T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HORNER FONKSİYONLARI YARDIMIYLA
$AX = B$ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

MUSTAFA KOÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞUBAT-2011

KONYA

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

MUSTAFA KOÇ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HORNER FONKSİYONLARI YARDIMIYLA
$AX = B$ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Mustafa KOÇ
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman : **Doç. Dr. Kemal AYDIN**

2011, 39 Sayfa

Jüri:
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Doç. Dr. Mahir KADAKAL
Doç. Dr. Kemal AYDIN

Bu çalışmada, $AX = B$ matris denkleminin çözümlerini Horner fonksiyonları yardımıyla hesaplayan bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar, düzenli matrisin tersinin, Horner fonksiyonları kullanılarak,

1- Bir sonsuz serinin sonlu toplamlar haline indirgenmesi,
2- Cayley-Hamilton teoreminin birlikte değerlendirilmesi

şeklinde oluşan sonuçlardır. Her iki durumda elde edilen sonuçların etkinliği nümerik örneklerle de incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Horner şema metodu, Horner fonksiyonu, Fundamental matris, Matris denklemi, Cayley-Hamilton Teoremi, Ters matris

ABSTRACT

MS THESIS

SOLUTIONS OF THE MATRIX EQUATIONS
$AX = B$ WITH HORNER FUNCTIONS

Mustafa KOÇ
THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor : Assoc. Prof. Dr. Kemal AYDIN

2011, 39 Pages

Jury:
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Assoc. Prof. Dr. Mahir KADAKAL
Assoc. Prof. Dr. Kemal AYDIN

In this study, it has been obtained the some results which computing the solutions of the matrix equation $AX = B$ with the Horner functions. These results which are

1- the reduction of the infinite sums to the finite sums,
2- the evaluation of Cayley-Hamilton theorem

occurs using the Horner functions. The effectiveness of the obtained results in both cases has been investigated with the numerical examples.

Keywords: Horner's scheme method, Horner function, Fundamental matrix, Matrix equation, Cayley-Hamilton theorem, Inverse matrix

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen ve beni her konuda yönlendiren danışmanım Doç. Dr. Kemal AYDIN’ a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Mustafa KOÇ

Konya−2011

SİMGELER

$M_N(F)$ **:** Elemanları F cisminden olan N–kare matrislerin kümesi

$(A|b)$: İlaveli matris

$P_N(x)$: N. dereceden polinomlar kümesi

$\chi_A(\lambda)$: A matrisinin karakteristik polinomu

$\lambda_i(A)$: A matrisinin öz değerleri

$V(\lambda)$: Çözüm uzayı (öz uzay)

(λ, v) : Öz çift (λ-özdeğer, v-öz vektör)

$W(f_1, \dots, f_m)$: $f_1, \dots, f_m$ fonksiyonlarının Wronskian determinantı

$r(A)$: A matrisinin rankı

A^{-1} : A matrisinin tersi

$< v_1, \dots, v_m >$: $v_1, \dots, v_m$ vektörlerinin gerdiği uzay

$r_i(n)$: Horner fonksiyonları

$p(A)$: Matris polinomu

$f(A)$: Matris fonksiyonu

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1.Vektör Uzay 4
2.2. Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık, Wronskian Determinantı 4
2.3. $\boldsymbol{Ax = f}$ Lineer Denklem Sistemi ve Bir Matrisin Tersi 5
2.4. Alt Vektör Uzayı ve Taban 6
2.5. Özdeğer, Öz Uzay ve Özvektör 7

3. MATRİS FONKSİYONLARI 9

3.1. Horner Şema Yöntemi 9
3.2. Horner Fonksiyonu 10
3.3. Horner Fonksiyonları Yardımıyla Fundamental Matrisin Hesaplanması 11
3.4. Cayley–Hamilton Teoremi ve Matris Tersi 12

4. $\boldsymbol{AX = B}$ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ 14

4.1. Sonsuz Matris Serisi Yardımıyla Matris Tersi Hesaplama 14
4.2. Cayley–Hamilton Teoremi Yardımıyla Matris Tersini Hesaplama 17
4.3. $\boldsymbol{AX = B}$ Matris Denkleminin Horner Fonksiyonlarıyla Çözümleri 20
4.4. Bulguların $\boldsymbol{AXB = C}$ Matris Denkleminin Çözümüne Uygulanması 22

5. NÜMERİK ÖRNEKLER 23

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER 29

7. KAYNAKLAR 30

ÖZGEÇMİŞ 32

EKLER 33

EK 1: Tablo 1. Örnek 5.1 İçin Maple Çıktısı 33
EK 2: Tablo 2. Örnek 5.2 İçin Maple Çıktısı 34
EK 3: Tablo 3. Örnek 5.3 İçin Maple Çıktısı 35
EK 4: Tablo 4. Örnek 5.4 İçin Maple Çıktısı 36
EK 5: Tablo 5. Örnek 5.5 İçin Maple Çıktısı 37
EK 6: Tablo 6. Örnek 5.6 İçin Maple Çıktısı 38
EK 7: Tablo 7. Örnek 5.7 İçin Maple Çıktısı 39

1. GİRİŞ

Son yıllarda, uygulamalı matematik alanında, özellikle kararlılık teorisi ve kontrol teorisinde önemli yer tutan Sylvester matris denklemleri çözümleri üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Çok sayıda mühendislik probleminde matris denklemlerinin çözümlerinin incelenmesinin önemli bir yer tuttuğu iyi bilinmektedir.

Mesela $\frac{dx}{dt} = Ax$, $A - N$ kare matris, sürekli sistemler için $A^*H + HA + I = 0$ Lyapunov matris denklemi ve $x(n+1) = Ax(n)$, $A - N$ kare matris, kesikli sistemler için $A^*HA - H + I = 0$ Lyapunov fark matris denkleminin $H = H^* > 0$ olan çözümünün olup olmadığının bilinmesi sistemler hakkında önemli bilgiler vermektedir. Genelleştirilmiş Sylvester matris denklemi $AXB + CXD = F$ denkleminin genel olarak sistem teoride uygulama alanları oldukça geniştir. Sürekli ve kesikli sistemler için Lyapunov matris denklemleri, genelleştirilmiş Sylvester matris denklemlerinin birer özel halidir.

Bu durum dikkate alındığında Sylvester matris denklemlerinin bir *özel hali* olan

$$AX = B\ ;\ \ A, B - N \text{ kare matris}$$

denkleminin çözümlerinin var olup olmaması, varsa tam çözümünün bulunması oldukça önemlidir. Sylvester matris denklemleri ve özel durumu olan matris denklemlerinin çözümlerini inceleyen bazı çalışmalar aşağıdaki gibi sıralanabilir;

Apostol (1969), Langrange-Sylvester enterpolasyon yöntemi olarak bilinen (*bak* Gantmacher, 1959) yöntemin özel hali Langrange enterpolasyon yöntemini tanıtmış ve farklı ispatını vermiştir.

Moler ve Van Loan (1978, 2003), e^{tA} üstel matrisin hesaplanması için 19 farklı yöntem vermişlerdir. Bu yöntemlerden bazıları birbirine benzer yöntemlerdir. Örneğin Langrange enterpolasyon, Newton enterpolasyon ve Vandermonde yöntemleri benzer yöntemlerdir.

Bulgakov ve Godunov (1978), lineer denklem sistemleri için çözüm yöntemi olan Conjugate Gradient Yöntem yardımıyla uygulamada oldukça öneme sahip, Sylvester matris denkleminin bir özel durumu olan $A^*H + HA + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümleri için algoritma vermişlerdir.

Bulgakov ve Godunov (1985), Bulgakov ve Godunov (1978) tarafından verilen algoritmanın hata analizini yapmışlardır.

Peng ve ark. (2005), $AXB = C$ matris denkleminin optimal yaklaşık çözümleri ve simetrik çözümleri için bir iteratif yöntem geliştirmişler, bu yöntemle verilen matris denklemi *uygun* olduğunda denklemin çözülebilirliğinin otomatik olarak elde edildiğini iddia etmişlerdir.

Peng (2005), $AXB = C$ matris denkleminin simetrik çözümlerini bulmak için $R = AXB - C$ kalan matrisinin normunun minimizasyonu için bir iteratif yöntem vermiştir. Bu yöntemin simetrik bir başlangıç matrisi ile başlandığında yuvarlama hataları olmaksızın sonlu iterasyonla çözümün elde edildiğini ifade etmiştir.

Verde-Star (2005, 2007), $w_{k+1}(\lambda) = \lambda w_k(\lambda) + b_{k+1}, w_0(\lambda) = 1, k \geq 0$ Horner algoritmasının çözümleri olan $w_k(\lambda) = \lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \cdots + b_{k-1}\lambda + b_k$ Horner polinomlarını kullanarak matris fonksiyonları ve fundamental matrisleri hesaplayan açık formüller vermiştir.

Sheng ve Chen (2007), $(AXB, CXD) = (E, F)$ şeklinde verilen çift matris denkleminin çözümleri için etkili bir iteratif yöntem verilmiş, bu yöntemle aynı zamanda matris denklemlerinin çözülebilirliğinin otomatik olarak tespit edilebildiğini göstermişlerdir.

Keskin ve Aydın (2007), $Ax = f$ lineer cebirsel denklem sistemi için her adımda bir boyut indirgeyen bir metod ($IDDM$) ve bu metoda dayanan *iteratif boyut indirgeme algoritması* ($IDDA$) vermişler, ayrıca uygulamalar da yapmışlardır.

Fanliang ve ark. (2008), $(AX = B, XC = D)$ matris denklem çiftinin çözümlerini incelemiş, ayrıca çözülebilirlik için gerek ve yeter şartlar vermişlerdir.

Çıbıkdiken ve Aydın (2008), $IDDM$ yardımıyla $AX = I$, ($A - N$ kare düzenli matris, I–birim matris) matris denkleminin çözümü olarak ters matris hesaplamışlardır.

Şahinbay (2010), $IDDM$ yardımıyla $AXB = C$ ($A, B\ -\ N$ kare düzenli matris, C – N kare matris) matris denkleminin çözümlerini hesaplamıştır.

Bilgin ve Aydın (2010*a*), Horner fonksiyonları yardımıyla sürekli ve kesikli sistemlerin fundamental matrislerinin hesaplanması üzerine sonuçlar vermişler ve bu sonuçları nümerik örneklerle de desteklemişlerdir. Ayrıca Horner fonksiyonları, Putzer fonksiyonları ve bölünmüş fark fonksiyonlarının aynı olduğunu da göstermişlerdir.

Bilgin ve Aydın (2010*b*), Bilgin ve Aydın (2010*a*) tarafından elde edilen sonuçları kullanarak sürekli ve kesikli sistemler için Lyapunov matris denklemlerinin direk çözümlerini hesaplayan açık formüller vermişler ve nümerik örneklerle de desteklemişlerdir.

Bu çalışmaların önemli bir kısmı, $Ax = f$ lineer denklem sistemleri için literatürde var olan bazı iteratif yöntemleri direk veya modifiye ederek matris denklemlerinin çözümlerinin araştırılması şeklindedir.

Bu çalışmada,

$AX = B$; $A - N$ kare boyutlu-düzenli matris, $B - N{\times}M$ boyutlu matris

matris denkleminin Horner fonksiyonları yardımıyla çözümleri araştırılacaktır. Metod olarak, genelde Horner fonksiyonlarının, matris fonksiyonlarının hesaplanması üzerine yapılan çalışmalar esas alınacak, özelde ise Bilgin ve Aydın (2010a) ve Bilgin ve Aydın (2010b) tarafından elde edilen sonuçlar esas alınacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışma boyunca dolaylı veya direk kullanılacak bazı temel kavramlar kısaca tanıtılacaktır. Bu kavramlar vektör uzay, alt uzay, lineer bağımlılık bağımsızlık, taban, lineer denklem sistemleri ve çözümlerinin analizi, karakteristik polinom, öz değer, öz uzay, öz vektör, Cayley– Hamilton teoremi, matris tersi vb. şeklinde literatürde iyi bilinen kavramlardır. Bu bölümdeki bilgiler (Bulgak ve Bulgak 2001; Taşçı 2007; Morris 1990) kaynaklarından faydalanılarak hazırlanmıştır.

2.1.Vektör Uzay

$V \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $\boldsymbol{F}$ cisim olmak üzere, herhangi bir $u, v \in V$ için $u + v \in V$ ve $\alpha \in F$, $u \in V$ için αu şeklinde çarpma işlemi tanımlansın. Buna göre aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa o zaman V ye F cismi üzerinde vektör uzayı denir;

$V_1)$ $u, v, w \in V \Rightarrow (u + v) + w = u + (v + w)$,

$V_2)$ $u \in V \Rightarrow u + 0 = 0 = 0 + u$ olacak şekilde $0 \in V$,

$V_3)$ $u \in V \Rightarrow u + (-u) = 0 = (-u) + u$ olacak şekilde $-u \in V$,

$V_4)$ $u, v \in V \Rightarrow u + v = v + u$,

$V_5)$ $\alpha \in F, u, v \in V \Rightarrow \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,

$V_6)$ $\alpha, \beta \in F, v \in V \Rightarrow (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,

$V_7)$ $\alpha, \beta \in F, v \in V \Rightarrow \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$,

$V_8)$ $u \in V \Rightarrow 1v = v$ olacak şekilde $1 \in F$, vardır.

Örnek 2.1. $V = M_N(F) = \{A | A = (a_{ij}), a_{ij} \in F, N - \text{kare matris}\}$ kümesi matrislerde toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır.

Örnek 2.2. $P_N(x) = V = \{p(x) \colon \text{der} p(x) \leq N\}$ kümesi polinomlarda toplama ve skalerle çarpma işlemine göre Fcismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

2.2. Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık, Wronskian Determinantı

V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ olmak üzere ;

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0 \,; \; (a_1, a_2, \ldots, a_m \in F)$$

eşitliğini sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı ise $v_1, v_2, \ldots, v_m$

vektörlerine lineer bağımlıdır denir. Aksi takdirde $a_1, a_2, \dots, a_m$ skalerlerinin hepsi sıfır ise $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörlerine lineer bağımsız vektörler denir.

$v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörleri $v_1 = f_1(x), v_2 = f_2(x), \dots, v_m = f_m(x)$ şeklinde fonksiyon iseler lineer bağımlılık ve bağımsızlık tanımını uygulamak pratik değildir. Bu durumda $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ fonksiyonlarının *Wronskian determinantı*

$$W(f_1, f_2, \dots, f_m) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_m' \\ & \vdots & & \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \cdots & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $W(f_1, f_2, \dots, f_m) \neq 0$ ise $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Örnek 2.3. $v_1 = (-1,0,1)$, $v_2 = (-1,2,0)$ vektörleri lineer bağımsızdır. Gerçekten;

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{a}_1(-1,0,1) + \mathrm{a}_2(-1,2,0) = 0$$

eşitliği ancak $a_1 = a_2 = 0$ için sağlanır. Bu nedenle lineer bağımsızdır.

Örnek 2.4. $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2\}$ fonksiyonlar kümesi lineer bağımsızdır. Gerçekten;

$$W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olup fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

2.3. $\boldsymbol{Ax = f}$ Lineer Denklem Sistemi ve Bir Matrisin Tersi

$$Ax = f; \; A - M \times N \text{ boyutlu matris, } f - M \text{ boyutlu vektör,}$$

lineer cebirsel denklem sistemini ele alalım. A matrisine sistemin *katsayı matrisi* x vektörüne *bilinmeyen vektörü*, f vektörüne de *sağ taraf vektörü* denilmektedir. Eğer $f = 0$ ise lineer denklem sistemine *homojen denklem sistemi* adı verilir.

Bir matrisin lineer bağımsız satır sayısına *matrisin rankı* adı verilir ve genellikle $r(A)$ ile gösterilir. $(A|b)$ matrisi ilaveli matris olmak üzere

$$r(A|b) = r(A) = r,$$

ise lineer cebirsel denklem sistemi *tutarlıdır* ve bir çözüme sahiptir. Eğer

1. $r = N$ ise sisteminin tek çözümü,
2. $r < N$ ise $N - r$ paremetreye bağlı sonsuz çözümü,

vardır. Eğer $r(A \mid b) \neq r(a)$ ise sistem tutarsızdır ve sistemin bir çözümü yoktur. Homojen lineer denklem sistemleri her zaman tutarlı sistemlerdir.

Eğer A matrisi N −kare matris ve $r(A) = N$ ise A matrisi *düzenli matris* (regüler matris), $r(A) < N$ ise A matrisi *düzenli olmayan matris* (singüler matris) olarak adlandırılır.

A düzenli matris ise

$$A \times B = B \times A \text{ , } I\text{–birim matris,}$$

olacak şekilde bir B matrisi vardır. B matrisine A matrisinin *ters matrisi* denir ve
$B = A^{-1}$ ile gösterilir.

2.4. Alt Vektör Uzayı ve Taban

$U \subset V$ olmak üzere V deki bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemime göre F cismi üzerinde bir vektör uzayı oluyorsa U'ya V'nin alt uzayı denir.

Mesela, V vektör uzayının m tane vektörünü alalım. Bu vektörlerin lineer kombinasyonlarından oluşan

$$\{y | y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m \text{ , } a_1, a_2, \ldots, a_m \in F\},$$

kümesine $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörlerinin *gerdiği* (*ürettiği*) küme denir ve bu küme V vektör uzayının bir alt uzayıdır. V vektör uzayındaki $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörleri, V'yi geriyor ve lineer bağımsız ise $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ kümesine V'nin *tabanı* (bazı) ve m sayısına ise V'nin *boyutu* denir.

Örnek 2.5. F cismi üzerinde polinomların oluşturduğu

$$P_2(x) = V = \{p(x) | \mathrm{der} p(x) \leq 2\}$$

vektör uzayı için $S = \{1, x, x^2\}$ kümesi F cismine göre bir baz oluşturur. Gerçekten S lineer bağımsız ve $P_2(x)$ in elamanlarının S'nin elamanları cinsinden yazılabildiği açıktır.

S kümesi yerine $S_1 = \{1, (x - 1), (x - 1)^2\}$ kümesini ele alalım. $P_2(x)$ uzayı için S_1 kümesi de bir baz teşkil eder. Ayrıca ;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = b_0 + b_1(x - 1) + b_2(x - 1)^2; \ (a_0, a_1a_2 \in F \text{ }),$$

ifade düzenlenirse;

$$b_2 = a_2, b_1 = a_1 + 2a_2, b_0 = a_0 + a_1 + a_2,$$

elde edilir.

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = Aa,$$

şeklinde yazılır. Bu ise $P_2(x)$ polinomunun S_1 bazına göre yazılabileceğini gösterir (A düzenli matristir ve genellikle A'ya geçiş matrisi denir).

$P_2(x)$ vektör uzayı için $S_2 = \{1, (x-1), (x-1)(x-2)\}$ kümesi de bir baz oluşturur. Şöyle ki ;

$$W\big(1, (x-1), (x-1)(x-2)\big) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2-3x+2 \\ 0 & 1 & 2x-3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olup S_2 lineer bağımsızdır ve 2. dereceden bir polinom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2); \;\; (a_0, a_1, a_2 \in F)$$

S_2 nin elamanları cinsinden yazılır. Buradan

$$c_2 = a_2 \,, c_1 = a_1 + 3a_2 \,, c_0 = a_0 + a_1 + a_2$$

lineer denklem sistemine ulaşılır. Yani

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = Aa$$

şeklinde yazılır. Bu ise $P_2(x)$ polinomunun S_2 bazına göre yazılabileceğini gösterir.

2.5. Özdeğer, Öz Uzay ve Özvektör

A, F cismi üzerinde N–kare matris, $\lambda \in F$ ve x vektörü ise N–boyutlu vektör uzayının bir elamanı olmak üzere

$$Ax = \lambda x, \, x \neq 0$$

eşitliğini sağlayan $\lambda \in F$ değerlerine A matrisinin *özdeğerler*i denir.

A N–kare matris, I–birim matris ve λ bir skaler olmak üzere $\lambda I - A$'ya A'nın karakteristik matrisi ,

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

polinomuna A'nın karakteristik polinomu ve $\chi_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0$ denklemine de karakteristik denklem denilmektedir. Özdeğerler, karakteristik denklemin kökleri olarak da tanımlanabilmektedir.

λ' lar A'nın özdeğerleri olmak üzere;

$$V(\lambda) = \{x|\ (A - I\lambda)x = 0\}$$

çözüm uzayına λ'ya karşılık gelen öz uzay, λ özdeğerine karşılık gelen öz uzayın baz vektörlerine λ'ya karşılık gelen öz vektörleri adı verilir.

$$V(\lambda) = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$$

olmak üzere lineer bağımsız v_i vektörleri ile birlikte (λ, v_i) ikililerine ise λ'ya karşılık gelen özçiftler denir (Bulgak ve Bulgak, 2001).

Örnek 2.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. A matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ bunlara karşılık gelen öz çiftleri ise $(-1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, $(4, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$ olur.

3. MATRİS FONKSİYONLARI

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P_n(x)$ herhangi bir polinom ve A kare matris olmak üzere;

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I,$$

biçiminde tanımlanır. Ancak n' in büyük kuvvetleri için bu şekilde hesaplamak pratik değildir.

Eğer $f(x)$ polinom şeklinde değilse, bu fonksiyonu analiz, fonksiyonlar teorisi derslerinden bildiğimiz seriye açma tekniklerini ve sonsuz serilerin yakınsaklık kriterlerini kullanarak $f(A)$ matris fonksiyonu tanımlanabilir. Bir $f(x)$ sonsuz mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ise seriye açıldığında;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu sonsuz serinin yakınsaklık bölgesi $|x| < R$ ise $|\lambda_i(A)| < R$ olması durumunda;

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

tanımlıdır (Bronson,1991).

3.1. Horner Şema Yöntemi

Keyfi seçilen bir $p(x) \in P_N(x)$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ ... + a_N x^N, \qquad a_0, a_1, ... a_N \in F$$

polinomun

$$p(x) = (\{...\,[a_{N-1} + a_N x]x + \cdots + a_1\}x) + a_0$$

şeklinde iç içe ifadeler şeklinde yazılması yöntemine *Horner Şema Yöntemi* denir (Engeln-Müllges ve Uhlig, 1996; Boehm ve Prautzsch, 2003).

Örnek 3.1. $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ polinomunu Horner şema yöntemiyle

$$p(x) = ((3x - 4)x + 5)x + 7$$

biçiminde yazılır.

$P_N(x)$'in vektör uzay ve $B = \{1, x, x^2, \dots, x^N\}$ kümesinin uzayın standart bazı olduğu iyi bilinmektedir.

$$B_1 = \{1, (x-c), \dots, (x-c)^N\}\,;\; B_2 = \{1, (x-c_1), \dots, \prod_{i=1}^{N}(x-c_i)\}$$

kümeleri de $P_N(x)$ uzayının diğer bazlarıdır. $p(x)$ polinomu B_1 ve B_2 bazına göre;

$$p(x) = b_N(x-c)^N + b_{N-1}(x-c)^{N-1} + \cdots + b_1(x-c) + b_0,$$

$$p(x) = k_N(x-c_N)(x-c_{N-1}) \dots (x-c_1) + \cdots + k_1(x-c_1) + k_0,$$

şeklinde yazılabilir ve bu polinoma Horner şema yöntemini uygulanırsa

$$p(x) = \big(\{\dots[b_N(x-c) + b_{N-1}](x-c) + \cdots + b_1\}(x-c)\big) + b_0,$$

$$p(x) = \big(\{\dots[k_N(x-c_N) + k_{N-1}](x-c_{N-1}) + \cdots + k_1\}(x-c_1)\big) + k_0,$$

olarak yazılabilir (Bilgin ve Aydın, 2010*a*; Bilgin ve Aydın, 2010*b*).

Örnek 3.2. $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 3$ polinomu $c = 1$ için

$$p(x) = 3(x-1)^3 + 11(x-1)^2 + 17(x-1) + 6,$$

$$p(x) = \{[3(x-1) + 11](x-1) + 17\}(x-1) + 6,$$

olarak, $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3$ değerleri için

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 8(x-1)(x-2) + 17(x-1) + 4,$$

$$p(x) = \{[(x-3) + 8](x-2) + 17\}(x-1) + 4,$$

olarak yazılabilir.

3.2. Horner Fonksiyonu

$\chi_A(\lambda)$ polinomu A matrisinin karakteristik polinomu olmak üzere $f(\lambda)$ fonksiyon $f(\lambda) = \chi_A(\lambda)q(\lambda) + k(\lambda), \mathrm{der}k(\lambda) < N$, olacak şekilde $q(\lambda)$ fonksiyonu ve $k(\lambda)$ polinomu vardır (*bak* Bronson, 1991). $N < n$ için

$$k(\lambda) = \lambda^n = [\dots[r_N(n)(\lambda-\lambda_{N-1}) + r_{N-1}(n)](\lambda-\lambda_{N-2}) + \cdots + r_2(n)](\lambda-\lambda_1) + r_1(n),$$

eşitliğindeki $r_i(n)$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ fonksiyonları *Horner fonksiyonları* olarak adlandırılır ve aşağıdaki teoremlerle açık formüller olarak verilmektedir.

Teorem 3.1. $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i, j = 1, 2, \dots, N)$ değerleri A matrisinin özdeğerleri ve $r_1(n)$ Horner fonksiyonları olmak üzere

$$r_i(n) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\lambda_j^n}{c_{ij}} \; ; \; c_{ij} = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{i} (\lambda_j - \lambda_p)$$

ile hesaplanır (*bak*, Bilgin ve Aydın, 2010*a*; Teorem 2).

Örnek 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/4 \\ -3/5 & 0 & -2/5 \\ -37/38 & -3/38 & -3/4 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $-1/4\,, -1/2\,,\ -1/3$ Horner dizileri ise

$$r_1(n) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n, \; r_2(n) = 4\left(\frac{-1}{4}\right)^n - 4\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$r_3(n) = 48\left(\frac{-1}{4}\right)^n + 24\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

olarak bulunur.

Uyarı 3.1. Matrisin özdeğerlerinden birisi m katlı ise $r_i(n)$ Horner fonksiyonları

$$r_i(n) = \binom{n}{i-1} \lambda^{n-i+1}, \; i = 1, 2, \dots, m,$$

ile hesaplanır (*bak*, Bilgin ve Aydın, 2010*b*).

3.3. Horner Fonksiyonları Yardımıyla Fundamental Matrisin Hesaplanması

A, N–kare matris olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{3.1}$$

şeklindeki denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sistemine 1. mertebeden homojen lineer fark denklem sistemi denilmektedir. $X(0) = I$ (I–birim matris) başlangıç şartı ile (3.1) sisteminin çözümü olan

$$X(n) = A^n\,,$$

matrisi (3.1) sisteminin fundamental matrisidir. $x(n_0) = x_0$ başlangıç şartıyla (3.1) sisteminin çözümü

$$x(n) = A^{n-n_0} x_0$$

ile verilir (*bak*, Elaydi, 1996; Akın ve Bulgak, 1998).

Teorem 3.2. $r_i\,(n)$ Horner fonksiyonları olmak üzere bir A matrisinin fundamental matrisi;

$$X(n) = A^n = \sum_{i=1}^{N} \prod_{p=1}^{i-1} \left(A - \lambda_p I\right) r_i(n)$$

ile hesaplanır (*bak*, Bilgin ve Aydın, 2010*a*; Sonuç 1).

Örnek 3.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$ ve Horner dizileri

$$r_1(n) = (-1)^n\,,\ r_2(n) = \frac{4^n - (-1)^n}{5}$$

olup

$$X(n) = A^n = \sum_{i=1}^{2} \prod_{p=1}^{i-1} \left(A - \lambda_p I\right) r_i(n) = r_1(n)I + (A + I)r_2(n)$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{4^n - (-1)^n}{5},$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\times 4^n + 3\times(-1)^n}{5} & \frac{3\times 4^n - 3\times(-1)^n}{5} \\ \frac{2\times 4^n - 2\times(-1)^n}{5} & \frac{2\times 4^n + 3\times(-1)^n}{5} \end{pmatrix},$$

olarak hesaplanır.

3.4. Cayley–Hamilton Teoremi ve Matris Tersi

Her karesel matris karakteristik denklemini sağlar. Yani

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

A matrisinin karakteristik denklemi olmak üzere

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0,$$

dır (Bulgak ve Bulgak, 2001; Bronson,1991).

Cayley–Hamilton teoremi yardımıyla düzenli bir matrisin tersini de hesaplayabiliriz; $a_0 \neq 0$ olmak üzere $\chi_A(A) = 0$ dan A matrisinin tersi

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I),$$

elde edilir (bak,Bronson,1991).

Örnek 3.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 14$ olup

$$\chi_A(A) = A^2 - 6A + 14I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 6\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$A^{-1} = -\frac{1}{14}(A - 6I) = -\frac{1}{14}\left\{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

olarak bulunur.

4. $AX = B$ MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

A matrisi N–kare-düzenli matris, B matrisi $N{\times}M$ matris olmak üzere

$$AX = B$$

matris denkleminin çözümünün

$$X = A^{-1}B$$

şeklinde olduğu açıktır.

Bu çalışmanın amacı, $AX = B$ matris denkleminin çözümlerini Horner fonksiyonları yardımıyla çözmektir. Bu amaç için, çözümdeki A^{-1}matrisini Horner fonksiyonları yardımıyla hesaplanması yeterli olacaktır.

Şimdi A^{-1} matrisinin Horner fonksiyonları yardımıyla hesaplanması üzerine bazı sonuçları iki farklı başlık altında inceleyelim.

4.1. Sonsuz Matris Serisi Yardımıyla Matris Tersi Hesaplama

I matrisi N–kare-birim matris, $|\lambda_i(A_1)| < 1$ olan matris olmak üzere $A = I - A_1$ veya $A = A_1 - I$ şeklindeki A, N–kare-düzenli matrisi ele alalım. Böylece

$$A^{-1} = (I - A_1)^{-1};\ A^{-1} = (A_1 - I)^{-1}$$

matrislerini

$$(I - A_1)^{-1} = \frac{I}{(I - A_1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_1^n \ ; \quad (A_1 - I)^{-1} = -\frac{I}{(I - A_1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$ serisinin hesaplanması üzerine bir teoremi aşağıya verelim.

Teorem 4.1. $|\lambda_i(A_1)| < 1$ ve $r_i(n)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ fonksiyonları Horner fonksiyonları olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (A_1 - \lambda_k I) \right) \sum_{n=0}^{\infty} r_j\,(n)$$

formülü ile verilir. Burada $\prod_{k=1}^{0}(.) = I$ dır.

İspat. $|\lambda_i(A_i)| < 1$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$$

matris serisi yakınsaktır (*bak*, Bronson,1991). Bu serideki kuvvet (fundamental) matrisi, Teorem 3.2' den Horner fonksiyonlarına bağlı olarak yazılır ve düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} r_j\,(n) \left(\prod_{k=1}^{j-i} (A_1 - \lambda_k I) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{j-i} (A_1 - \lambda_k I) \right) r_j(n)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (A_1 - \lambda_k I) \right) r_j(n) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (A_1 - \lambda_k I) \right) \sum_{n=0}^{\infty} r_j(n)$$

olarak bulunur. Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} r_j(n)$ serisi yakınsak seridir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2. $\lambda_i \neq \lambda_j (i, j = 1, 2, \dots, N)$ $|\lambda_i(A_1)| < 1$ ve $r_i(n)$ fonksiyonları Horner fonksiyonları olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (A_1 - \lambda_k I) \right) \sum_{s=1}^{j} \frac{1}{c_{js}} \frac{1}{1 - \lambda_s}; \quad c_{ij} = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{i} (\lambda_j - \lambda_p)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada $\prod_{k=1}^{0}(.) = I$'dır.

İspat. $|\lambda_i(A_1)| < 1$ olduğundan A matrisi tersinir matristir. Ayrıca Horner fonksiyonlarına bağlı olarak Teorem 4.1' den

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (A_1 - \lambda_k I) \right) \sum_{n=0}^{\infty} r_j(n)$$

şeklindedir. $\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$ serisinin yakınsaklığı $\sum_{n=0}^{\infty} r_j(n)$ serisinin yakınsaklığını garantilemektedir. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_j(n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} r_j(n)$$

olur. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{m} r_j\,(n) = \sum_{n=0}^{m}\sum_{s=1}^{j}\frac{\lambda_s^n}{c_{js}} = \sum_{s=1}^{j}\frac{1}{c_{js}}\sum_{n=0}^{m}\lambda_s^n$$

eşitliğine ulaşılır. $|\lambda_s| < 1$ ve

$$\sum_{n=0}^{m}\lambda_s^n = \frac{1}{1-\lambda_s},$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{m} r_j\,(n) = \sum_{s=1}^{j}\frac{1}{c_{js}}\frac{1}{1-\lambda_s},$$

dolayısıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{j-1}(A_1-\lambda_k I)\right)\sum_{s=1}^{j}\frac{1}{c_{js}}\frac{1}{1-\lambda_s}$$

olarak bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1. $|\lambda_i(A_1)| < 1$ olmak üzere

1- $A = I - A_1$ şeklindeki N–kare-düzenli matrisin tersi

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$$

2- $A = A_1 - I$ şeklindeki A, N–kare-düzenli matrisin tersi

$$A^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$$

eşitliği ile verilir.

İspat. Sonucun ispatı $(I - A_1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$; $(A_1 - I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n$ eşitliklerinden açıktır.

4.2. Cayley–Hamilton Teoremi Yardımıyla Matris Tersini Hesaplama

A, N–kare-düzenli matris olmak üzere Cayley–Hamilton teoremi ile bir matrisin tersinin nasıl hesaplanacağı kısım 3.5’ de kısaca tanıtılmıştı. Bu yöntemle $r_i(n)$ Horner fonksiyonlarını birlikte kullanarak bir matrisin tersini hesaplamak için bir formül vereceğiz.

Teorem 4.3. A, N–kare-düzenli matris ve $r_i(n)$ fonksiyonları da Horner fonksiyonları olmak üzere

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{k=1}^{N} a_k r_j(k-1)$$

ile hesaplanır.

İspat. Cayley–Hamilton teoreminden

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N} a_k A^{k-1} \ ; \ \ a_N = 1 \tag{4.1}$$

olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 3.2’den

$$A^{k-1} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_P I)\right) r_j(k-1) \tag{4.2}$$

dir. (4.1)’i, (4.2)’de yerine koyup düzenlersek

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right) r_j(k-1)$$

$$= -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{k=1}^{N} a_k r_j(k-1)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2. A, N–kare-düzenli matris, $\lambda_i \neq \lambda_j (i,j = 1,2,\ldots,N)$ olan bir matris ve $r_i(n)$ fonksiyonları da Horner fonksiyonları olmak üzere

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{s=1}^{j}\frac{1}{\lambda_s c_{js}}$$

ile hesaplanır.

İspat. Teorem 4.3' den

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{k=1}^{N} a_k r_j(k-1) \tag{4.3}$$

dir. Ayrıca Teorem 3.1'den

$$r_j(k-1) = \sum_{s=1}^{j}\frac{\lambda_s^{k-1}}{c_{js}} \tag{4.4}$$

dir. (4.3)'ü, (4.4)'de yerine koyup düzenlersek

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{s=1}^{j}\frac{\lambda_s^{k-1}}{c_{js}}$$

$$= \frac{-1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{c_{js}}\sum_{k=1}^{N} a_k \ \lambda_s^{k-1}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{N} a_k\lambda_s^{k-1} = a_1 + a_2\lambda_s^1 + \cdots + a_N\lambda_s^{N-1} = -\frac{a_0}{\lambda_s}$$

olduğundan

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{s=1}^{j}\frac{1}{c_{js}}\frac{-a_0}{\lambda_s} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A-\lambda_p I)\right)\sum_{s=1}^{j}\frac{1}{\lambda_s c_{js}}$$

olarak bulunur.

Yardımcı Teorem 4.1. $\chi_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} a_k\,\lambda^k$ karakteristik polinom olmak üzere

$$\sum_{k=j}^{N} a_k\binom{k-1}{j-1}\lambda^{k-j} = \frac{(-1)^j a_0}{\lambda^j}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. λ, A matrisinin özdeğeri ise $\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$, dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \lambda^{k-1} = \frac{-a_0}{\lambda}$$

olur. Buradan her iki tarafın $(j-1)$ inci mertebeden türevini alır ve düzenlersek,

$$\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k \lambda^{k-1}\right) = \frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left(\frac{-a_0}{\lambda}\right)$$

$$\sum_{k=j}^{N} a_k \prod_{l=1}^{j-1}(k-l)\,\lambda^{k-j} = \frac{(-1)^j (j-l)!\, a_0}{\lambda^j}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\sum_{k=j}^{N} a_k \frac{\prod_{l=1}^{j-1}(k-l)}{(j-1)!} \lambda^{k-j} = \frac{(-1)^j a_0}{\lambda^j}$$

olur.

$$\frac{\prod_{l=1}^{j-1}(k-l)}{(j-1)!} = \binom{k-1}{j-1}$$

olduğu dikkate alındığında

$$\sum_{k=j}^{N} a_k \binom{k-1}{j-1} \lambda^{k-j} = \frac{(-1)^j a_0}{\lambda^j}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3. A, N–kare-düzenli matris, λ A matrisinin N–katlı özdeğeri ve $r_i(n)$ fonksiyonları da Horner fonksiyonları olmak üzere

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+1}}{\lambda^j} (A-\lambda I)^{j-1}$$

ile hesaplanır.

İspat. Teorem 4.3'den

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{p=1}^{j-1} (A-\lambda_p I) \right) \sum_{k=1}^{N} a_k r_j(k-1)$$

dir. Ayrıca Uyarı 3.1'den

$$r_j(k-1) = \binom{k-1}{j-1}\lambda^{k-j}$$

ve

$$\binom{k-1}{j-1} = \begin{cases} 0 & k < j \\ \dfrac{\prod_{l=1}^{j-1}(k-l)}{(j-1)!} & k \geq j \end{cases}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \binom{k-1}{j-1}\lambda^{k-j} = \sum_{k=j}^{N} a_k \binom{k-1}{j-1}\lambda^{k-j}$$

olur. Buradan

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}(A-\lambda I)^{j-1}\sum_{k=j}^{N} a_k \binom{k-1}{j-1}\lambda^{k-j}$$

dir. Yardımcı Teoremden 4.1'den

$$\sum_{k=j}^{N} a_k \binom{k-1}{j-1}\lambda^{k-j} = \frac{(-1)^j a_0}{\lambda^j}$$

olduğundan

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}(A-\lambda I)^{j-1}\frac{(-1)^j}{\lambda^j} = \sum_{i=1}^{N}\frac{(-1)^{j+1}}{\lambda^j}(A-\lambda I)^{j-1}$$

olarak bulunur.

4.3. $AX = B$ Matris Denkleminin Horner Fonksiyonlarıyla Çözümleri

A matrisi N–kare-düzenli matris, B matrisi $N \times M$ matris olmak üzere

$$AX = B$$

matris denkleminin çözümünün

$$X = A^{-1}\mathrm{B}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Buradan $AX = B$ matris denkleminin Horner fonksiyonlarıyla çözümleri ise aşağıdaki gibi verilir:

Sonuç 4.4. $|\lambda_i(A_1)| < 1$ ve $A = I - A_1$ veya $A = A_1 - I$ şeklindeki A N–kare-düzenli matris olmak üzere $AX = B$ matris denkleminin çözümü,

1- $\lambda_i(A_1)$ öz değerlerinden bazıları katlı olmak üzere,

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{j-1}(A_1 - \lambda_k I)\right)\sum_{n=1}^{\infty} r_j(n) \times B & A = I - A_1 \\ -\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{j-1}(A_1 - \lambda_k I)\right)\sum_{n=1}^{\infty} r_j(n) \times B & A = A_1 - I \end{cases}$$

2- $\lambda_i \neq \lambda_j (i, j = 1, 2, \dots, N)$, $|\lambda_i(A_1)| < 1$ olmak üzere,

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{j-1}(A_1 - \lambda_k I)\right)\sum_{s=1}^{j} \frac{1}{c_{js}} \frac{1}{1 - \lambda_s} \times B & A = I - A_1 \\ -\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{j-1}(A_1 - \lambda_k I)\right)\sum_{s=1}^{j} \frac{1}{c_{js}} \frac{1}{1 - \lambda_s} \times B & A = A_1 - I \end{cases}$$

ile verilir.

Sonuç 4.5. A, N–kare-düzenli matris olmak üzere $AX = B$ matris denkleminin çözümü,

1- $r_i(n)$ fonksiyonları da Horner fonksiyonları olmak üzere

$$X = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A - \lambda_p I)\right)\sum_{k=1}^{N} a_k r_j(k-1) \times B$$

2- $\lambda_i \neq \lambda_j (i, j = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere

$$X = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A - \lambda_p I)\right)\sum_{s=1}^{j} \frac{1}{\lambda_s c_{js}} \times B$$

3- λ, A matrisinin N–katlı özdeğeri olmak üzere

$$X = \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+1}}{\lambda^j} (A - \lambda I)^{j-1} \times B$$

ile hesaplanır.

4.4. Bulguların $AXB = C$ Matris Denkleminin Çözümüne Uygulanması

A, N-kare düzenli matris, B matrisi M-kare düzenli matris ve C matrisi $N \times M$ matris olmak üzere

$$AXB = C$$

matris denkleminin çözümünün

$$X = A^{-1}CB^{-1} \tag{4.5}$$

olduğu açıktır. A ve B matrislerinin tersleri 4.1. ve 4.2. kısımdaki sonuçlar yardımıyla (horner fonksiyonları yardımıyla) bulunup (4.5) de yerine yazılırsa denklemin çözümü elde edilir.

Örnek 4.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ için alınırsa $AXB = C$ matrisi denkleminin çözümünü $X = A^{-1}CB^{-1}$ şeklinde olup A ve B matrislerinin tersleri Teorem 3'den bulunup yerine yazılırsa ;

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-11}{28} & \frac{-1}{14} \\ \frac{5}{28} & \frac{23}{42} \\ \frac{67}{28} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

5. NÜMERİK ÖRNEKLER

Örnek 5.1. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 3 & 3 & -1\\ \frac{23}{4} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{3}\end{pmatrix}$ matrisi için Teorem 4.1.'i (Sonuç 4.1-1'i) kullanarak A^{-1} ters matrisini hesaplayalım.

1. $A = I - A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -3 & -2 & 1\\ \frac{-23}{4} & \frac{3}{2} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}$
2. A_1 matrisinin özdeğerleri; $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1}{2}$
3. c_{ij} katsayılarından sadece $c_{11} = 1$ mevcuttur.
4. Horner dizileri ;

   $r_1(n) = \left(\frac{-1}{3}\right)^n$, $r_2(n) = 6\left(\frac{-1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{-1}{2}\right)^n$, $r_3(n) = -36\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 6n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + 36\left(\frac{-1}{3}\right)^n$,

5. $\delta_j = \sum_{n=0}^{\infty} r_j(n)$ değerleri; $\delta_1 = \frac{3}{4}$, $\delta_2 = \frac{1}{2}$, $\delta_3 = \frac{1}{3}$
6. Teorem 4.1.'den (Sonuç 4.1-1'den) A^{-1} ters matrisi ;

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{3}\prod_{k=1}^{j-1}(A_1 - \lambda_k I)\,\delta_j$$

$$= \frac{3}{4}I + \frac{1}{2}\left(A_1 + \frac{1}{3}I\right) + \frac{1}{3}\left(A_1 + \frac{1}{3}I\right)\left(A_1 + \frac{1}{2}I\right),$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{-13}{6} & \frac{-1}{18} & \frac{4}{3}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{-29}{4} & \frac{-5}{12} & 4\end{pmatrix},$$

olarak bulunur.

Örnek 5.2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ \frac{-1}{6} & \frac{35}{36} & \frac{-3}{4}\end{pmatrix}$ matrisi için Teorem 4.1'i (Sonuç 4.1-1'i) kullanarak A^{-1} ters matrisini hesaplayalım;

1. $A = I - A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{6} & \frac{-35}{36} & \frac{7}{4}\end{pmatrix}$
2. A_1 matrisinin öz değerleri; $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda_3 = \frac{3}{4}$,
3. c_{ij} katsayıları;

   $c_{11} = 1$, $c_{21} = \frac{-1}{3}$, $c_{22} = \frac{1}{3}$, $c_{31} = \frac{5}{36}$, $c_{32} = \frac{-1}{36}$, $c_{33} = \frac{5}{144}$,
4. Horner dizileri;

$r_1(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ r_2(n)=-3\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ r_3(n)=\frac{36}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n-36\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{144}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n,$

5. $\delta_j=\sum_{j=1}^{\infty} r_j\,(n)$ değerleri; $\delta_1=\frac{3}{2}, \delta_2=\frac{9}{2}, \delta_3=18$

6. Teorem 4.1.'den (Sonuç 4.1-1'den) A^{-1} ters matrisi ;

$$A^{-1}=\sum_{j=1}^{3}\prod_{k=1}^{j-1}(A_1-\lambda_k I)\,\delta_j$$
$$=\frac{3}{2}I+\frac{9}{2}\left(A_1-\frac{1}{3}I\right)+18\left(A_1-\frac{1}{3}I\right)\left(A_1-\frac{2}{3}I\right),$$
$$=\begin{pmatrix}4 & \frac{-27}{2} & 18\\ 3 & \frac{-27}{2} & 18\\ 3 & \frac{-29}{2} & 18\end{pmatrix},$$

olarak bulunur.

Örnek 5.3. $A=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{2}{5}\\ \frac{37}{38} & \frac{3}{38} & \frac{7}{4}\end{pmatrix}$ matrisi için Teorem 4.2'yi (Sonuç 4.1-1) kullanarak A^{-1} ters matrisi hesaplayalım;

1. $A=I-A_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3 & -1/4\\ -3/5 & 0 & -2/5\\ -37/38 & -3/38 & -3/4\end{pmatrix}$

2. A_1 matrisinin öz değerleri; $\lambda_1=\frac{-1}{4}, \lambda_2=\frac{-1}{2}, \lambda_3=\frac{-1}{3}$

3. c_{ij} katsayıları;

   $c_{11}=1, c_{21}=\frac{1}{4}, c_{22}=-\frac{1}{4}, c_{31}=\frac{1}{48}, c_{32}=\frac{1}{24}, c_{33}=-\frac{1}{72},$

4. $\sigma_j=\sum_{s=1}^{j}\frac{1}{(1-\lambda_s)c_{js}}$ değerleri; $\sigma_1=\frac{4}{5},\ \sigma_2=\frac{8}{15},\ \sigma_3=\frac{2}{5},$

5. Teorem 4.2.'den A^{-1} ters matrisi

$$A^{-1}=\sum_{j=1}^{3}\prod_{k=1}^{j-1}(A_1-\lambda_k I)\,\sigma_j,$$
$$=\frac{4}{5}I+\frac{8}{15}\left(A_1+\frac{1}{4}I\right)+\frac{2}{5}\left(A_1+\frac{1}{4}I\right)\left(A_1+\frac{1}{2}I\right),$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{653}{950} & \frac{541}{1140} & \frac{-31}{150}\\ \frac{-251}{950} & \frac{953}{1140} & \frac{-23}{150}\\ \frac{-176}{475} & \frac{-86}{285} & \frac{52}{75}\end{pmatrix},$$

olarak bulunur.

Örnek 5.4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -23/4 & 3/2 & 8/3 \end{pmatrix}$ matrisi için Teorem 4.3' ü kullanarak A^{-1} ters matrisini hesaplayalım;

1. A matrisinin öz değerleri; $\lambda_1 = \frac{-1}{3}, \lambda_2 = \frac{-1}{2}, \lambda_3 = \frac{-1}{2}$
2. c_{ij} katsayılarından $c_{11} = 1$ mevcuttur,
3. Horner dizileri sırasıyla;

$$r_1(n) = \left(\frac{-1}{3}\right)^n; r_2(n) = 6\left(\frac{-1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{-1}{2}\right)^n; r_3(n) = -36\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 6n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + 36\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

4. A'nın karakteristik polinomu;

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 + \frac{7}{12}\lambda + \frac{1}{12}; \; a_0 = \frac{1}{12}, a_1 = \frac{7}{12}, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = 1,$$

5. $\gamma_j = \sum_{k=1}^{3} a_k r_j(k-1)$ değerleri ; $\gamma_1 = \frac{1}{4}, \gamma_2 = \frac{1}{2}, \gamma_3 = 1,$
6. Teorem 4.3'den A^{-1} matrisi;

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{p=1}^{j-1}(A - \lambda_p)\right)\gamma_j,$$

$$= -3I - 6\left(A + \frac{1}{2}I\right) - 12\left(A + \frac{1}{2}I\right)^2,$$

$$= \begin{pmatrix} 82 & 14 & -36 \\ -27 & -5 & 12 \\ 192 & 33 & -84 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi için Teorem 4.3'ü kullanarak A^{-1} ters matrisini hesaplayalım;

1. A matrisinin öz değerleri; $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$
2. Horner dizileri sırasıyla;

$$r_1(n) = (-2)^n; r_2(n) = \frac{3^n - (-2)^n}{5}; r_3(n) = \frac{-1}{6} + \frac{1}{15}(-2)^n + \frac{1}{10}3^n$$

3. A nın karakteristik polinomu;

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6; a_0 = 6, a_1 = -5, a_2 = -2, a_3 = 1$$

4. $\gamma_j = \sum_{k=1}^{3} a_k r_j(k-1)$ değerleri ;$\gamma_1 = 3, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 1$
5. Teorem 4.3'den A^{-1} matrisi;

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\sum_{i=1}^{N}\left(\prod_{p=1}^{i-1}\left(A-\lambda_p\right)\right)\delta_{i,}$$

$$= -\frac{1}{6}\{3I-(A+2I)+(A+2I)(A-3I)\},$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

olarak bulunur.

Örnek 5.6. $A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/4 \\ -3/5 & 0 & -2/5 \\ -37/38 & -3/38 & -3/4 \end{pmatrix}$ matrisi için Sonuç 4.2'yi kullanarak A^{-1} ters matrisi hesaplayalım;

1. A matrisinin öz değerleri; $\lambda_1 = \frac{-1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1}{3}$

2. c_{ij} katsayıları;

   $c_{11} = 1$, $c_{21} = \frac{1}{4}$, $c_{22} = -\frac{1}{4}$, $c_{31} = \frac{1}{48}$, $c_{32} = \frac{1}{24}$, $c_{33} = -\frac{1}{72}$,

3. $\overline{\sigma_J} = \sum_{s=1}^{j}\frac{1}{\lambda_s\, c_{js}}$ değerleri; $\overline{\sigma_1} = -4$, $\overline{\sigma_2} = -8$, $\overline{\sigma_3} = -24$,

4. Sonuç 4.2'den A^{-1} ters matrisi

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{3}\prod_{k=1}^{j-1}(A-\lambda_k I)\,\overline{\sigma_J},$$

$$= -4I - 8\left(A+\frac{1}{4}I\right) - 24\left(A+\frac{1}{4}I\right)\left(A+\frac{1}{2}I\right),$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{72}{95} & -\frac{237}{19} & \frac{32}{5} \\ \frac{138}{95} & -\frac{3}{19} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{108}{95} & \frac{308}{19} & -\frac{48}{5} \end{pmatrix},$$

olarak bulunur.

Örnek 5.7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 29/12 & 1 \\ -3 & -1/2 & 0 \\ 1 & -145/24 & -3 \end{pmatrix}$ matrisi için Sonuç 4.3' ü kullanarak A^{-1} ters matrisini hesaplayalım

1. A matrisinin öz değerleri; $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{-1}{2}$
2. Sonuç 4.3' den A^{-1} ters matrisi ;

$$A^{-1}=\sum_{i=1}^{3}\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda^i}\left(\prod_{p=1}^{i-1}(A-\lambda_P I)\right),$$

$$=-2I-4\left(A+\frac{1}{2}I\right)-8\left(A+\frac{1}{2}I\right)^2,$$

$$=\begin{pmatrix} -12 & \frac{-29}{3} & -4 \\ 72 & 56 & 24 \\ -149 & -116 & -50 \end{pmatrix},$$

olarak elde edilir.

Örnek 5.8 . $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -23/4 & 3/2 & 8/3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matris denkleminin çözümünü bulalım. Örnek 5.4' den;

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 82 & 14 & -36 \\ -27 & -5 & 12 \\ 192 & 33 & -84 \end{pmatrix}$$

olarak bulunmuştu. Sonuç 4.5-1' den

$$X=\begin{pmatrix} 82 & 14 & -36 \\ -27 & -5 & 12 \\ 192 & 33 & -84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 188 & -190 & 100 \\ -64 & 61 & -32 \\ 441 & -444 & 234 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.9. $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/4 \\ -3/5 & 0 & -2/5 \\ -37/38 & -3/38 & -3/4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ matris denkleminin çözümünü bulalım. Örnek 5.6 ’ dan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{72}{95} & -\frac{237}{19} & \frac{32}{5} \\ \frac{138}{95} & -\frac{3}{19} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{108}{95} & \frac{308}{19} & -\frac{48}{5} \end{pmatrix},$$

olarak bulunmuştu. Sonuç 4.5-2’den,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{72}{95} & -\frac{237}{19} & \frac{32}{5} \\ \frac{138}{95} & -\frac{3}{19} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{108}{95} & \frac{308}{19} & -\frac{48}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1329}{95} & \frac{711}{95} \\ \frac{291}{95} & \frac{9}{95} \\ \frac{-1756}{95} & \frac{-1304}{95} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmada,

$AX = B$; $A - N$ kare boyutlu-düzenli matris, $B - N{\times}M$ boyutlu matris

matris denkleminin Horner fonksiyonları yardımıyla çözümleri araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Metod olarak, Bilgin ve Aydın (2010a) ve Bilgin ve Aydın (2010b) tarafından elde edilen,

1- matris fonksiyonlarının Horner fonksiyonları kullanılarak hesaplanması üzerine sonuçlar,

2- 1' deki sonuçlar kullanılarak sürekli ve kesikli sistemler için Lyapunov matris denklemlerinin sonlu seri olarak hesaplanması üzerine sonuçlar,

esas alınmıştır.

A matrisi N–kare-düzenli matris olduğundan problemin çözümünün $X = A^{-1}$B şeklinde olduğu açıktır. Problemin çözümü için A^{-1} ters matrisin hesaplanması yeterli olmaktadır. A^{-1} ters matrisinin hesaplanması üzerine literatürde çok sayıda yöntem bulunduğu da açıktır. Tez çalışmasını anlamlı ve farklı kılan en önemli unsur,

"A^{-1} *ters matrisinin Horner fonksiyonları yardımıyla*"

hesaplanmasıdır. Çalışmamızda A^{-1} ters matrisinin *Horner fonksiyonları* kullanarak hesaplanması üzerine,

- sonsuz matris serisini sonlu seriye dönüştürerek
- Cayley–Hamilton teoreminin uygulaması olarak

sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar yardımıyla da $AX = B$ matris denkleminin çözümleri hesaplanmış ve $AXB = C$ matris denklemine de kolayca uygulanabileceği gösterilmiştir.

Ayrıca çalışmada elde edilen sonuçların her durumuna uygun nümerik örnekler verilmiş, bu örnekler için Maple çıktıları ekler kısmında sunulmuştur.

7. KAYNAKLAR

Akın, Ö. ve Bulgak, H.,1998, Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, S. Ü. Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi Yayınları No : 2, *Sel-Ün Vakfı*, Konya.

Apostol, T. M., 1969, Some Explicit Formulas for the Matrix Exponential, *The American Mathematical Monthly*, 76, 284–292.

Bilgin, İ. ve Aydın, K., 2010a, Horner fonksiyonları ile fundamental matrislerin hesaplanması, (Dergiye gönderildi).

Bilgin, İ. ve Aydın, K., 2010b, Horner fonksiyonları ile Lyapunov matris denklemlerinin çözümleri, *XXIII. Ulusal Matematik Sempozyumu*, 4-7 Agustos 2010, Kayseri.

Boehm, W. and Prautzsch, H., 2003, Numerical Methods, First Edition**,** *Universities Press (India) Private Limited***,** India.

Bronson, R., 1991, Matrix Methods : An Introduction, Second Edition, *Academic Press,* Boston.

Bulgak, A. ve Bulgak, H., 2001, Lineer Cebir, Selçuk Üniversitesi Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi yayınları, No. 4, *Sel-Ün Vakfı*, Konya.

Bulgakov, A. Ya. and Godunov, S.K., 1978, The stability of stable matrices, Theory of cubature formulas and numerical mathematics, *Pap. Conf. Differential equations and numerical mathematics*, Novosibirsk ,13-28.

Bulgakov, A. Ya. and Godunov, S.K., 1985, Allowance for computation errors in a variant of the conjugate gradient method, *Num. Methods of Lin. Alg.,* Novosibirsk, Nauka, pp. 38-55 (Russian).

Çıbıkdiken, A. O. ve Aydın, K., 2008, IDDM yardımıyla ters matris hesaplama, *SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi* (*E-Dergi*), 3(1), 98-106.

Elaydi, S. N., 2005, Introduction to Difference Equations, Third Edition, *Springer,* New York, US.

Engeln-Müllges, G. and Uhlig, F., 1996, Numerical Algorithms with C, *Springer-Verlag*, New York.

Fanliang, L., Xiyan, H. and Lei, Z., 2008, The generalized reflexive solution for a class of matrix equations $(AX = B, XC = D)$, *Acta Mathematica Scientia*, 28B(1):185-193.

Gantmacher, F. R., 1959, The Theory of Matrices, Vol. 1, *Chelsea Publishing Company*, New York.

Keskin, T. and Aydın, K., 2007, Iterative Decreasing Dimension Algorithm, *Computers and Mathematics with Applications*, 53(7) 1153-1158.

Moler, C. and Van Loan, C., 1978, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, *SIAM Review*, 20 (4), 801-836.

Moler, C. and Van Loan, C., 2003, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, *SIAM Review*, 45(1), 3-49.

Morris, A. O., 1990, Linear Algebra, Second Edition, *Chapman and Hall*, London.

Peng, Z., 2005, An iterative method for the least squares symmetric solution of the linear matrix equation $AXB = C$, *Applied Mathematics and Computation*, 170:711-723.

Peng, Y.X., Hu, X.Y. and Zhang, L., 2005, An iteration method fort he symmetric solutions and the optimal approximation solution of the matrix equation $AXB = C$, *Applied Mathematics and Computation*, 160:763-777.

Sheng, X. and Chen, G., 2007, A finite iterative method for solving a pair of linear matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$, *Applied Mathematics and Computation*, 189:1350-1358.

Şahinbay, O. V., 2010, $AXB = C$ matris denklemlerinin iteratif çözümleri, Y.Lisans Tezi, *S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Taşcı, D., 2007, Soyut Cebir, *Alp Yayınevi*, Ankara, 431-476.

Verde-Star, L., 2005, Functions of Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 406, 285-300.

Verde-Star, L., 2007, On Linear Matrix Differential Equations, *Advances in Applied Mathematics*, 39(3), 329-344.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**Mustafa KOÇ**
Uyruğu	**T.C**
Doğum Yeri ve Tarihi	**Karaman-1964**
Telefon	
Faks	
e-mail	mustafa_koc64@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Konya Gazi Lisesi -KONYA**	**1982**
Üniversite	:	**S.Ü.Fen Fakültesi Matematik Bölümü –KONYA**	**1988**
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
1992-	**Milli Eğitim**	**Öğretmen**

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

EKLER

EK 1: Tablo 1. Örnek 5.1 İçin Maple Çıktısı

```
> A:=Matrix([[3,-1,-1],[3,3,-1],[23/4,-3/2,-5/3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ \frac{23}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

```
> E:=IdentityMatrix(3,3);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.Adım:

```
> A1:=E-A;
```

$$A1 := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -\frac{23}{4} & \frac{3}{2} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

2.Adım:

```
> eigenvalues(A1);
```

$$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

```
> L1:= -1/3; L2:=-1/2; L3:=-1/2;
```

$$L1 := -\frac{1}{3}, \ L2 := -\frac{1}{2}, \ L3 := -\frac{1}{2}$$

3.Adım:

```
> c11:=1;
```

$$c11 := 1$$

4.Adım:

```
> r1:=n->(-1/3)^n; r2:=n->6*(-1/3)^n-6*(-1/2)^n;  r3:=n->-36*(-1/2)^n-6*n*(-1/2)^(n-1)+36*(-1/3)^n;
```

$$r1 := n \to \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ r2 := n \to 6\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$r3 := n \to -36\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6\,n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 36\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5.Adım:

```
> d1:=sum((-1/3)^n,n=0..infinity); d2:=sum(6*(-1/3)^n-6*(-1/2)^n,n=0..infinity);
  d3:=sum(-36*(-1/2)^n-6*n*(-1/2)^(n-1)+36*(-1/3)^n,n=0..infinity);
```

$$d1 := \frac{3}{4}, d2 := \frac{1}{2}, d3 := \frac{1}{3}$$

6.Adım:

```
>A_Matrisinin_Tersi:=d1*E+d2*(A1-L1*E)+d3*MatrixMatrixMultiply((A1-L1*E),(A1-L2*E));
```

$$A\_Matrisinin\_Tersi := \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{29}{4} & -\frac{5}{12} & 4 \end{bmatrix}$$

Not: Örnek 5.1 deki $\delta_j = dj$ olarak alınmıştır.

EK 2: Tablo 2. Örnek 5.2 İçin Maple Çıktısı

> A:=Matrix([[1,-1,0],[0,1,-1],[-1/6,35/36,-3/4]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{35}{36} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

> E:=IdentityMatrix(3,3);

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1Adım:>
A1:=E-A;

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{35}{36} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

2.Adım:>
eigenvalues(A1);

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$$

> L1:=1/3;L2:=2/3;L3:=3/4;

$$L1 := \frac{1}{3}, L2 := \frac{2}{3}, L3 := \frac{3}{4}$$

3.Adım:> c11:=1; c21:=-1/3; c22:=1/3; c31:=5/36; c32:=-1/36; c33:=5/144;

$$c11 := 1,\ c21 := -\frac{1}{3},\ c22 := \frac{1}{3},\ c31 := \frac{5}{36},\ c32 := -\frac{1}{36}$$

4.Adım:>
r1:=n->(1/3)^n; r2:=n->-3*(1/3)^n+3*(2/3)^n; r3:=n->36/5*(-1/2)^n-36*(2/3)^n+144/5*(3/4)^n;

$$r1 := n \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n,\ r2 := n \rightarrow -3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$r3 := n \rightarrow \frac{36}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 36\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{144}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

5.Adım:
> d1:=sum((1/3)^n,n=0..infinity); d2:=sum(-3*(1/3)^n+3*(2/3)^n,n=0..infinity);
d3:=sum(36/5*(1/3)^n-36*(2/3)^n+144/5*(3/4)^n,n=0..infinity);

$$d1 := \frac{3}{2},\ d2 := \frac{9}{2},\ d3 := 18$$

6.Adım:
> A_Matrisinin_Tersi:=d1*E+d2*(A1-L1*E)+d3*MatrixMatrixMultiply((A1-L1*E),(A1-L2*E));

$$A\_Matrisinin\_Tersi := \begin{bmatrix} 4 & -\frac{27}{2} & 18 \\ 3 & -\frac{27}{2} & 18 \\ 3 & -\frac{29}{2} & 18 \end{bmatrix}$$

Not: Örnek 5.2 deki $\delta_j = dj$ olarak alınmıştır.

EK 3: Tablo 3. Örnek 5.3 İçin Maple Çıktısı

> A:=Matrix([[4/3,-2/3,1/4],[3/5,1,2/5],[37/38,3/38,7/4]]);

$$A := \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{37}{38} & \frac{3}{38} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

> E:=IdentityMatrix(3,3);

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.Adım:
> A1:=E-A;

$$A1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{37}{38} & -\frac{3}{38} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

2.Adım:
> eigenvalues(A1);

$$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

> L1:=-1/4;L2:=-1/2;L3:=-1/3;

$$L1 := -\frac{1}{4}, L2 := -\frac{1}{2}, L3 := -\frac{1}{3}$$

3.Adım:
> c11:=1; c21:=1/4; c22:=-1/4; c31:=1/48; c32:=1/24; c33:=-1/72;

$$c11 := 1, c21 := \frac{1}{4}, c22 := -\frac{1}{4}, c31 := \frac{1}{48}, c32 := \frac{1}{24}, c33 := -\frac{1}{72}$$

4.Adım:
> p1:=1/((1-L1)*c11);p2:=1/((1-L1)*c21)+1/((1-L2)*c22);
p3:=1/((1-L1)*c31)+1/((1-L2)*c32)+1/((1-L3)*c33);

$$p1 := \frac{4}{5}, p2 := \frac{8}{15}, p3 := \frac{2}{5}$$

5.Adım:
> A_Matrisinin_Tersi:=p1*E+p2*(A1-L1*E)+p3*MatrixMatrixMultiply((A1-L1*E),(A1-L2*E));

$$A\_Matrisinin\_Tersi := \begin{bmatrix} \frac{653}{950} & \frac{541}{1140} & -\frac{31}{150} \\ -\frac{251}{950} & \frac{953}{1140} & -\frac{23}{150} \\ -\frac{176}{475} & -\frac{86}{285} & \frac{52}{75} \end{bmatrix}$$

Not: Örnek 5.3 deki $\sigma_j = pj$ olarak alınmıştır.

EK 4: Tablo 4. Örnek 5.4 İçin Maple Çıktısı

```
> A:=Matrix([[-2,1,1],[-3,-2,1],[-23/4,3/2,8/3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -\frac{23}{4} & \frac{3}{2} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

1.Adım :

```
> eigenvalues(A);
```

$$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

```
> L1:=-1/3; L2:=-1/2; L3:=-1/2;
```

$$L1 := -\frac{1}{3}, L2 := -\frac{1}{2}, L3 := -\frac{1}{2}$$

2.Adım:

```
> c11:=1;
```

$$c11 := 1$$

```
> E:=IdentityMatrix(3,3);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.Adım :

```
>r1:=n->(-1/3)^n; r2:=n->6*(-1/3)^n-6*(-1/2)^n;
  r3:=n->-36*(-1/2)^n-6*n*(-1/2)^(n-1)+36*(-1/3)^n;
```

$$r1 := n \to \left(-\frac{1}{3}\right)^n, r2 := n \to 6\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$r3 := n \to -36\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6\,n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 36\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

4.Adım :

```
> det(x*E-A);
```

$$x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{1}{12}$$

```
> a0:=1/12; a1=7/12; a2:=4/3; a3:=1;
```

$$a0 := \frac{1}{12}, a1 = \frac{7}{12}, a2 := \frac{4}{3}, a3 := 1$$

5.Adım:

```
> t1:=(7/12)*r1(0)+a2*r1(1)+a3*r1(2); t2:=a1*r2(0)+a2*r2(1)+a3*r2(2); t3:=a1*r3(0)+a2*r3(1)+a3*r3(2);
```

$$t1 := \frac{1}{4},\ t2 := \frac{1}{2},\ t3 := 1$$

6.Adım:

```
> A_Matrisinin_Tersi:=(-1/a0)*(t1*E+t2*(A-L1*E)+t3*MatrixMatrixMultiply(A-L1*E,A-L2*E));
```

$$A\_Matrisinin\_Tersi := \begin{bmatrix} 82 & 14 & -36 \\ -27 & -5 & 12 \\ 192 & 33 & -84 \end{bmatrix}$$

Not: Örnek 5.4 deki $\gamma_j = tj$ olarak alınmıştır.

EK 5: Tablo 5. Örnek 5.5 İçin Maple Çıktısı

> E:=IdentityMatrix(3,3);

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> A:=Matrix([[-2,0,0],[-3,3,-2],[3,0,1]]);

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.Adım:

> eigenvalues(A);

$$-2, 3, 1$$

> L1:=-2; L2:=3; L3:=1;

$$L1 := -2$$
$$L2 := 3$$
$$L3 := 1$$

2.Adım:

> r1:=n->(-2)^n;
r2:=n->1/5*(3)^n-1/5*(-2)^n;
r3:=n->-1/6+1/15*(-2)^n+1/10*(3)^n;

$$r1 := n \rightarrow (-2)^n$$
$$r2 := n \rightarrow \frac{1}{5}\, 3^n - \frac{1}{5}\, (-2)^n$$
$$r3 := n \rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{15}\, (-2)^n + \frac{1}{10}\, 3^n$$

3.Adım:

>det(x*E-A);

$$(x+2)\,(x-3)\,(x-1)$$

> Karakteristik_Polinom:=x->x^3+(-2)*x^2+(-5)*x+6;

$$Karakteristik\_Polinom := x \rightarrow x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6$$

> a0:=6; a1=-5; a2:=-2; a3:=1;

$$a0 := 6,\ a1 = -5,\ a2 := -2,\ a3 := 1$$

4.Adım:

> d1:=(-5)*r1(0)+a2*r1(1)+a3*r1(2);d2:=a1*r2(0)+a2*r2(1)+a3*r2(2); d3:=a1*r3(0)+a2*r3(1)+a3*r3(2);

$$d1 := 3,\ d2 := -1,\ d3 := 1$$

5.Adım:

> A_Matrisinin_Tersi:=(-1/a0)*(d1*E+d2*(A-L1*E)+d3*MatrixMatrixMultiply(A-L1*E,A-L2*E));

$$A\_Matrisinin\_Tersi := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Not: Örnek 5.5 deki $\gamma_j = dj$ olarak alınmıştır.

EK 6: Tablo 6. Örnek 5.6 İçin Maple Çıktısı

```
> E:=IdentityMatrix(3,3);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A:=Matrix([[-1/3,2/3,-1/4],[-3/5,0,-2/5],[-37/38,-3/38,-3/4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{37}{38} & -\frac{3}{38} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

1.Adım:

```
>eigenvalues(A);
```

$$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

```
> L1:=-1/4; L2:=-1/2; L3:=-1/3;
```

$$L1 := -\frac{1}{4}$$

$$L2 := -\frac{1}{2}$$

$$L3 := -\frac{1}{3}$$

2.Adım:

```
>c11:=1; c21:=1/4;c22:=-1/4;c31:=1/48;c32:=1/24;c33:=-1/72;
```

$$c11 := 1, c21 := \frac{1}{4}, c22 := -\frac{1}{4}, c31 := \frac{1}{48}, c32 := \frac{1}{24}, c33 := -\frac{1}{72}$$

3.Adım:

```
> t1:=1/L1*c11; t2:=1/(L1*c21)+1/(L2*c22); t3:=1/(L1*c31)+1/(L2*c32)+1/(L3*c33);
```

$$t1 := -4$$

$$t2 := -8$$

$$t3 := -24$$

4.Adım:

```
> A_Matrisinin_Tersi:=t1*E+t2*(A-L1*E)+t3*MatrixMatrixMultiply((A-L1*E),(A-L2*E));
```

$$A\_Matrisinin\_Tersi := \begin{bmatrix} \frac{72}{95} & -\frac{237}{19} & \frac{32}{5} \\ \frac{138}{95} & -\frac{3}{19} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{108}{95} & \frac{308}{19} & -\frac{48}{5} \end{bmatrix}$$

Not: Örnek 5.6 daki $\overline{\sigma_j} = dj$ olarak alınmıştır.

EK 7: Tablo 7. Örnek 5.7 İçin Maple Çıktısı

> A:=Matrix([[2,29/12,1],[-3,-1/2,0],[1,-145/24,-3]]);

$$A := \begin{bmatrix} 2 & \frac{29}{12} & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{145}{24} & -3 \end{bmatrix}$$

1.Adım:
>eigenvalues(A);

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$$

> L1:=-1/2; L2:=-1/2; L3:=-1/2;

$$L1 := -\frac{1}{2}$$

$$L2 := -\frac{1}{2}$$

$$L3 := -\frac{1}{2}$$

> E:=IdentityMatrix(3,3);

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.Adım:
> A_Matrisinin_Tersi:=-2*E-4*(A-L1*E)-8*MatrixMatrixMultiply((A-L1*E),(A-L2*E));

$$A\_Matrisinin\_Tersi := \begin{bmatrix} -12 & -\frac{29}{3} & -4 \\ 72 & 56 & 24 \\ -149 & -116 & -50 \end{bmatrix}$$