_1(y_{1i})(1 - H_2(y_{1i})) \prod_{i=1}^{m_2} h_2(y_{2i})(1 - H_1(y_{2i})) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{m_3} [h_1(y_{3i})(1 - H_2(y_{3i})) + h_2(y_{3i})(1 - H_1(y_{3i}))] \\ &= \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2} (\theta_1 + \theta_2)^{n_3} \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \\ &\quad \times (\beta_1 + \beta_2)^{m_3} e^{-\theta_1 - \theta_2} \sum_{i=1}^n x_i e^{-(\beta_1 + \beta_2) \sum_{i=1}^m y_i} \end{aligned} \quad (3.47)$$

olarak elde edilmektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= n_1 \ln \theta_1 + n_2 \ln(\theta_2) + n_3 \ln(\theta_1 + \theta_2) - (\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^n x_i \\ &\quad \times m_1 \ln \beta_1 + m_2 \ln(\beta_2) + m_3 \ln(\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1 + \beta_2) \sum_{i=1}^m y_i \end{aligned} \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu  $\ell(\theta)$ 'nin parametrelere göre türevleri,

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{n_1}{\theta_1} + \frac{n_3}{\theta_1 + \theta_2} - \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{n_2}{\theta_2} + \frac{n_3}{\theta_1 + \theta_2} - \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_1} = \frac{m_1}{\beta_1} + \frac{m_3}{\beta_1 + \beta_2} - \sum_{i=1}^m y_i \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_2} = \frac{m_2}{\beta_2} + \frac{m_3}{\beta_1 + \beta_2} - \sum_{i=1}^m y_i \quad (3.52)$$

olarak elde edilir. Buna göre olabilirlik denklemlerinin

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_2} \right|_{\theta_2 = \hat{\theta}_2} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_1} \right|_{\beta_1 = \hat{\beta}_1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_2} \right|_{\beta_2 = \hat{\beta}_2} = 0$$

olduğu düşünülürdüğünde bu denklemlerden  $\theta_1, \theta_2, \beta_1$  ve  $\beta_2$  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_1$  ve  $\hat{\beta}_2$  sırasıyla,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n n_1}{(n_1 + n_2) \sum_{i=1}^n x_i} \quad (3.53)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n n_2}{(n_1 + n_2) \sum_{i=1}^n x_i} \quad (3.54)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{m m_1}{(m_1 + m_2) \sum_{i=1}^m y_i} \quad (3.55)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{m m_2}{(m_1 + m_2) \sum_{i=1}^m y_i} \quad (3.56)$$

şeklinde elde edilir. Buradan EÇO tahmin edicisinin invaryantlık özelliği kullanılarak (3.44) eşitliğindeki stres- dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicisi  $\hat{R}_{EÇO}$ ,

$$\hat{R}_{EÇO} = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2} \quad (3.57)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.57)'de Eşitlik (3.53), (3.54), (3.55) ve (3.56) ile elde edilen  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_1$  ve  $\hat{\beta}_2$  yerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılarak yeniden düzenlenirse,

$$\hat{R}_{EÇO} = \frac{m / \sum_{i=1}^m y_i}{n / \sum_{i=1}^n x_i + m / \sum_{i=1}^m y_i} \quad (3.58)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.58)'den görüldüğü üzere, stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi, sistem bileşenlerinin dayanıklılıklarının ve maruz kalınan stresin üstel olması durumunda alınan örneklemin maskeli olup olmamasına bağlı değildir.

### 3.2.1.1. Simülasyon

Bu kesimde (3.44) eşitliğinde elde edilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin (3.57) eşitliği ile verilen en çok olabilirlik tahmin edicisinin yan ve HKO açısından performansı bir simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Sonuçlar çeşitli  $n, m$  ve maskeleme oranları  $p_1$  ( $X$ 'in maskeleme oranı) ve  $p_2$  ( $Y$ 'nin maskeleme oranı) için 10000 tekrarlar elde edilmiştir.

Çizelge (3.6)'da  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta_1 = 5, \beta_2 = 5$  durumunda, Çizelge (3.7)'de  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta_1 = 3, \beta_2 = 3$  durumunda, Çizelge (3.8)'de  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3, \beta_1 = 5, \beta_2 = 3$

durumunda ve Çizelge (3.9)'da  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3, \beta_1 = 5, \beta_2 = 5$  durumunda  $R$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi için simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama HKO değerleri verilmiştir.



Çizelge 3.6.  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta_1 = 5, \beta_2 = 5$  için simülasyon sonuçları

$(n, m)$	$(p_1, p_2)$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(20,20)	(0,0)	0.5000	0.5001	0.0001	0.0061
	(0,0.2)	0.5000	0.4998	-0.0002	0.0060
	(0,0.5)	0.5000	0.4998	-0.0012	0.0061
	(0,0.8)	0.5000	0.5002	0.0002	0.0061
	(0.5,0)	0.5000	0.4992	-0.0008	0.0061
	(0.5,0.2)	0.5000	0.5000	-0.0000	0.0062
	(0.5,0.5)	0.5000	0.5000	0.0000	0.0061
	(0.5,0.8)	0.5000	0.5005	0.0005	0.0062
	(0.8,0)	0.5000	0.4998	-0.0002	0.0059
	(0.8,0.2)	0.5000	0.5004	0.0004	0.0062
	(0.8,0.5)	0.5000	0.5002	0.0002	0.0059
	(0.8,0.8)	0.5000	0.5008	0.0008	0.0060
(20,50)	(0,0)	0.5000	0.4954	-0.0046	0.0043
	(0,0.2)	0.5000	0.4967	-0.0033	0.0043
	(0,0.5)	0.5000	0.4961	-0.0039	0.0043
	(0,0.8)	0.5000	0.4961	-0.0039	0.0042
	(0.5,0)	0.5000	0.4963	-0.0037	0.0044
	(0.5,0.2)	0.5000	0.4969	-0.0031	0.0043
	(0.5,0.5)	0.5000	0.4966	-0.0034	0.0044
	(0.5,0.8)	0.5000	0.4975	-0.0025	0.0043
	(0.8,0)	0.5000	0.4966	-0.0034	0.0043
	(0.8,0.2)	0.5000	0.4975	-0.0025	0.0042
	(0.8,0.5)	0.5000	0.4968	-0.0032	0.0043
	(0.8,0.8)	0.5000	0.4969	-0.0031	0.0044
(50,50)	(0,0)	0.5000	0.5003	0.0003	0.0025
	(0,0.2)	0.5000	0.5011	0.0011	0.0025
	(0,0.5)	0.5000	0.4998	-0.0002	0.0024
	(0,0.8)	0.5000	0.4995	-0.0005	0.0026
	(0.5,0)	0.5000	0.5006	0.0006	0.0025
	(0.5,0.2)	0.5000	0.4999	-0.0001	0.0024
	(0.5,0.5)	0.5000	0.5008	0.0008	0.0025
	(0.5,0.8)	0.5000	0.4998	-0.0002	0.0025
	(0.8,0)	0.5000	0.4994	-0.0006	0.0025
	(0.8,0.2)	0.5000	0.4995	-0.0005	0.0024
	(0.8,0.5)	0.5000	0.4994	-0.0006	0.0024
	(0.8,0.8)	0.5000	0.5004	0.0004	0.0025

Çizelge (3.6)'da sistemin bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1, \theta_2$  ve stresin bileşenlerinin bozulma oranları  $\beta_1, \beta_2$ 'nin birbirine eşit olduğu durum (sistem bileşenlerinin ve stres bileşenlerinin özdeş olduğu durum) ele alınmıştır. Buna göre,  $n$  ve  $m$  arttıkça ortalama yan ve HKO azalmaktadır. Sisteme ilişkin maskeleme oranı ( $p_1$ ) ile strese ilişkin maskeleme oranı ( $p_2$ ) değiştirildiğinde ise bu değerlerin beklenildiği üzere değişmediği görülmektedir.

Çizelge 3.7.  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta_1 = 3, \beta_2 = 3$  için simülasyon sonuçları

$(n, m)$	$(p_1, p_2)$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(20,20)	(0,0)	0.3750	0.3711	0.0021	0.0056
	(0,0.2)	0.3750	0.3777	0.0027	0.0054
	(0,0.5)	0.3750	0.3784	0.0034	0.0054
	(0,0.8)	0.3750	0.3787	0.0037	0.0053
	(0.5,0)	0.3750	0.3783	0.0033	0.0054
	(0.5,0.2)	0.3750	0.3777	0.0027	0.0055
	(0.5,0.5)	0.3750	0.3772	0.0022	0.0054
	(0.5,0.8)	0.3750	0.3771	0.0021	0.0055
	(0.8,0)	0.3750	0.3783	0.0033	0.0055
	(0.8,0.2)	0.3750	0.3778	0.0028	0.0054
	(0.8,0.5)	0.3750	0.3776	0.0026	0.0054
	(0.8,0.8)	0.3750	0.3793	0.0043	0.0054
(20,50)	(0,0)	0.3750	0.3732	-0.0018	0.0038
	(0,0.2)	0.3750	0.3744	-0.0006	0.0037
	(0,0.5)	0.3750	0.3736	-0.0014	0.0038
	(0,0.8)	0.3750	0.3719	-0.0031	0.0039
	(0.5,0)	0.3750	0.3739	-0.0011	0.0038
	(0.5,0.2)	0.3750	0.3741	-0.0009	0.0039
	(0.5,0.5)	0.3750	0.3727	-0.0023	0.0037
	(0.5,0.8)	0.3750	0.3738	-0.0012	0.0038
	(0.8,0)	0.3750	0.3730	-0.0020	0.0038
	(0.8,0.2)	0.3750	0.3732	-0.0018	0.0037
	(0.8,0.5)	0.3750	0.3741	-0.0009	0.0037
	(0.8,0.8)	0.3750	0.3739	-0.0011	0.0037
(50,50)	(0,0)	0.3750	0.3750	-0.0000	0.0022
	(0,0.2)	0.3750	0.3749	-0.0001	0.0021
	(0,0.5)	0.3750	0.3769	0.0019	0.0022
	(0,0.8)	0.3750	0.3757	0.0007	0.0021
	(0.5,0)	0.3750	0.3762	0.0012	0.0022
	(0.5,0.2)	0.3750	0.3760	0.0010	0.0022
	(0.5,0.5)	0.3750	0.3766	0.0016	0.0021
	(0.5,0.8)	0.3750	0.3768	0.0018	0.0022
	(0.8,0)	0.3750	0.3768	0.0018	0.0022
	(0.8,0.2)	0.3750	0.3765	0.0015	0.0022
	(0.8,0.5)	0.3750	0.3762	0.0012	0.0022
	(0.8,0.8)	0.3750	0.3767	0.0017	0.0022

Çizelge (3.7)'de sistem bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1$  ve  $\theta_2$ 'nin eşit(sistem bileşenleri özdeş), stres bileşenlerinin bozulma oranları  $\beta_1$  ve  $\beta_2$ 'nin eşit(stres bileşenleri özdeş) ancak sistem bileşenleri ile stres bileşenlerinin birbirinden farklı olduğu durum(sistem bileşenleri ile stres bileşenlerinin özdeş olmadığı durum) ele alınmıştır. Burada da Çizelge (3.6)'daki ile benzer sonuçların elde edildiği görülmüştür.

Çizelge 3.8.  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3, \beta_1 = 5, \beta_2 = 3$  için simülasyon sonuçları

$(n, m)$	$(p_1, p_2)$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(20,20)	(0,0)	0.5000	0.5008	0.0008	0.0060
	(0,0.2)	0.5000	0.5000	-0.0000	0.0061
	(0,0.5)	0.5000	0.5002	0.0002	0.0061
	(0,0.8)	0.5000	0.5006	0.0006	0.0060
	(0.5,0)	0.5000	0.4996	-0.0004	0.0059
	(0.5,0.2)	0.5000	0.4995	-0.0005	0.0060
	(0.5,0.5)	0.5000	0.5013	0.0013	0.0061
	(0.5,0.8)	0.5000	0.5004	0.0004	0.0061
	(0.8,0)	0.5000	0.5002	0.0002	0.0060
	(0.8,0.2)	0.5000	0.5012	0.0012	0.0061
	(0.8,0.5)	0.5000	0.5005	0.0005	0.0061
	(0.8,0.8)	0.5000	0.4997	-0.0003	0.0062
(20,50)	(0,0)	0.5000	0.4977	-0.0023	0.0043
	(0,0.2)	0.5000	0.4961	-0.0039	0.0043
	(0,0.5)	0.5000	0.4974	-0.0026	0.0044
	(0,0.8)	0.5000	0.4972	-0.0028	0.0043
	(0.5,0)	0.5000	0.4961	-0.0039	0.0043
	(0.5,0.2)	0.5000	0.4960	-0.0040	0.0042
	(0.5,0.5)	0.5000	0.4957	-0.0043	0.0043
	(0.5,0.8)	0.5000	0.4969	-0.0031	0.0043
	(0.8,0)	0.5000	0.4972	-0.0028	0.0044
	(0.8,0.2)	0.5000	0.4962	-0.0038	0.0043
	(0.8,0.5)	0.5000	0.4979	-0.0021	0.0042
	(0.8,0.8)	0.5000	0.4964	-0.0036	0.0043
(50,50)	(0,0)	0.5000	0.5000	0.0000	0.0025
	(0,0.2)	0.5000	0.4996	-0.0004	0.0024
	(0,0.5)	0.5000	0.4996	-0.0004	0.0024
	(0,0.8)	0.5000	0.5001	0.0001	0.0024
	(0.5,0)	0.5000	0.5001	0.0001	0.0025
	(0.5,0.2)	0.5000	0.5000	-0.0000	0.0025
	(0.5,0.5)	0.5000	0.4996	-0.0004	0.0025
	(0.5,0.8)	0.5000	0.4995	-0.0005	0.0025
	(0.8,0)	0.5000	0.4992	-0.0008	0.0025
	(0.8,0.2)	0.5000	0.4999	-0.0001	0.0025
	(0.8,0.5)	0.5000	0.4994	-0.0006	0.0025
	(0.8,0.8)	0.5000	0.4998	-0.0002	0.0025

Çizelge (3.8)'de sistem bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  'nin birbirinden farklı(sistem bileşenleri özdeş değil), stres bileşenlerinin bozulma oranları  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  'nin de birbirinden farklı olduğu durum(stres bileşenleri özdeş değil) ele alınmıştır. Simülasyon sonuçları incelendiğinde Çizelge (3.6)'daki ile benzer sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Çizelge 3.9.  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3, \beta_1 = 5, \beta_2 = 5$  için simülasyon sonuçları

$(n, m)$	$(p_1, p_2)$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(20,20)	(0,0)	0.5556	0.5536	-0.0020	0.0060
	(0,0.2)	0.5556	0.5545	-0.0011	0.0058
	(0,0.5)	0.5556	0.5543	-0.0012	0.0058
	(0,0.8)	0.5556	0.5553	-0.0003	0.0059
	(0.5,0)	0.5556	0.5547	-0.0009	0.0059
	(0.5,0.2)	0.5556	0.5541	-0.0015	0.0061
	(0.5,0.5)	0.5556	0.5546	-0.0009	0.0059
	(0.5,0.8)	0.5556	0.5546	-0.0010	0.0059
	(0.8,0)	0.5556	0.5543	-0.0012	0.0059
	(0.8,0.2)	0.5556	0.5529	-0.0027	0.0058
	(0.8,0.5)	0.5556	0.5545	-0.0011	0.0059
	(0.8,0.8)	0.5556	0.5539	-0.0017	0.0061
(20,50)	(0,0)	0.5556	0.5512	-0.0043	0.0042
	(0,0.2)	0.5556	0.5514	-0.0042	0.0041
	(0,0.5)	0.5556	0.5511	-0.0045	0.0042
	(0,0.8)	0.5556	0.5519	-0.0037	0.0043
	(0.5,0)	0.5556	0.5507	-0.0049	0.0044
	(0.5,0.2)	0.5556	0.5503	-0.0052	0.0043
	(0.5,0.5)	0.5556	0.5506	-0.0049	0.0043
	(0.5,0.8)	0.5556	0.5508	-0.0047	0.0042
	(0.8,0)	0.5556	0.5513	-0.0043	0.0042
	(0.8,0.2)	0.5556	0.5508	-0.0048	0.0043
	(0.8,0.5)	0.5556	0.5511	-0.0044	0.0043
	(0.8,0.8)	0.5556	0.5510	-0.0045	0.0042
(50,50)	(0,0)	0.5556	0.5550	-0.0006	0.0024
	(0,0.2)	0.5556	0.5554	-0.0002	0.0024
	(0,0.5)	0.5556	0.5546	-0.0010	0.0024
	(0,0.8)	0.5556	0.5550	-0.0005	0.0024
	(0.5,0)	0.5556	0.5541	-0.0015	0.0025
	(0.5,0.2)	0.5556	0.5548	-0.0008	0.0024
	(0.5,0.5)	0.5556	0.5546	-0.0010	0.0024
	(0.5,0.8)	0.5556	0.5556	0.0000	0.0025
	(0.8,0)	0.5556	0.5552	-0.0003	0.0024
	(0.8,0.2)	0.5556	0.5561	0.0005	0.0024
	(0.8,0.5)	0.5556	0.5543	-0.0012	0.0024
	(0.8,0.8)	0.5556	0.5547	-0.0009	0.0024

Çizelge (3.9)'da sistem bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  'nin birbirinden farklı(sistem bileşenleri özdeş değil), stres bileşenlerinin bozulma oranları  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  'nin de birbirine eşit(stres bileşenleri özdeş)olduğu durum ele alınmıştır. Simülasyon sonuçları incelendiğinde bu durumda da Çizelge (3.6) ile benzer sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

### 3.2.2. Bayes tahmini

Bu çalışmada, iki bileşenli seri sistemler için stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli verilere dayalı Bayes tahmini için  $\theta_1$  'in  $(\gamma_1, \delta_1)$  parametrelili Gamma,  $\theta_2$  'nin  $(\gamma_2, \delta_2)$  parametrelili Gamma,  $\beta_1$  'in  $(\rho_1, \psi_1)$  parametrelili Gamma ve  $\beta_2$  'nin  $(\rho_2, \psi_2)$  parametrelili Gamma önsel(prior) dağılımlarına sahip rasgele değişkenler olduğu varsayılmıştır. Bu durumda  $\theta_1, \theta_2, \beta_1$  ve  $\beta_2$  'nin önsel dağılımları,

$$\pi(\theta_1) = \frac{\delta_1^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \theta_1^{\gamma_1-1} e^{-\delta_1 \theta_1}, \theta_1 > 0 \quad (3.59)$$

$$\pi(\theta_2) = \frac{\delta_2^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2)} \theta_2^{\gamma_2-1} e^{-\delta_2 \theta_2}, \theta_2 > 0 \quad (3.60)$$

$$\pi(\beta_1) = \frac{\psi_1^{\rho_1}}{\Gamma(\rho_1)} \beta_1^{\rho_1-1} e^{-\psi_1 \beta_1}, \beta_1 > 0 \quad (3.61)$$

$$\pi(\beta_2) = \frac{\psi_2^{\rho_2}}{\Gamma(\rho_2)} \beta_2^{\rho_2-1} e^{-\psi_2 \beta_2}, \beta_2 > 0 \quad (3.62)$$

olacaktır. Stres-dayanıklılık güvenilirliğinin Bayes tahmin edicisi



$$\hat{R}_{Bayes} = \frac{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)} R f(x, y, \theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) d\theta}{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)} f(x, y, \theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) d\theta} \quad (3.63)$$

$$= \frac{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)} u(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) e^{\ell(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) + G(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)} d\theta}{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)} e^{\ell(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) + G(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)} d\theta}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.63)'deki  $u(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)$ ,  $\theta_1, \theta_2, \beta_1$  ve  $\beta_2$ 'nin bir fonksiyonu olup

$$u(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) = R = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2} \quad (3.64)$$

dir.  $\ell(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)$  ise, (3.48) eşitliği ile verilen olabirlik fonksiyonunun logaritması olup

$$\begin{aligned} \ell(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) = & n_1 \ln(\theta_1) + n_2 \ln(\theta_2) + n_3 \ln(\theta_1 + \theta_2) - (\theta_1 + \theta_2) \sum_{i=1}^n x_i \\ & + m_1 \ln(\beta_1) + m_2 \ln(\beta_2) + m_3 \ln(\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1 + \beta_2) \sum_{i=1}^m y_i \end{aligned} \quad (3.65)$$

dir.  $G(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2)$ , ortak önsel dağılımın logaritmasıdır ve

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) = & \ln \frac{\delta_1^{\gamma_1} \delta_2^{\gamma_2} \psi_1^{\rho_1} \psi_2^{\rho_2}}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\rho_1) \Gamma(\rho_2)} + (\gamma_1 - 1) \ln \theta_1 + (\gamma_2 - 1) \ln \theta_2 \\ & + (\rho_1 - 1) \ln \beta_1 + (\rho_2 - 1) \ln \beta_2 - \delta_1 \theta_1 - \delta_2 \theta_2 - \psi_1 \beta_1 - \psi_2 \beta_2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

olarak elde edilmiştir.

Bu bölümde de, stres-dayanıklılık güvenilirliğinin Bayes tahminin elde edildiği eşitlik (3.63)'deki integrallerin elde edilmesi oldukça karmaşık olacağından stres-dayanıklılık güvenilirliğinin yaklaşık Bayes tahmini için Lindley'in yaklaşımının kullanılması tercih edilmiştir. Buna göre eşitlik (3.63) ile verilen Bayes tahmini, eşitlik (2.27) ile verilen Lindley yaklaşım metodu kullanılarak

$$\hat{R}_{Bayes} \cong u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (u_{ij} + 2u_i g_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \ell_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \quad (3.67)$$

ile elde edilir. Eşitlik (3.67)'deki toplamlar açıldıktan ve sıfır çıkan türevler atıldıktan sonra yapılan düzenlemeler sonucunda  $R$ 'nin yaklaşık Bayes tahmini,

$$\hat{R}_{Bayes} \cong \left\{ \begin{array}{l} u(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2) + (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 + u_4 \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) \\ + \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12}) + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22}) \\ + C(u_3 \sigma_{33} + u_4 \sigma_{34}) + D(u_3 \sigma_{43} + u_4 \sigma_{44}) \end{array} \right] \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \theta_1 = \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 = \hat{\theta}_2 \\ \beta_1 = \hat{\beta}_1 \\ \beta_2 = \hat{\beta}_2 \end{array} \right\} \quad (3.68)$$

olarak hesaplanabilir. Eşitlik (3.68)'deki  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_1$  ve  $\hat{\beta}_2$  sırasıyla  $\theta_1, \theta_2, \beta_1$  ve  $\beta_2$ 'nin EÇÖ tahminleridir.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  ve  $\alpha_6$  sırasıyla

$$\begin{aligned} \alpha_i &= g_1 \sigma_{i1} + g_2 \sigma_{i2}, i = 1, 2 \\ \alpha_j &= g_3 \sigma_{j3} + g_4 \sigma_{j4}, j = 3, 4 \\ \alpha_5 &= u_{12} \sigma_{12} + u_{34} \sigma_{34} \\ \alpha_6 &= \frac{1}{2} (u_{11} \sigma_{11} + u_{22} \sigma_{22} + u_{33} \sigma_{33} + u_{44} \sigma_{44}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

dir.  $\sigma_{ij}$ 'ler,  $[-\ell_{ij}]$  matrisinin tersinin elemanları olup

$$\sigma_{ij} = [-\ell_{ij}]^{-1}, i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.70)$$

olarak ifade edilebilir.  $A, B, C$  ve  $D$  ise sırasıyla

$$\begin{aligned} A &= \ell_{111} \sigma_{11} + \ell_{121} \sigma_{12} + \ell_{221} \sigma_{22} + \ell_{211} \sigma_{21} \\ B &= \ell_{112} \sigma_{11} + \ell_{122} \sigma_{12} + \ell_{222} \sigma_{22} + \ell_{212} \sigma_{21} \\ C &= \ell_{333} \sigma_{33} + \ell_{443} \sigma_{44} + \ell_{343} \sigma_{34} + \ell_{433} \sigma_{43} \\ D &= \ell_{334} \sigma_{33} + \ell_{434} \sigma_{43} + \ell_{444} \sigma_{44} + \ell_{344} \sigma_{34} \end{aligned} \quad (3.71)$$

olmaktadır. (3.68), (3.69), (3.70) ve (3.71) eşitliklerinin sağ tarafındaki 1,2,3 ve 4 indisleri sırasıyla  $\theta_1, \theta_2, \beta_1$  ve  $\beta_2$  parametrelerini temsil etmektedir. Ayrıca  $\theta$ 'nın yaklaşık Bayes tahmininin elde edildiği Eşitlik (3.67)'deki türevler,

$$\ell_{11} = -\frac{n_1}{\theta_1^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$\ell_{22} = -\frac{n_2}{\theta_2^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$\ell_{33} = -\frac{m_1}{\beta_1^2} - \frac{m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^2}$$

$$\ell_{44} = -\frac{m_2}{\beta_2^2} - \frac{m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^2}$$

$$\ell_{12} = \ell_{21} = -\frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$\ell_{13} = \ell_{31} = 0$$

$$\ell_{14} = \ell_{41} = 0$$

$$\ell_{23} = \ell_{32} = 0$$

$$\ell_{24} = \ell_{42} = 0$$

$$\ell_{34} = \ell_{43} = -\frac{m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^2}$$

$$\ell_{111} = \frac{2n_1}{\theta_1^3} + \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$\ell_{222} = \frac{2n_2}{\theta_2^3} + \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$\ell_{333} = \frac{2m_1}{\beta_1^3} + \frac{2m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$\ell_{444} = \frac{2m_2}{\beta_2^3} + \frac{2m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$\ell_{112} = \ell_{121} = \ell_{211} = \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$l_{113} = l_{131} = l_{311} = 0$$

$$l_{114} = l_{141} = l_{411} = 0$$

$$l_{122} = l_{212} = l_{221} = \frac{2n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^3}$$

$$l_{322} = l_{232} = l_{223} = 0$$

$$l_{422} = l_{242} = l_{224} = 0$$

$$l_{323} = l_{332} = l_{233} = 0$$

$$l_{331} = l_{313} = l_{133} = 0$$

$$l_{334} = l_{343} = l_{433} = \frac{2m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$l_{414} = l_{441} = l_{144} = 0$$

$$l_{244} = l_{424} = l_{442} = 0$$

$$l_{434} = l_{443} = l_{344} = \frac{2m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$l_{123} = l_{132} = l_{213} = l_{231} = l_{312} = l_{321} = 0$$

$$l_{124} = l_{142} = l_{214} = l_{241} = l_{412} = l_{421} = 0$$

$$l_{341} = l_{314} = l_{143} = l_{134} = l_{413} = l_{431} = 0$$

$$l_{324} = l_{342} = l_{234} = l_{243} = l_{423} = l_{432} = 0$$

$$g_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{\theta_1} - \delta_1$$

$$g_2 = \frac{\gamma_2 - 1}{\theta_2} - \delta_2$$

$$g_3 = \frac{\rho_1 - 1}{\beta_1} - \psi_1$$

$$g_4 = \frac{\rho_2 - 1}{\beta_2} - \psi_2$$

$$u_1 = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2}$$

$$u_2 = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2}$$

$$u_3 = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2}$$

$$u_4 = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2}$$

$$u_{11} = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{22} = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{33} = -\frac{2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{44} = -\frac{2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{12} = u_{21} = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{13} = u_{31} = -\frac{1}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{14} = u_{41} = -\frac{1}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{23} = u_{32} = -\frac{1}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{24} = u_{42} = -\frac{1}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$u_{34} = u_{43} = -\frac{2}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\theta_1 + \theta_2 + \beta_1 + \beta_2)^3}$$

$$[\ell_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{n_1}{\theta_1^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & -\frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & -\frac{n_2}{\theta_2^2} - \frac{n_3}{(\theta_1 + \theta_2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_1}{\beta_1^2} - \frac{m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^2} & -\frac{m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^2} & -\frac{m_2}{\beta_2^2} - \frac{m_3}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunmuştur.

### 3.2.2.1. Simülasyon

Bu kesimde (3.44) eşitliğinde verilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin (3.57) eşitliği ile verilen en çok olabilirlik ve (3.67) eşitliği ile verilen ve Lindley'in yöntemi ile elde edilen yaklaşık Bayes tahmin edicileri, bir simülasyon çalışması ile tahmini riskler açısından kıyaslanmıştır. 10000 tekrar sonucunda çeşitli  $n, m, p_1, p_2$  ve prior parametreleri için her iki tahmin ediciye ilişkin elde edilen tahmini risk değerleri Çizelge (3.10) ve Çizelge (3.11)'de verilmiştir.

**Çizelge 3.10.**  $\gamma_1 = 1, \delta_1 = 1, \gamma_2 = 1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 1, \psi_1 = 1, \rho_2 = 1, \psi_2 = 1$  için tahmini risk değerleri

$(n, m)$	$(p_1, p_2)$	EÇÖ tahmini için tahmini riskler	Bayes tahmini için tahmini riskler
(20,20)	(0,0)	0,05239	0,04501
	(0,0.2)	0,05317	0,04575
	(0,0.5)	0,05208	0,04477
	(0,0.8)	0,05244	0,04511
	(0.5,0)	0,05246	0,04512
	(0.5,0.2)	0,05364	0,04626
	(0.5,0.5)	0,05332	0,04589
	(0.5,0.8)	0,05367	0,04615
	(0.8,0)	0,05295	0,04566
	(0.8,0.2)	0,05219	0,04488
	(0.8,0.5)	0,05201	0,04485
(0.8,0.8)	0,05182	0,04467	
(20,50)	(0,0)	0,05191	0,04674
	(0,0.2)	0,05234	0,04718
	(0,0.5)	0,05156	0,04646
	(0,0.8)	0,05177	0,04666
	(0.5,0)	0,05340	0,04815
	(0.5,0.2)	0,05132	0,04616
	(0.5,0.5)	0,05195	0,04674
	(0.5,0.8)	0,05146	0,04631
	(0.8,0)	0,05150	0,04648
	(0.8,0.2)	0,05327	0,04805
	(0.8,0.5)	0,05222	0,04716
(0.8,0.8)	0,05162	0,04645	
(50,50)	(0,0)	0,05196	0,04901
	(0,0.2)	0,05179	0,04889
	(0,0.5)	0,05075	0,04782
	(0,0.8)	0,05094	0,04806
	(0.5,0)	0,05120	0,04834
	(0.5,0.2)	0,05075	0,04786
	(0.5,0.5)	0,05022	0,04738
	(0.5,0.8)	0,05091	0,04804
	(0.8,0)	0,05090	0,04800
	(0.8,0.2)	0,05138	0,04846
	(0.8,0.5)	0,05105	0,04815
(0.8,0.8)	0,05208	0,04913	

Çizelge (3.10)'a göre  $n$  ve  $m$  arttıkça veya sisteme ilişkin maskeleye oranı ( $p_1$ ) ve strese ilişkin maskeleye oranı ( $p_2$ ) arttıkça  $R$ 'nin hem EÇO tahmininde hem de Bayes tahmininde tahmini riskler açısından genel olarak bir değişim olmadığı gözlenmiştir. Ancak EÇO ve Bayes tahminlerinin risklerine bakıldığında, her durum için Bayes tahminlerinin risklerinin EÇO tahminlerinin risklerinden daha küçük olduğu görölmektedir.



**Çizelge 3.11.**  $\gamma_1 = 1, \delta_1 = 1, \gamma_2 = 1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 2, \psi_1 = 2, \rho_2 = 2, \psi_2 = 2$  için tahmini risk değerleri

$(n, m)$	$(p_1, p_2)$	EÇO tahmini için tahmini riskler	Bayes tahmini için tahmini riskler
(20,20)	(0,0)	0,04187	0,03372
	(0,0.2)	0,04254	0,03420
	(0,0.5)	0,04236	0,03410
	(0,0.8)	0,04187	0,03371
	(0.5,0)	0,04204	0,03382
	(0.5,0.2)	0,04295	0,03466
	(0.5,0.5)	0,04280	0,03453
	(0.5,0.8)	0,04333	0,03494
	(0.8,0)	0,04176	0,03357
	(0.8,0.2)	0,04328	0,03476
	(0.8,0.5)	0,04363	0,03528
(0.8,0.8)	0,04277	0,03459	
(20,50)	(0,0)	0,04165	0,03575
	(0,0.2)	0,04241	0,03641
	(0,0.5)	0,04249	0,03653
	(0,0.8)	0,04153	0,03555
	(0.5,0)	0,04136	0,03550
	(0.5,0.2)	0,04227	0,03633
	(0.5,0.5)	0,04144	0,03562
	(0.5,0.8)	0,04172	0,03589
	(0.8,0)	0,04249	0,03651
	(0.8,0.2)	0,04165	0,03571
	(0.8,0.5)	0,04271	0,03689
(0.8,0.8)	0,04214	0,03620	
(50,50)	(0,0)	0,03984	0,03665
	(0,0.2)	0,04057	0,03733
	(0,0.5)	0,04104	0,03780
	(0,0.8)	0,04041	0,03719
	(0.5,0)	0,04022	0,03700
	(0.5,0.2)	0,04034	0,03709
	(0.5,0.5)	0,04067	0,03740
	(0.5,0.8)	0,04093	0,03766
	(0.8,0)	0,04151	0,03822
	(0.8,0.2)	0,04038	0,03712
	(0.8,0.5)	0,04086	0,03760
(0.8,0.8)	0,04119	0,03793	

Çizelge (3.11)'de stresin önsel parametreleri değiştirilerek tahmini riskler yeniden incelenmiştir. Simülasyon sonuçlarına bakıldığında, Çizelge (3.10)'dakine benzer sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

#### 4. İKİ BİLEŞENLİ PARALEL SİSTEMLERDE ÜSTEL DAĞILIM İÇİN STRES DAYANIKLILIK GÜVENİLİRLİĞİNİN MASKELİ VERİLERE DAYALI TAHMİNİ

Bölüm (2)'de  $k$  bileşenden oluşan paralel sistemlerin özelliklerinden bahsedilmiş ve bu sistemlerden elde edilen bir örneklemin maskeli örneklem olması durumunda, bileşenlerin dayanıklılıklarının sahip oldukları olasılık dağılımlarının bilinmeyen parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılacak olan olabilirlik fonksiyonunun nasıl elde edileceği hakkında bilgi verilmişti. Bu bölümde ise, paralel sistemlerin bir stres altındaki dayanıklılıkları Bölüm (2.4)'de ele alınan stres-dayanıklılık modeli ile incelenecektir. Paralel sistemler için de bu inceleme, Bölüm(3)'de incelenen seri sistemlerde olduğu gibi sadece sistemlerin iki bileşenden oluştuğu ve her birinin dayanıklılıklarının sahip oldukları olasılık dağılımının üstel dağılım olduğu durum için gerçekleştirilmiştir.

İki bileşenden oluşan paralel sistemlerin stres-dayanıklılık güvenilirlikleri sadece paralel sistemin tek bir strese maruz kaldığı durum için ele alınmış ve bu durumda stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$  'nin nasıl elde edileceği incelenmiştir. Diğer durumlarda stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ , analitik olarak elde edilemediğinden incelenememiştir. Bu bölümde ayrıca  $R$  'nin tahmini için alınan örneklemlerin maskeli olmaları durumunda  $R$  'nin en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Simülasyon çalışması ile de en çok olabilirlik tahmin edicileri, ortalama yan ve ortalama HKO değerleri açısından incelenmiş ve tahmini riskler açısından Bayes tahmin edicisi ile kıyaslanmıştır.

İki bileşenden oluşan paralel sistemlerin stres-dayanıklılık güvenilirliğinin incelenmesi amacıyla iki bileşenli paralel bir sistem göz önüne alınsın ve sistemin dayanıklılığı  $X$  ve bozulma gerçekleştiğinde bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığı  $S$  ile gösterilsin. Bu durumda,

- Sistemin bozulmasına 1. bileşen neden olduğunda

$$S = \{1\}$$

- Sistemin bozulmasına 2. bileşen neden olduğunda

$$S = \{2\}$$

- Sistemin bozulmasına neden olan bileşen bilinmiyorsa

$$S = \{1, 2\}$$

olacaktır. Sistemin bozulmasının hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenemediğinde (maskelendiğinde, yani  $S = \{1, 2\}$  durumunda)  $X$  'e “maskeli rasgele değişken” denir.

Bunun gibi birbirinden bağımsız çalışan, iki bileşenli ve bileşenlerinin dayanıklılıklarının dağılımı üstel olan  $n$  tane paralel sistem düşünölsün. Bu sistemler için,

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemin dayanıklılığını

$S_i, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemde bozulmaya sebep olan bileşen(ler)i

$T_{1i}, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemdeki 1. bileşenin dayanıklılığını

$T_{2i}, i = 1, 2, \dots, n$  :  $i$ . sistemdeki 2. bileşenin dayanıklılığını

gösterebiliriz.

Ayrıca  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n}, f_1(t_1; \theta_1) = \theta_1 e^{-\theta_1 t_1}, \theta_1 > 0, t_1 > 0$  olasılık yoğunluk fonksiyonlu ve  $F_1(t_1; \theta_1) = 1 - e^{-\theta_1 t_1}$  dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler ve  $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n}, f_2(t_2; \theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 t_2}, \theta_2 > 0, t_2 > 0$  olasılık yoğunluk fonksiyonlu  $F_2(t_2; \theta_2) = 1 - e^{-\theta_2 t_2}$  dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere  $T_{1i}$  ile  $T_{2i}, i = 1, 2, \dots, n$  de birbirinden bağımsız r.d.'ler olsun.  $i$ . sistemin dayanıklılığı

$$X_i = \max \{T_{1i}, T_{2i}\}, i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere  $1, 2, \dots, n$ . sistemin gözlenebilen nicelikleri olan sistemin dayanıklılıkları ve sistemin bozulmasına sebep olan bileşen(ler) sırasıyla  $(X_1, S_1), (X_2, S_2) \dots (X_n, S_n)$  ile gösterilebilir.

Bu  $n$  tane sistemin  $n_1$  tanesinin bozulma nedeninin birinci bileşenden,  $n_2$  tanesinin ikinci bileşenden kaynaklandığı gözlenip,  $n_3$  tanesinin hangi bileşenden kaynaklandığının gözlenemediği varsayalım ( $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ). Bu durumda  $(X_1, S_1), (X_2, S_2), \dots, (X_n, S_n)$  örnekleminde  $S_i = \{1\}$  olanlar  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$  ile,  $S_i = \{2\}$  olanlar  $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$  ile ve  $S_i = \{1, 2\}$  olanlar  $X_{31}, X_{32}, \dots, X_{3n_3}$  ile gösterilmek üzere  $(X_1, S_1), (X_2, S_2), \dots, (X_n, S_n)$  örneklemini

$$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}, X_{31}, X_{32}, \dots, X_{3n_3} \quad (4.1)$$

şeklinde gösterilebilir.

(4.1) ile gösterilen maskeli örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j \in S_i} f_j(x_i) F_{3-j}(x_i) \right) \quad (4.2)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (4.2) ile verilen olabilirlik fonksiyonu (4.1) örnekleminde bağlı olarak daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n_1} f_1(x_{1i}) F_2(x_{1i}) \prod_{i=1}^{n_1} f_2(x_{2i}) F_1(x_{2i}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n_3} [f_1(x_{3i}) F_2(x_{3i}) + f_2(x_{3i}) F_1(x_{3i})] \\ &= \theta_1 e^{-\theta_1 x_{11}} (1 - e^{-\theta_2 x_{11}}) \theta_1 e^{-\theta_1 x_{12}} (1 - e^{-\theta_2 x_{12}}) \dots \theta_1 e^{-\theta_1 x_{1n_1}} (1 - e^{-\theta_2 x_{1n_1}}) \\ &\quad \times \theta_2 e^{-\theta_2 x_{21}} (1 - e^{-\theta_1 x_{21}}) \theta_2 e^{-\theta_2 x_{22}} (1 - e^{-\theta_1 x_{22}}) \dots \theta_2 e^{-\theta_2 x_{2n_2}} (1 - e^{-\theta_1 x_{2n_2}}) \\ &\quad \times [\theta_1 e^{-\theta_1 x_{31}} (1 - e^{-\theta_2 x_{31}}) + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{31}} (1 - e^{-\theta_1 x_{31}})] \\ &\quad \times [\theta_1 e^{-\theta_1 x_{32}} (1 - e^{-\theta_2 x_{32}}) + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{32}} (1 - e^{-\theta_1 x_{32}})] \\ &\quad \times \dots [\theta_1 e^{-\theta_1 x_{3n_3}} (1 - e^{-\theta_2 x_{3n_3}}) + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{3n_3}} (1 - e^{-\theta_1 x_{3n_3}})] \\ &= \theta_1^{n_1} e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}} \prod_{i=1}^{n_1} (1 - e^{-\theta_2 x_{1i}}) \theta_2^{n_2} e^{-\theta_2 \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}} \prod_{i=1}^{n_2} (1 - e^{-\theta_1 x_{2i}}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n_3} [\theta_1 e^{-\theta_1 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_2 x_{3i}}) + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_1 x_{3i}})] \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak ifade edilebilir.

#### 4.1. Tekli Stres Durumu

Bu bölümde iki bileşenli bir paralel sistemin bir stres altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliği incelenecektir. Bu amaçla, sistemin bileşenlerinin dayanıklılıkları  $T_1$  ve  $T_2$  'nin bağımsız ve sırasıyla  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  parametrelili üstel dağılıma sahip olduğu ve böyle

bir sistemin maruz kaldığı  $Y$  stresinin de  $\beta$  parametrelili üstel dağılım olduğu varsayılmıştır. Bu durumda sistemin dayanıklılığı,  $X$  r.d. ile ifade edilirse

$$X = \max \{T_1, T_2\}$$

şeklinde olacaktır.  $T_1$  ve  $T_2$  r.d.'lerinin o.y.f.'ları ve dağılım fonksiyonları

$$f_1(t_1; \theta_1) = \theta_1 e^{-\theta_1 t_1}, \quad \theta_1 > 0, t_1 > 0 \quad \text{ve} \quad F_1(t_1) = 1 - e^{-\theta_1 t_1} \quad (4.5)$$

$$f_2(t_2; \theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 t_2}, \quad \theta_2 > 0, t_2 > 0 \quad \text{ve} \quad F_2(t_2) = 1 - e^{-\theta_2 t_2} \quad (4.6)$$

şeklinde olduğundan  $X$  r.d.'nin yani iki bileşenli paralel sistemin yaşam zamanının dağılım fonksiyonu (2.10) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_1(x)F_2(x) \\ &= 1 - e^{-\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x} + e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

olacaktır ve buradan  $X$  r.d.'nin o.y.f.

$$f_X(x) = \theta_1 e^{-\theta_1 x} \theta_2 e^{-\theta_2 x} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}, \quad x > 0 \quad (4.8)$$

olarak elde edilmektedir. Ayrıca  $Y$  stresi  $\beta$  parametrelili üstel dağılıma sahip olduğundan  $Y$ 'nin o.y.f. ve dağılım fonksiyonu sırasıyla

$$f_Y(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y > 0 \quad (4.9)$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\beta y}, \quad y > 0 \quad (4.10)$$

şeklinde olacaktır. Buna göre dayanıklılığı  $X$  ile ifade edilen böyle bir sistemin bir  $Y$  stresi altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliği

$$\begin{aligned}
R &= P(Y < X) \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^x f_X(x) f_Y(y) dy dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) F_Y(x) dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} (\theta_1 e^{-\theta_1 x} \theta_2 e^{-\theta_2 x} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)x}) (1 - e^{-\beta x}) dx \\
&= \frac{\beta \left( (\beta + \theta_1 + \theta_2)^2 - \theta_1 \theta_2 \right)}{(\beta + \theta_1)(\beta + \theta_2)(\beta + \theta_1 + \theta_2)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak elde edilir. Bundan sonraki kısımda, eşitlik (4.11) ile elde edilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri üzerinde durulacaktır.

#### 4.1.1. En çok olabilirlik tahmini

Stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin maskeli verilere dayalı en çok olabilirlik tahmininin elde edilebilmesi için iki bileşenli  $n$  paralel sistemden oluşan  $\mathbf{X}$  maskeli örnekleme ve  $m$  gözlemden oluşan ve  $\mathbf{X}$ 'den bağımsız olan  $\mathbf{Y}$  örnekleme ele alınsın. Bu durumda  $\mathbf{X}$  maskeli örnekleme ve  $\mathbf{Y}$  örnekleme sırasıyla

$$\mathbf{X} = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}, X_{31}, X_{32}, \dots, X_{3n_3})$$

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$$

şeklinde gösterilmek üzere  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  örnekleminin olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
L(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{x}) L(\beta | \mathbf{y}) \\
&= \prod_{i=1}^{n_1} f_1(x_{1i}) F_2(x_{1i}) \prod_{i=1}^{n_2} f_2(x_{2i}) F_1(x_{2i}) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{n_3} [f_1(x_{3i}) F_2(x_{3i}) + f_2(x_{3i}) F_1(x_{3i})] \\
&\quad \times \prod_{i=1}^m f_Y(y_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta_1^{n_1} e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}} \prod_{i=1}^{n_1} (1 - e^{-\theta_2 x_{1i}}) \theta_2^{n_2} e^{-\theta_2 \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}} \prod_{i=1}^{n_2} (1 - e^{-\theta_1 x_{2i}}) \\
&\times \prod_{i=1}^{n_3} \left[ \theta_1 e^{-\theta_1 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_2 x_{3i}}) + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_1 x_{3i}}) \right] \beta^m e^{-\beta \sum_{i=1}^m y_i}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olarak elde edilmektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$\begin{aligned}
\ell(\theta) &= n_1 \ln \theta_1 - \theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_1} \ln(1 - e^{-\theta_2 x_{1i}}) + n_2 \ln \theta_2 - \theta_2 \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} + \sum_{i=1}^{n_2} \ln(1 - e^{-\theta_1 x_{2i}}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n_3} \ln \left[ \theta_1 e^{-\theta_1 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_2 x_{3i}}) + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_1 x_{3i}}) \right] + m \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^m y_i
\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,  $\hat{\theta}_1$  ve  $\hat{\theta}_2$  nümerik olarak elde edilir.  $\hat{\beta}$  ise,  $\ell(\theta)$  fonksiyonunun  $\beta$ 'ya göre türevi alınıp sifira eşitlenmesi sonucu

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}} = \frac{m}{\hat{\beta}} - \sum_{i=1}^m y_i = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m y_i} \tag{4.14}$$

olarak bulunur. EÇO tahmin edicisinin invaryantlık özelliği kullanılarak (4.11) eşitliğindeki stres dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicisi  $\hat{R}_{EÇO}$ ,

$$\hat{R}_{EÇO} = \frac{\hat{\beta} \left( (\hat{\beta} + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)^2 - \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 \right)}{(\hat{\beta} + \hat{\theta}_1)(\hat{\beta} + \hat{\theta}_2)(\hat{\beta} + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)} \tag{4.15}$$

olarak yazılabilir.

#### 4.1.1.1. Simülasyon

Bu kesimde (4.11) eşitliğinde elde edilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin (4.15) eşitliği ile verilen en çok olabilirlik tahmin edicisinin yan ve HKO açısından



performansı bir simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Sonuçlar çeşitli  $n, m$  ve maskeleme oranı  $p$  için 10000 tekrarla elde edilmiştir.

Çizelge (4.1)'de  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5$  ve  $\beta = 5$  durumunda  $R$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi için simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama MSE değerleri verilmiştir. Çizelge (4.2)'de aynı sonuçlar  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5$  ve  $\beta = 3$  durumu için, Çizelge (4.3)'de ise aynı sonuçlar  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3$  ve  $\beta = 3$  durumu için elde edilmiştir.

**Çizelge 4.1.**  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta = 5$  için simülasyon sonuçları

$(n, m)$	$p$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(10,5)	0	0.6667	0.7525	0.0859	0.0193
	0.5	0.6667	0.7305	0.0638	0.0176
	0.8	0.6667	0.6993	0.0327	0.0164
(10,10)	0	0.6667	0.7516	0.0850	0.0142
	0.5	0.6667	0.7195	0.0528	0.0113
	0.8	0.6667	0.6920	0.0254	0.0104
(20,20)	0	0.6667	0.7379	0.0712	0.0092
	0.5	0.6667	0.7201	0.0534	0.0071
	0.8	0.6667	0.6908	0.0241	0.0057
(20,50)	0	0.6667	0.7411	0.0744	0.0077
	0.5	0.6667	0.7148	0.0481	0.0050
	0.8	0.6667	0.6890	0.0223	0.0035
(50,50)	0	0.6667	0.7234	0.0568	0.0050
	0.5	0.6667	0.7073	0.0406	0.0036
	0.8	0.6667	0.6902	0.0235	0.0026

Çizelge (4.1)'de sistemin bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1, \theta_2$  ve stresin bozulma oranı  $\beta$ 'nin birbirine eşit olduğu durum ele alınmıştır. Buna göre,  $n$  ve  $m$  arttıkça veya sisteme ilişkin maskeleme oranı ( $p$ ) arttıkça ortalama yan ve HKO'da azalma olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.2.  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \beta = 3$  için simülasyon sonuçları

$(n,m)$	$p$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(10,5)	0	0.5192	0.6368	0.1175	0.0304
	0.5	0.5192	0.5934	0.0742	0.0236
	0.8	0.5192	0.5669	0.0476	0.0209
(10,10)	0	0.5192	0.6196	0.1003	0.0199
	0.5	0.5192	0.5874	0.0682	0.0156
	0.8	0.5192	0.5545	0.0353	0.0126
(20,20)	0	0.5192	0.6051	0.0858	0.0127
	0.5	0.5192	0.5827	0.0635	0.0096
	0.8	0.5192	0.5523	0.0330	0.0071
(20,50)	0	0.5192	0.5929	0.0737	0.0084
	0.5	0.5192	0.5763	0.0571	0.0064
	0.8	0.5192	0.5463	0.0271	0.0043
(50,50)	0	0.5192	0.5770	0.0578	0.0056
	0.5	0.5192	0.5662	0.0469	0.0046
	0.8	0.5192	0.5478	0.0286	0.0033

Çizelge (4.2)'de sistemin bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1$  ve  $\theta_2$ 'nin eşit(sistem bileşenleri özdeş), stresin bozulma oranı  $\beta$ 'nın bunlardan farklı olduğu durum ele alınmıştır. Simülasyon sonuçları incelendiğinde bu durumda da Çizelge (4.1)'deki ile benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 4.3.  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 3, \beta = 3$  için simülasyon sonuçları

$(n,m)$	$p$	$R$	Ortalama EÇÖ tahmini	Ortalama yan	HKO
(10,5)	0	0.6023	0.6936	0.0913	0.0233
	0.5	0.6023	0.6661	0.0639	0.0203
	0.8	0.6023	0.6439	0.0416	0.0193
(10,10)	0	0.6023	0.6882	0.0860	0.0163
	0.5	0.6023	0.6614	0.0591	0.0134
	0.8	0.6023	0.6321	0.0299	0.0120
(20,20)	0	0.6023	0.6715	0.0693	0.0096
	0.5	0.6023	0.6632	0.0610	0.0088
	0.8	0.6023	0.6316	0.0293	0.0067
(20,50)	0	0.6023	0.6716	0.0694	0.0076
	0.5	0.6023	0.6507	0.0484	0.0055
	0.8	0.6023	0.6278	0.0255	0.0042
(50,50)	0	0.6023	0.6533	0.0510	0.0048
	0.5	0.6023	0.6475	0.0452	0.0043
	0.8	0.6023	0.6280	0.0257	0.0030

Çizelge (4.3)'de ise sistemin bileşenlerinin bozulma oranları  $\theta_1$  ve  $\theta_2$ 'nin birbirinden farklı olduğu durum(sistem bileşenlerinin özdeş olmadığı durum) ele alınmıştır. Bu durumda da, Çizelge (4.1)'deki ile benzer sonuçlar elde edilmiştir.

#### 4.1.2. Bayes Tahmini

Burada, iki bileşenli paralel sistemler için stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli verilere dayalı Bayes tahmini için  $\theta_1$ 'in  $(\gamma_1, \delta_1)$  parametrelili Gamma,  $\theta_2$ 'nin  $(\gamma_2, \delta_2)$  parametrelili Gamma,  $\beta$ 'nin  $(\rho, \psi)$  parametrelili Gamma önsel(prior) dağılımlarına sahip rasgele değişkenler olduğu varsayılmıştır. Bu durumda  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$ 'nin önsel dağılımları,

$$\pi(\theta_1) = \frac{\delta_1^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \theta_1^{\gamma_1-1} e^{-\delta_1 \theta_1}, \theta_1 > 0 \quad (4.16)$$

$$\pi(\theta_2) = \frac{\delta_2^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2)} \theta_2^{\gamma_2-1} e^{-\delta_2 \theta_2}, \theta_2 > 0 \quad (4.17)$$

$$\pi(\beta) = \frac{\psi^\rho}{\Gamma(\rho)} \beta^{\rho-1} e^{-\psi\beta}, \beta > 0 \quad (4.18)$$

olacaktır. Stres-dayanıklılık güvenilirliğinin Bayes tahmin edicisi

$$\begin{aligned} \hat{R}_{Bayes} &= \frac{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} R f(x, y, \theta_1, \theta_2, \beta) d\theta}{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} f(x, y, \theta_1, \theta_2, \beta) d\theta} \\ &= \frac{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} u(\theta_1, \theta_2, \beta) e^{\ell(\theta_1, \theta_2, \beta) + G(\theta_1, \theta_2, \beta)} d\theta}{\int_{(\theta_1, \theta_2, \beta)} e^{\ell(\theta_1, \theta_2, \beta) + G(\theta_1, \theta_2, \beta)} d\theta} \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak elde edilir. (4.19) eşitliğindeki  $u(\theta_1, \theta_2, \beta)$ ,  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$ 'nin bir fonksiyonu olup

$$u(\theta_1, \theta_2, \beta) = R = \frac{\beta \left( (\beta + \theta_1 + \theta_2)^2 - \theta_1 \theta_2 \right)}{(\beta + \theta_1)(\beta + \theta_2)(\beta + \theta_1 + \theta_2)}$$

dir.  $\ell(\theta_1, \theta_2, \beta)$  ise (4.13) eşitliği ile verilen olabirlik fonksiyonunun logaritması olup

$$\begin{aligned} \ell(\theta_1, \theta_2, \beta) &= n_1 \ln \theta_1 - \theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_1} \ln(1 - e^{-\theta_1 x_{1i}}) + n_2 \ln \theta_2 - \theta_2 \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} + \sum_{i=1}^{n_2} \ln(1 - e^{-\theta_1 x_{2i}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_3} \ln \left[ \theta_1 e^{-\theta_1 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_2 x_{3i}}) + \theta_2 e^{-\theta_2 x_{3i}} (1 - e^{-\theta_1 x_{3i}}) \right] + m \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^m y_i \end{aligned} \quad (4.21)$$

dir.  $G(\theta_1, \theta_2, \beta)$ , ortak önsel dağılımın logaritmasıdır ve

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2, \beta) &= \ln \frac{\delta_1^{\gamma_1} \delta_2^{\gamma_2} \psi^{\rho_1} \psi^{\rho}}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\rho)} + (\gamma_1 - 1) \ln \theta_1 + (\gamma_2 - 1) \ln \theta_2 \\ &\quad + (\rho - 1) \ln \beta - \delta_1 \theta_1 - \delta_2 \theta_2 - \psi \beta \end{aligned} \quad (4.22)$$

olarak elde edilmiştir.

Stres-dayanıklılık güvenilirliğinin Bayes tahmininin elde edildiği eşitlik (4.19)'da integralin elde edilmesi oldukça karmaşık olduğundan bu bölümde de stres-

dayanıklılık güvenilirliğinin yaklaşık Bayes tahmini için Lindley'in yaklaşımının kullanılması tercih edilmiştir. Buna göre eşitlik (4.19) ile verilen Bayes tahmini, eşitlik (2.27) ile verilen Lindley yaklaşım metodu kullanılarak

$$\hat{R}_{Bayes} \cong u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (u_{ij} + 2u_i g_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \ell_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \quad (4.23)$$

ile elde edilir. Eşitlik (4.23)'deki toplamlar açıldıktan ve sıfır çıkan türevler atıldıktan sonra yapılan düzenlemeler sonucunda  $R$ 'nin yaklaşık Bayes tahmini,

$$\hat{R}_{Bayes} \cong \left\{ \begin{array}{l} u(\theta_1, \theta_2, \beta) + (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\ + \frac{1}{2} [A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12}) + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22}) + C] \end{array} \right\} \Bigg|_{\substack{\theta_1 = \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 = \hat{\theta}_2 \\ \beta = \hat{\beta}} \quad (4.24)$$

olarak hesaplanabilir. Eşitlik (4.24)'deki  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  ve  $\hat{\beta}$  sırasıyla  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$ 'nin EÇÖ tahminleridir.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ve  $\alpha_4$  sırasıyla

$$\alpha_i = g_1 \sigma_{i1} + g_2 \sigma_{i2}, i = 1, 2$$

$$\alpha_3 = g_3 \sigma_{33}$$

$$\alpha_4 = u_{12} \sigma_{12}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} (u_{11} \sigma_{11} + u_{22} \sigma_{22} + u_{33} \sigma_{33})$$

dir.  $\sigma_{ij}$ 'ler  $[-\ell_{ij}]$  matrisinin tersinin elemanları olmak üzere

$$\sigma_{ij} = [-\ell_{ij}]^{-1}, i, j = 1, 2, 3 \quad (4.26)$$

olarak ifade edilebilir.  $A, B$  ve  $C$  ise sırasıyla

$$A = \ell_{111}\sigma_{11} + \ell_{121}\sigma_{12} + \ell_{221}\sigma_{22} + \ell_{211}\sigma_{21}$$

$$B = \ell_{112}\sigma_{11} + \ell_{122}\sigma_{12} + \ell_{222}\sigma_{22} + \ell_{212}\sigma_{21} \quad (4.27)$$

$$C = \ell_{333}u_3\sigma_{33}\sigma_{33}$$

olarak elde edilmektedir. (4.24), (4.25), (4.26) ve (4.27) eşitliklerinin sağ tarafındaki 1,2 ve 3 indisleri sırasıyla  $\theta_1, \theta_2$  ve  $\beta$  parametrelerini temsil etmektedir. Eşitlik (4.23) ile elde edilen yaklaşık Bayes tahmini için bulunan türevler oldukça uzun olduğu için burada yer verilmemiştir.

#### 4.1.2.1. Simülasyon

Bu kesimde (4.11) eşitliğinde verilen stres-dayanıklılık güvenilirliğinin (4.15) eşitliği ile verilen en çok olabilirlik ve (4.23) eşitliği ile verilen ve Lindley'in yöntemi ile elde edilen yaklaşık Bayes tahmin edicileri, bir simülasyon çalışması ile tahmini riskler açısından kıyaslanmıştır. 10000 tekrar sonucunda çeşitli  $n, m, p$  ve prior parametreleri için her iki tahmin ediciye ilişkin elde edilen tahmini risk değerleri Çizelge (4.4) ve Çizelge (4.5)'de verilmiştir.

**Çizelge 4.4.**  $\gamma_1 = 2, \delta_1 = 2, \gamma_2 = 1, \delta_2 = 1, \rho = 1, \psi = 1$  için tahmini risk değerleri

$(n, m)$	$p$	EÇÖ tahmini için tahmini riskler	Bayes tahmini için tahmini riskler
(10,5)	0	0,0494	0,0445
	0.5	0,0330	0,0292
	0.8	0,0177	0,0166
(10,10)	0	0,0447	0,0412
	0.5	0,0261	0,0243
	0.8	0,0139	0,0140
(20,20)	0	0,0521	0,0500
	0.5	0,0311	0,0298
	0.8	0,0132	0,0131
(20,50)	0	0,0510	0,0493
	0.5	0,0295	0,0286
	0.8	0,0112	0,0114
(50,50)	0	0,0624	0,0615
	0.5	0,0374	0,0368
	0.8	0,0153	0,0152

Çizelge (4.4)'e göre  $n$  ve  $m$  arttıkça  $R$ 'nin hem EÇÖ tahmininde hem de Bayes tahmininde tahmini riskler açısından bir değişim olmadığı görülmektedir. Bununla birlikte, sistemdeki maskeleme oranı arttıkça her iki tahminde de genel olarak tahmini risklerin azaldığı gözlenmiştir. Bunlardan daha da önemlisi, EÇÖ ve Bayes tahminlerinin risklerine bakıldığında, her durum için Bayes tahminlerinin risklerinin EÇÖ tahminlerinin risklerinden daha küçük olduğu görülmektedir. Özellikle  $n$  ve  $m$ 'nin küçük değerleri için EÇÖ ve Bayes tahminlerinin risk değerleri arasındaki fark daha büyüktür. Doğal olarak  $n$  ve  $m$  değeri büyüdükçe bu fark azalmaktadır. Bu durumda stres-dayanıklılık güvenilirliği  $R$ 'nin tahmininde,  $n$  ve  $m$ 'nin küçük değerleri için Bayes tahminlerinin, büyük değerleri (özellikle  $n > 20$  ve  $m > 20$ ) için ise hesaplama kolaylığı açısından EÇÖ tahminlerinin elde edilmesinin uygun olacağı söylenebilir.

**Çizelge 4.5.**  $\gamma_1 = 2, \delta_1 = 2, \gamma_2 = 1, \delta_2 = 1, \rho = 2, \psi = 2$  için tahmini risk değerleri

$(n, m)$	$p$	EÇO tahmini için tahmini riskler	Bayes tahmini için tahmini riskler
(10,5)	0	0,0477	0,0444
	0.5	0,0319	0,0288
	0.8	0,0197	0,0182
(10,10)	0	0,0464	0,0438
	0.5	0,0290	0,0276
	0.8	0,0148	0,0148
(20,20)	0	0,0540	0,0524
	0.5	0,0337	0,0327
	0.8	0,0143	0,0142
(20,50)	0	0,0548	0,0533
	0.5	0,0322	0,0314
	0.8	0,0123	0,0125
(50,50)	0	0,0628	0,0621
	0.5	0,0414	0,0409
	0.8	0,0170	0,0168

Çizelge (4.5)'de stresin önsel parametreleri değiştirilerek tahmini riskler yeniden incelenmiştir. Simülasyon sonuçlarına bakıldığında, Çizelge (4.4)'dekine benzer sonuçlar elde edildiği görülmüştür.



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 5.1. Sonuçlar

Daha önce bahsedildiği gibi stres-dayanıklılık güvenilirliği bir çok uygulamalı alanda özellikle de mühendislik alanında kullanılan önemli bir kavramdır. Stres-dayanıklılık güvenilirliği bazen tek bir parça ya da bileşen için ele alınabildiği gibi bazen de çeşitli yapılardaki sistemler için ele alınabilir. İlgilenilen bir parça ya da bir sisteme ilişkin stres-dayanıklılık güvenilirliğinin önceden bilinmesi pek mümkün olmadığından bu güvenilirliğin tahmini ayrı bir öneme sahiptir.

Bu tezde esas olarak seri ve paralel sistemlere ilişkin stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli verilere dayalı tahmini üzerinde durulmuştur. Daha önce böyle bir çalışma yapılmadığından bu çalışma bu açıdan önemlidir. Çalışmanın üçüncü bölümünde iki bileşenli seri bir sistemin bir stres altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliği ve bu güvenilirliğin en çok olabilirlik ve yaklaşık Bayes tahminleri ele alınmıştır. Burada hem sistemdeki bileşenlerin hem de sistemin maruz kaldığı stresin bağımsız ve üstel dağıldığı varsayılmıştır. Simülasyon sonuçlarına göre stres-dayanıklılık güvenilirliğinin hem en çok olabilirlik hem de Bayes tahmin edicilerinin maskeleme oranı  $p$ 'ye bağlı olmadıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte Bayes tahminlerinin en çok olabilirlik tahminlerine göre, özellikle örnek hacminin küçük olduğu durumlarda, daha küçük risk değerlerine sahip oldukları görülmüştür. Buna göre iki bileşenli seri sistemin bir stres altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliğinin tahmininde küçük örnek hacimleri için Bayes, büyük örnek hacimleri için ise hem hesaplama kolaylığı hem de sahip olduğu özellikler açısından en çok olabilirlik tahmin edicilerinin kullanılması uygun olacaktır. Üçüncü bölümde ayrıca iki bileşenli seri bir sistemin başka bir iki bileşenli seri sistem şeklindeki bir strese maruz kaldığı durum incelenmiştir. Buradaki stres-dayanıklılık güvenilirliği esasında, iki bileşenli seri bir sistem ile bu sistemin karşılaştırılmak istendiği başka bir iki bileşenli seri sistemi kıyaslamak için kullanılabilir. Sistemlerden ilkinine ilişkin yaşam zamanı veya dayanıklılığı  $X$  değerindeki de  $Y$  ile gösterilirse stres-dayanıklılık güvenilirliği formundaki  $P(Y < X)$  olasılığı bu iki sistemi karşılaştırmak için kullanılabilir. Eğer bu olasılık 0.5'ten büyük ise ilk sistem diğerine tercih edilebilir. Bu durum için yapılan simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlara göre, tek stres durumundaki sonuçlara benzer olarak, yine küçük örnek hacimlerinde Bayes tahmin edicilerinin en çok

olabilirlik tahmin edicilerine tercih edilebileceği söylenebilir. Çalışmanın dördüncü bölümünde ele alınan iki bileşenli paralel bir sistemin bir stres altındaki stres-dayanıklılık güvenilirliği için simülasyon sonuçları bu güvenilirliğin maskeleme oranı  $p$  'ye bağlı olduğunu göstermiştir.

Sonuç olarak, incelenen durumlar için stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli verilere dayalı tahmininde her ne kadar yaklaşık Bayes tahminleri de olsa özellikle küçük örnek hacimlerinde daha küçük riske sahip olması açısından Bayes tahmin edicileri en çok olabilirlik tahmin edicilerine tercih edilebilir.

## 5.2. Öneriler

İleriki çalışmalarda daha karmaşık sistemler ve/veya farklı dağılımlar için stres-dayanıklılık güvenilirliğinin maskeli verilere dayalı tahmini konusu incelenebilir.

**KAYNAKLAR**

- Ahmad, K. E., Fakhry M.E. and Jaheen, Z. F., 1997, Empirical Bayes estimation of  $P(Y < X)$  and characterizations of Burr-type X model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 64(2), 297-308.
- Al-Hussaini, E. K., Mousa, M. A. M. A. and Sultan, K. S., 1997, Parametric and nonparametric estimation of  $P(Y < X)$  for finite mixtures of lognormal components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 26, 1269-1289.
- Asgharzadeh, A. A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z., 2011, Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, *SORT(Statistics and Operations Research Transactions)*, 35 (2), 103-124.
- Asgharzadeh, A. A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z., 2013, Estimation of the stress-strength reliability for the generalized logistic distribution, *Statistical Methodology*, 15, 73-94.
- Awad, A. M., Azzam, M. M. and Hamadan, M.A.,1981, Some inference result in  $P(Y < X)$  in the bivariate exponential model, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 10, 2515-2524.
- Casella, G. and Berger, R. L., 2002, Statistical inference(second edition), *Duxbury, USA*, 315-324.
- Church, J. D. and Harris, B., 1970, The estimation of reliability from stress strength relationships, *Technometrics*, 12, 49-54.
- Constantine, K. and Karson, M., 1986, The estimation of  $P(Y < X)$  in gamma case, *Communication in Statistics-Computations and Simulations*, 15, 365-388.
- Çavuş, T. F., Yanıkoğlu, E. ve Yılmaz A. S., 2002, Seri sistemlerin monte carlo yöntemi ile güvenilirlik analizi, *ELECO 2002*, Bursa, (poster bildirisi).
- Çavuş, T. F., Yanıkoğlu, E. ve Yılmaz A. S., 2003, Paralel sistemlerin monte carlo yöntemi ile güvenilirlik analizi, *Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği 10. Ulusal Kongresi*, İstanbul, 36-39.
- Guess, F., Usher, J. S. and Hodgson, T. J., 1987, Estimating system and component reliabilities under partial information on the cause failure, *Technical Report No.136*, Department of Statistics, University of South Carolina.
- Guess, F. M., Usher, J. S. and Hodgson T. J., 1991, Estimating system and component reliabilities under partial information on cause of failure, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 29, 75-85.
- Hutto, D. E., Mazzuchi, T. and Sarkani, S., 2009, Analysis of reliability using masked system life data, *International of Quality&Reliability Management*, 26 (7), 723-739.

- Jiang, L. and Wong, A. C. M., 2008, A note on inference for  $P(Y < X)$  for right truncated exponentially distributed data, *Stat Papers*, 49, 637-651.
- Kınacı, H., 2010, Maskeli verilere dayalı parametre tahmini, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M., 2003, The Stress-Strength Model and its Generalization: Theory and Applications, *World Scientific*, Singapore.
- Kundu, D. and Gupta, R.D., 2005, Estimation of  $R = P(Y < X)$  for the generalized exponential distribution, *Metrika*, 61, 291-308.
- Kundu, D. and Gupta, R.D., 2006, Estimation of  $R = P(Y < X)$  for Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, 55, 270-280.
- Lin, D. K. J., Usher, J. S. and Guess, F. M., 1993, Exact maximum likelihood estimation using masked system data, *IEEE Transactions on Reliability*, 42 (4), 631-635.
- Lin, D. And Guess, F., 1994, The effects of dependent masking on reliability estimation, *Microelectronics and Reliability*, 64.
- Lindley, D. V., 1980, Bayesian statistics, *University Press*, Valencia-Spain, 223-245.
- Lio, Y. L. and Tsai, T.R., 2012, Estimation of  $\delta = P(X < Y)$  for Burr XII distribution based on the progressively first failure censored samples, *Journal of Applied Statistics*, 39, 309-322.
- Miyakawa, M., 1984, Analysis of incomplete data in competing risks model, *IEEE Transactions on Reliability*, R-33, No.4, 293-296.
- Ragab, A., 1991, Estimation and predictive density for the generalized logistic distribution, *Microelectronics Reliability*, 31(1), 91-95.
- Raqab, M. Z., Madi, M. T. and Kundu, D., 2008, Estimation of  $P(Y < X)$  for the three-parameter generalized exponential distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37, 2854-2865.
- Rezaei, S., Tahmasbi, R. and Mahmoodi, M., 2010, Estimation of  $P(Y < X)$  for generalized Pareto distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(2), 480-494.
- Roussas, G. G., 1973, A first course in mathematical statistics, *Addison-Wesley Publishing Company*, USA, 251-257.
- Saraçoğlu, B., 2007, Stres-dayanıklılık modellerinde bazı dağılımlar için sistem güvenilirliğinin tahmini, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

- Saraçoğlu, B., Kınacı, İ. and Kundu, D., 2012, On estimation of  $R = P(Y < X)$  for exponential distribution under progressive type-II censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82, 729-744.
- Sarhan, A. M., 2001, Reliability estimations of components from masked system life data, *Reliability Engineering and System Safety*, 74, 107-113.
- Sarhan, A. M., 2003, Estimation of system components reliabilities using masked data, *Applied Mathematics and Computation*, 136, 79-92.
- Sarhan, A. M. and El-Bassiouny, A. H., 2003, Estimation of components reliability in a parallel system using masked system life data, *Applied Mathematics and Computation*, 138, 61-75.
- Sarhan, A. M., and El-Gohary A. I., 2003, Estimations of parameters in Pareto reliability model in the presence of masked data, *Reliability Engineering and System Safety*, 82, 75-83.
- Sarhan, A. M., 2004a, Parameter estimations in linear failure rate model using masked data, *Applied Mathematics and Computation*, 151, 233-249.
- Sarhan, A. M., 2004b, Parameter estimations in a general hazard rate model using masked data, *Applied Mathematics and Computation*, 153, 513-536.
- Sarhan, A. M. and Kundu, D., 2008, Bayes estimators for reliability measures in geometric distribution model using masked system life test data, *Computational Statistic & Data Analysis*, 52, 1821-1836.
- Tan, Z., 2007, Estimation of exponential component reliability from uncertain life data in series and parallel systems, *Reliability Engineering & System Safety*, 92, 223-230.
- Tong, H., 1974, A note on the estimation of  $P(Y < X)$  in the exponential case, *Technometrics*, 16 (4), 625.
- Usher, J. S. and Hodgson, T. J., 1988, Maximum likelihood, analysis of component reliability using masked system life-test data, *IEEE Transactions on Reliability*, 37 (5), 550-555.
- Usher, J. S. and Guess, F. M., 1989, An iterative approach for estimating component reliability from masked system life data, *Quality and Reliability Engineering International*, 5, 257-261.
- Usher, J. S., 1996, Weibull component reliability-prediction in the presence of masked data, *IEEE Transactions on Reliability*, 45, 229-232.
- Woodward, W.A. and Kelley, G.D., 1977, Minimum variance unbiased estimation of  $P(Y < X)$  in the normal case, *Technometrics*, 19, 95-98.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Demet SEZER  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Diyarbakır, 1977  
**Telefon** :  
**Faks** :  
**e-mail** : dsezer@selcuk.edu.tr

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Meram Anadolu Lisesi, Merkez, Konya	1996
Üniversite	: Hacettepe Üniversitesi, Beytepe, Ankara	2002
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2006
Doktora	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	Devam ediyor

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2002	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

**UZMANLIK ALANI** : İstatistik

**YABANCI DİLLER** : İngilizce

### YAYINLAR

Erişoğlu, M., Sezer, D. ve Genç, A., 2006, Türkiye'nin Seçilmiş Ülkelere İthalat Talebinin Görünüşte İlişkisiz Regresyon Analizi ile Belirlenmesi, *5. İstatistik Günleri Sempozyumu*, Antalya. (Yüksek lisans)

Sezer, D. and Kınacı, İ., 2012, Estimation of stress-strength parameter for exponential distribution based on masked data, *25<sup>th</sup> European Conference on Operational Research*, p.227, Vilnius, Litvanya. (Doktora)

Sezer, D. and Kınacı, İ., 2013, Estimation of stress-strength parameter of a parallel system for exponential distribution based on masked data, *26<sup>th</sup> European Conference on Operational Research*, p.149, Roma, İtalya. (Doktora)

Sezer, D. And Kınacı, İ., 2013, Estimation of stress-strength parameter of a parallel system for exponential distribution based on masked data, *Journal of Selçuk University Natural and Applied Science*, 2(3), 60-68.(Doktora)