T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAYIF δg-KAPALI KÜMELER, ZAYIF λ-KÜMELER VE BAZI ZAYIF AYIRMA AKSİYOMLARI

RABİA ÇOBAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2012
KONYA

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

RABİA ÇOBAN

Tarih:

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAYIF δg-KAPALI KÜMELER, ZAYIF
λ-KÜMELER VE BAZI ZAYIF AYIRMA AKSİYOMLARI

Rabia ÇOBAN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

2012, sayfa: 25 + vi

Jüri: Prof. Dr. Eşref HATIR
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, literatürde var olan bazı küme, uzay, genelleştirilmiş kapalı küme kavramlarını ele aldık. İkinci bölümde ise, E. Hatır ve T. Noiri (**[15]**) tarafından tanımlanan ***δ*-β-**açık kümeler yardımıyla özellikle **$\Lambda_{\delta\beta}$**-küme kavramını tanımladık. Ardından bu kümenin özelliklerini inceledik. Ayrıca E. Hatır ve T. Noiri (**[16]**) tarafından verilen **δβ-T_1** uzay adlı ayırma aksiyomuna ait **$\Lambda_{\delta\beta}$** –kümelerle ilgili karakterizasyonlarını verdik. **$\Lambda_{\delta\beta}$**–küme kavramıyla **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kapalı küme kavramının da tanımını verip bu yeni küme çeşidinin karakterizasyonlarını elde ettik. İlk defa N. Levine (**[17]**) tarafından verilen Genelleştirilmiş kapalı kümeler kavramı literatürde pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. Burada ***δ*-β-**açık kümeler yardımıyla **δβg-**kapalı küme olarak adlandırdığımız yeni bir genelleştirilmiş kapalı küme kavramını da tanıtıp, bu kümeye ait özellikleri inceledik.

Son olarak,

***δ*-β-**açık küme kavramı yardımıyla, **δβ-R_0** ve **δβ-$T_{½}$** uzay kavramlarını tanımladık. Bu iki yeni ayırma aksiyomunun karakterizasyonlarını ve ayrıca var olan diğer ayırma aksiyomları ile aralarındaki ilişkileri verdik.

Anahtar kelimeler: ***δ*-β-**açık küme, **$\Lambda_{\delta\beta}$**-küme, **δβg-**kapalı küme, **δβ-R_0** uzay, **δβ-$T_{½}$** uzay.

ABSTRACT

MASTER THESIS

WEAKLY δg-CLOSED SETS, WEAKLY λ-SETS AND SOME WEAK SEPARATİON AXİOMS

Rabia ÇOBAN

Selcuk University
Graduate School Of Naturel And Sciencess
Department Of Mathematics

Advisor: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

2012, page: 25 + vi

Jury: Prof. Dr. Eşref HATIR

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

This study consist of two parts:

In the first part, we gave definitions of some sets, spaces also generalized closed sets that given in literature.

In the second part, we defined **$\Lambda_{\delta\beta}$**-set by using definition of **δβ-**open set which is defined by E. Hatır and T. Noiri (**15**). At the same time using by **δβ-T_1** space defined by E. Hatır and T. Noiri (**16**) we gave the characterization of **$\Lambda_{\delta\beta}$**-set. We gave definition and characterization of **$\Lambda_{\delta\beta}$**-closed set by using **$\Lambda_{\delta\beta}$**-set. N. Levin (**17**) introdused the notions of generalized closed sets and lots of kind of generalized closed set given in literature. In this paper also we introduce and investigate a new class of generalized closed set called **δβg-**closed set.

Finally,

We defined **δβ-R_0** and **δβ-$T_{½}$** space also we gave the characterization and the relation ship between of this two separation axioms by using **δβ**-open set.

Keywords: **δβ**-open set, **$\Lambda_{\delta\beta}$**-set, **δβg**-closed set, **δβ-R_0** space, **δβ-$T_{½}$** space.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü üyesi Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı büyük bir titizlikle ve sabırla takip ederek çalışmamın her bir safhasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm, çalışmalarımın yönlendirilmesinde ve yürütülmesinde yol göstericiliğinden yararlandığım, saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI' ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunar, her zaman yanımda olan, desteğini gördüğüm sevgili arkadaşlarım Feride Ayten YÜKSEL ve Ferit ÖZŞAPÇI' ya teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Rabia ÇOBAN
KONYA 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\equiv$	Denk
$\Longrightarrow$	Gerek şart
$\Longleftarrow$	Yeter şart
ϕ	Boş küme
X	Evrensel küme
P(X)	Kuvvet kümesi
$A \subset B$	B, A kümesini kapsar
$A \not\subset B$	B, A kümesini kapsamaz
$A \cap B$	A kesişim B
$A \cup B$	A birleşim B
A – B	A fark B
f^{-1}	f, fonksiyonunun tersi
τ	Açık kümelerin oluşturduğu topolojik yapı
$\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$	$\Lambda_{\delta\beta}$-kümelerin oluşturduğu topolojik yapı
(X, τ)	Topolojik uzay
$\mathcal{U}$	Reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış topolojik yapı
(R, $\mathcal{U}$)	Alışılmış uzay
Q	Rasyonel sayılar
R – Q	İrrasyonel sayılar
α	İndis
Δ	İndis kümesi
Int(A)	A kümesinin içi
Cl(A)	A kümesinin dışı
δInt(A)	A kümesinin δ-içi
δCl(A)	A kümesinin δ-kapanışı
βCl(A)	A kümesinin β-kapanışı
δβCl(A)	A kümesinin δβ-kapanışı
β(X)	(X, τ) uzayındaki tüm β-açık kümelerin ailesi
δβ(X)	(X, τ) uzayındaki tüm δβ-açık kümelerin ailesi
PO(X)	(X, τ) uzayındaki tüm pre açık kümelerin ailesi
SO(X)	(X, τ) uzayındaki tüm semi açık kümelerin ailesi
α(X)	(X, τ) uzayındaki tüm α-açık kümelerin ailesi
BO(X)	(X, τ) uzayındaki tüm b-açık kümelerin ailesi
δPO(X)	(X, τ) uzayındaki tüm δ–pre açık kümelerin ailesi
δSO(X)	(X, τ) uzayındaki tüm δ–semi açık kümelerin ailesi

GİRİŞ

İlk olarak **1986** yılında H. Maki **[19]**, **Λ-**küme kavramını vermiş ve bu kümenin sağladığı özellikleri incelemiştir. Daha sonra H. Maki' nin çalışmaları üzerine **2002** yılında M. Ganster ve arkadaşları **[13]**, pre-**Λ**-küme, **2004** yılında E. Hatır ve T. Noiri **β-**açık küme **[1]** kavramı yardımıyla $\mathbf{\Lambda_{sp}}$-küme **[14]**, ve son olarak **2006** yılında M. Caldas ve arkadaşları **[10]**, $\mathbf{\Lambda_{b}}$-küme kavramını vermiş ve bu kümelerin sağladığı özellikleri incelemişlerdir.

Bu çalışmada; **δβ-**açık küme **[15]** kavramı yardımıyla, yukarıda sayılan çalışmalardan yararlanılarak, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme kavramını verdik ve bu kümenin sağladığı özellikleri inceledik. Ayrıca bu kavramdan yararlanarak bazı zayıf ayırma aksiyomlarını tanımlayıp bu ayırma aksiyomlarının karakterizasyonları ve var olan diğer ayırma aksiyomları ile aralarındaki ilişkileri inceledik.

1. BÖLÜM

1.1. Topolojik Uzaylarda Bazı Genelleştirilmiş Kümeler

Tanım 1.1.1. **(X, τ)** topolojik uzay, $\mathbf{A \subset X}$ olsun. Eğer, $\mathbf{A \subset Cl(Int(Cl(A)))}$ (sırasıyla, $\mathbf{A \subset Int(Cl(A))}$, $\mathbf{A \subset Cl(Int(A))}$, $\mathbf{A \subset Int(Cl(Int(A)))}$, $\mathbf{A \subset Cl(Int(A)) \cup Int(Cl(A))}$) ise, **A** kümesine **β**-açık küme **[1]** (sırasıyla, pre açık (ön açık) küme **[3]**, semi açık (yarı açık) küme **[17]**, **α**-açık küme **[24]**, **b**-açık küme **[4]**) denir.

Bir **β**-açık kümenin (sırasıyla, pre açık kümenin, semi açık kümenin, **α**-açık kümenin, **b**-açık kümenin) tümleyenine **β**-kapalı (sırasıyla, pre kapalı (ön kapalı), semi kapalı (yarı kapalı), **α**-kapalı, **b**-kapalı) küme denir.

Tez boyunca tüm **β**-açık (sırasıyla, pre açık, semi açık, **α**-açık, **b**-açık) kümelerin ailesini **β(X)** (sırasıyla, **PO(X)**, **SO(X)**, **α(X)**, **BO(X)**) ile göstereceğiz.

Tanım 1.1.2. **(X, τ)** topolojik uzay, $\mathbf{A \subset X}$ olsun. Eğer, $\mathbf{A = Int(Cl(A))}$ ($\mathbf{A = Cl(Int(A))}$) ise, **A** kümesine regüler (düzenli) açık küme (regüler kapalı küme) **[28]** denir.

Tanım 1.1.3. **(X, τ)** topolojik uzay, $\mathbf{A \subset X}$ olsun. **A** kümesinin kapsadığı **X**' in tüm regüler açık alt kümelerinin birleşimine **A** kümesinin **δ**-içi denir ve **δInt (A)** **[30]** ile gösterilir. $\mathbf{A = \delta Int(A)}$ oluyorsa, **A** kümesine **δ**-açık küme **[30]** denir. Bir **δ**-açık kümenin tümleyenine **δ**-kapalı küme denir.

Tanım 1.1.4. **(X, τ)** topolojik uzay, $\mathbf{A, B \subset X}$ olsun. $\mathbf{x \in X}$ noktasını alalım. **x** noktasını içeren **X**' deki her **U** regüler açık kümesi için, $\mathbf{A \cap U = \phi}$ oluyorsa, **x** noktasına **A** kümesinin **δ**-kapanış noktası denir. **A** kümesinin tüm **δ**-kapanış noktalarının kümesine **A**' nın **δ**-kapanışı denir ve **δCl (A)** **[30]** ile gösterilir. Başka bir ifadeyle, **A** kümesinin **δ**-kapanışı, $\mathbf{\delta Cl(A) = \{ x \in X \mid A \cap Int(Cl(B)) \neq \phi, x \in B \text{ ve } B \in \tau \}}$ **[29]** şeklinde tanımlanır. $\mathbf{A = \delta Cl(A)}$ oluyorsa, **A** kümesine **δ**-kapalı küme **[30]** denir.

Ayrıca, $\mathbf{[X - \delta Cl(A)] = \delta Int(X - A)}$ ve $\mathbf{[X - \delta Int(A)] = \delta Cl(X - A)}$ olur.

Lemma 1.1.1. **[8]** **(X, τ)** topolojik uzay, $\mathbf{A, B, A_\alpha \subset X\ (\alpha \in \Delta)}$ olsun. **A**, **B**, $\mathbf{A_\alpha}$ kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. **A ⊂ δCl (A)**,
2. **A ⊂ B ⇒ δCl (A) ⊂ δCl (B)**,
3. **δCl (⋂ { A_α | α ∈ Δ }) ⊂ ⋂ { δCl (A_α) | α ∈ Δ }**,
4. **δCl (⋃ { A_α | α ∈ Δ }) = ⋃ { δCl (A_α) | α ∈ Δ }**.

Tanım 1.1.5. (X, τ) topolojik uzay **A ⊂ X** olsun. Eğer, **A ⊂ Cl (Int (δCl (A)))** ise, **A** kümesine **δβ**-açık küme **[15]** denir.

Tanım 1.1.6. (X, τ) topolojik uzay **A ⊂ X** olsun. Eğer, **A ⊂ Int (δCl (A))** (**A ⊂ Cl (δInt (A))**) ise, **A** kümesine **δ**–pre açık küme **[22]** (**δ**–semi açık küme **[25]**) denir.

Bir **δβ**-açık (sırasıyla, **δ**–pre açık, **δ**–semi açık) kümenin tümleyenine **δβ**-kapalı (sırasıyla, **δ**–pre kapalı, **δ**–semi kapalı) küme denir.

Tez boyunca tüm **δβ**-açık (sırasıyla, **δ**–pre açık, **δ**–semi açık) kümelerin ailesini **δβ(X)** (sırasıyla, **δPO(X)**, **δSO(X)**) ile göstereceğiz.

E. Hatır ve T. Noiri (**[16]**) tarafından yukarıdaki kümelerle ilgili aşağıdaki şema verildi.

$$\begin{tikzcd}
\delta\text{-açık} \arrow[r] \arrow[d] & \text{açık} \arrow[r] \arrow[d] & \text{pre açık} \arrow[r] \arrow[d] & \delta\text{-pre açık} \arrow[d] \\
\delta\text{-semi açık} \arrow[r] & \text{semi açık} \arrow[r] & \boldsymbol{\beta}\text{-açık} \arrow[r] & \delta\text{-}\boldsymbol{\beta}\text{-açık}
\end{tikzcd}$$

Şema 1.1.1.

Tanım 1.1.7. (X, τ) topolojik uzay olsun. **A ⊂ X** alalım. **A** kümesini kapsayan **X**’ deki tüm **β**-kapalı kümelerin arakesitine **A** kümesinin **β**-kapanışı **[14]** denir ve **βCl (A)** ile gösterilir.

Tanım 1.1.8. (X, τ) topolojik uzay olsun. **A ⊂ X** alalım. **A** kümesini kapsayan **X**’deki tüm **δβ**-kapalı kümelerin arakesitine **A** kümesinin **δβ**-kapanışı **[15]** denir ve **δβCl (A)** ile gösterilir.

Tanım 1.1.9. (X, τ) topolojik uzay olsun. Herhangi **x**, **y ∈ X (x ≠ y)** noktaları için **x ∈ U**, **y ∉ U** olacak şekilde en az bir **U ⊂ X (U ∈ τ)** alt kümesi ve **y ∈ V**, **x ∉ V** olacak şekilde en az bir **V ⊂ X (V ∈ τ)** alt kümesi varsa **(X, τ)** uzayına **T_1**- uzayı denir.

Tanım 1.1.10. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. Herhangi **$x, y \in X$ ($x \neq y$)** noktaları için **$x \in U$, $y \notin U$** olacak şekilde en az bir **$U \subset X$ ($U \in \beta(X)$)** alt kümesi ve **$y \in V$, $x \notin V$** olacak şekilde en az bir **$V \subset X$ ($V \in \beta(X)$)** alt kümesi varsa **(X, τ)** uzayına **β-T_1** uzayı **[2]** denir.

Tanım 1.1.11. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. Eğer **X** kümesi ayrık iki **β**-açık kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa **(X, τ)** uzayına **β**-bağlantılı **[5, 26]** uzay denir.

Tanım 1.1.12. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. Eğer her **$x \in X$** noktası ve **x** noktasını içeren her **$U \in \tau$** kümesi için **$Cl(\{x\}) \subseteq U$** oluyorsa, **(X, τ)** uzayına **R_0** – uzayı **[11, 27]** denir.

Tanım 1.1.13. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. Herhangi bir **$U \in \beta(X)$** kümesi ve **$x \in U$** noktası için **$\beta Cl(\{x\}) \subset U$** oluyorsa, **$(X, \tau)$** uzayına **$\beta$-$R_0$** uzayı **[14]** denir.

Tanım 1.1.14. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. Herhangi **$x, y \in X$ ($x \neq y$)** noktaları için **$x \in U$, $y \notin U$** olacak şekilde en az bir **$U \subset X$ ($U \in \delta\beta(X)$)** alt kümesi ve **$y \in V$, $x \notin V$** olacak şekilde en az bir **$V \subset X$ ($V \in \delta\beta(X)$)** alt kümesi varsa **(X, τ)** uzayına **$\delta\beta$-T_1** uzayı **[16]** uzayı denir.

Tanım 1.1.15. **$I_x : X \rightarrow X$** fonksiyonu, her **$x \in X$** noktası için, **$I_x = x$** şeklinde tanımlansın. **I_x** fonksiyonuna birim (özdeşlik, idantik) fonksiyon denir.

Tanım 1.1.16. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. Eğer **τ** topolojisindeki açık kümelerin herhangi arakesiti yine **τ** topolojisinin elemanı oluyorsa **(X, τ)** uzayına Alexandroff uzayı **[7]** denir.

Şema 1.1.1. deki tanımları kullanarak aşağıdaki şemayı verelim. Şema 1.1.1. deki kümeler arasındaki geçiş sağlandığından aşağıdaki uzaylar arasındaki geçişlerin ispatı açıktır. Terslerinin doğru olmadığı **[14]**' de verildi.

$$T_1\text{- uzayı} \longrightarrow \beta\text{-}T_1 \text{ uzayı} \longrightarrow \delta\beta\text{-}T_1 \text{ uzayı}$$

Şema 1.1.2.

1.2. Λ-Kümeler ve Bazı Zayıf Λ-Kümeler

Bu kesimde öncelikli olarak literatürde yer alan sırasıyla, Λ, Λ_p, Λ_{sp}, Λ_b operatörlerinin tanımlarını ve bu operatörlerin bazı özelliklerini hatırladık. Ardından ilgili operatörleri kullanarak sırasıyla, Λ-küme, pre-Λ-küme, Λ_{sp}-küme, Λ_b-küme şeklinde tanımlanan kavramları ve bu kavramlar arasındaki bilinen karşılaştırmaları ele almaktayız.

Tanım 1.2.1. [21, 29] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A^Λ alt kümesi $A^\Lambda = \bigcap\{ U \mid A \subset U, U \in \tau \}$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.2.1. [19] (X, τ) topolojik uzayındaki A, B ve A_α $(\alpha \in \Delta)$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $A \subset A^\Lambda$,
2. $A \subset B \Rightarrow A^\Lambda \subset B^\Lambda$,
3. $A^{\Lambda\Lambda} = A^\Lambda$,
4. $A \in \tau \Rightarrow A = A^\Lambda$,
5. $(\bigcup \{A\alpha \mid \alpha \in \Delta\})^\Lambda = \bigcup \{ (A\alpha)^\Lambda \mid \alpha \in \Delta \}$,
6. $(\bigcap \{A\alpha \mid \alpha \in \Delta\})^\Lambda \subset \bigcap \{ (A\alpha)^\Lambda \mid \alpha \in \Delta \}$.

Uyarı 1.2.1. [19] Aşağıdaki örnekte verildiği üzere, Lemma 1.2.1. (6)' nın tersi, genelde doğru değildir.

Örnek 1.2.1. [19] $X = \{ a, b, c \}$ **ve** $\tau = \{ \phi, \{ a \}, \{ b, c \}, X \}$ olmak üzere, (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $A = \{ b \}$ ve $B = \{ c \}$ alt kümeleri için $(A \cap B)^\Lambda = \phi$ ve $(A^\Lambda \cap B^\Lambda) = \{ b, c \}$ elde edilir.

Literatürde Λ operatörü yardımıyla tanımlanan Λ-küme kavramını, Tanım 1.2.2. ile ele alalım.

Tanım 1.2.2. [19] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A = A^\Lambda$ ise, A kümesine Λ-küme denir.

Λ-kümeler ile ilgili özellikler, Λ-küme kavramını tanımlayan H. Maki **[19]** tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Lemma 1.2.2. [19] (X, τ) topolojik uzayındaki A ve A_α $(\alpha \in \Delta)$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. ϕ ve X kümeleri Λ-kümedir.

2. Her $\alpha \in \Delta$ için A_α kümesi Λ-küme ise, $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ kümesi Λ-kümedir.
3. Her $\alpha \in \Delta$ için A_α kümesi Λ-küme ise, $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ kümesi Λ-kümedir.

Tanım 1.2.1. de açık küme yerine pre açık küme alınarak Ganster ve ark. **[13]** tarafından tanımlanan Λ_p operatörünü ele alalım.

Tanım 1.2.3. [13] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\Lambda_p(A)$ alt kümesi $\Lambda_p(A) = \bigcap\{ U \mid A \subset U, U \in PO(X) \}$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi de Ganster ve ark. **[13]** tarafından verilen Λ_p operatörünün bazı özelliklerini hatırlayalım.

Lemma 1.2.3. [13] (X, τ) topolojik uzayındaki A, B ve A_α $(\alpha \in \Delta)$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $A \subset \Lambda_p(A)$,
2. $A \subset B \Rightarrow \Lambda_p(A) \subset \Lambda_p(B)$,
3. $\Lambda_p(\Lambda_p(A)) = \Lambda_p(A)$,
4. $A \in PO(X) \Rightarrow A = \Lambda_p(A)$,
5. $\Lambda_p(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}) = \bigcup\{\Lambda_p(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$,
6. $\Lambda_p(\bigcap\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}) \subset \bigcap\{\Lambda_p(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$.

Uyarı 1.2.2. [13] Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi Lemma 1.2.3. (6)'nın tersi, genelde doğru değildir.

Örnek 1.2.2. [13] $X = \{ a, b, c \}$ ve $\tau = \{ \phi, \{ a \}, X \}$ olmak üzere, (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $A = \{ b \}$ ve $B = \{ c \}$ alt kümeleri için $\Lambda_p(A \cap B) = \phi$ kümedir. Fakat $\Lambda_p(A) \cap \Lambda_p(B) = \{ a \}$ elde edilir.

Literatürde yer alan Λ_p operatörünün tanımı ve bazı özelliklerinden sonra şimdi bu operatörü kullanarak verilen yeni bir küme çeşidini ele alalım.

Tanım 1.2.4. [13] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A = \Lambda_p(A)$ ise, A kümesine pre-Λ-küme denir.

H. Maki **[19]** tarafından verilen Λ-küme ile Ganster ve ark. **[13]** tarafından verilen pre-Λ-küme kavramları arasındaki ilişki aşağıdaki sonuçta verildi.

Sonuç 1.2.1. [13] Her Λ-küme, pre-Λ-kümedir.

İspat. Herhangi bir **A** alt kümesini alalım. **A**, **Λ**-küme olduğundan, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\Lambda}$ ve Tanım 1.2.1. gereğince $\mathbf{A} \in \boldsymbol{\tau}$ olur. Her açık küme, pre açık küme olduğundan, Lemma 1.2.3. (4) ve Tanım 1.2.4. gereğince **A** kümesi pre-**Λ**-kümedir.

Pre açık kümelerden daha zayıf olan **β**-açık kümeler kullanılarak Hatır ve Noiri **[14]** tarafından tanımlanan yeni bir **Λ** küme kavramını ele alalım.

Tanım 1.2.5. [14] $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ topolojik uzay ve $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ olsun. $\boldsymbol{\Lambda_{sp}(A)}$ alt kümesi $\boldsymbol{\Lambda_{sp}(A)} = \bigcap\{ \mathbf{U} \mid \mathbf{A} \subset \mathbf{U}, \mathbf{U} \in \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) \}$ şeklinde tanımlanır.

$\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$ operatörü yardımıyla tanımlanan $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$-küme kavramı, aşağıdaki gibidir:

Tanım 1.2.6. [14] $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ topolojik uzay ve $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ olsun. Eğer $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda_{sp}(A)}$ ise, **A** kümesine $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$-küme denir.

Şimdi de Hatır ve Noiri **[14]** tarafından verilen $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$ operatörünün bazı özelliklerini ele alalım.

Lemma 1.2.4. [14] $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ topolojik uzayındaki **A** ve $\mathbf{A}_{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha} \in \Delta)$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $\boldsymbol{\Lambda_{sp}(A)}$ alt kümesi, $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$-kümedir.
2. $\mathbf{A} \in \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda_{sp}(A)}$.
3. Her $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ için, $\mathbf{A}_{\alpha}$ kümesi $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$-küme ise, $(\bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathbf{A}_{\alpha})$ kümesi, $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$-kümedir.
4. Her $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ için, $\mathbf{A}_{\alpha}$ kümesi $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$-küme ise, $(\bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathbf{A}_{\alpha})$ kümesi $\boldsymbol{\Lambda_{sp}}$-kümedir.

Pre açık küme kavramından daha zayıf, **β**-açık küme kavramından daha kuvvetli olan **b**-açık küme kavramı için, Caldas ve ark. **[10]** tarafından verilen $\boldsymbol{\Lambda_b}$ operatörü, $\boldsymbol{\Lambda_b}$-küme kavramları aşağıdaki iki tanımdaki gibidir:

Tanım 1.2.7. [10] $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ topolojik uzay ve $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ olsun. $\mathbf{A}^{\Lambda_b}$ alt kümesi $\mathbf{A}^{\Lambda_b} = \bigcap\{ \mathbf{U} \mid \mathbf{A} \subset \mathbf{U}, \mathbf{U} \in \mathbf{BO}(\mathbf{X}) \}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.8. [10] $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ topolojik uzay ve $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ olsun. Eğer $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\Lambda_b}$ ise, **A** kümesine $\boldsymbol{\Lambda_b}$-küme denir.

Şimdi de Caldas ve ark. **[10]** tarafından verilen $\boldsymbol{\Lambda_b}$ operatörünün bazı özelliklerini inceleyelim.

Lemma 1.2.5. [10] (X, τ) topolojik uzayındaki **A**, **B** ve $\mathbf{A_\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $A \subset A^{\Lambda_b}$,
2. $A \subset B \Rightarrow A^{\Lambda_b} \subset B^{\Lambda_b}$,
3. $(A^{\Lambda_b})^{\Lambda_b} = A^{\Lambda_b}$,
4. $(\bigcup \{A\alpha \mid \alpha \in \Delta\})^{\Lambda_b} = \bigcup \{(A\alpha)^{\Lambda_b} \mid \alpha \in \Delta\}$,
5. $A \in BO(X) \Rightarrow A = A^{\Lambda_b}$,
6. $(\bigcap \{A\alpha \mid \alpha \in \Delta\})^{\Lambda_b} \subset \bigcap \{(A\alpha)^{\Lambda_b} \mid \alpha \in \Delta\}$.

2. BÖLÜM

2.1. $\Lambda_{\delta\beta}$-kümeler

Şekil 1.1.1. de verildiği gibi **β**-açık küme kavramından daha zayıf olan **δβ**-açık küme kavramı için karşılık gelen **Λ** operatörünü tanımlayarak, bu operatörün bazı özelliklerini elde ettik. Ardından $\Lambda_{\delta\beta}$ operatörü olarak tanımladığımız bu yeni **Λ** operatörünü kullanarak $\Lambda_{\delta\beta}$-küme kavramını tanımladık. Ayrıca, $\Lambda_{\delta\beta}$-küme kavramının sağladığı bazı özellikleri de elde etmekteyiz.

Tanım 2.1.1. **(X, τ)** topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\Lambda_{\delta\beta}(A)$ alt kümesi $\Lambda_{\delta\beta}(A) = \bigcap\{ U \mid A \subset U, U \in \delta\beta(X) \}$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.1.1. **(X, τ)** topolojik uzayındaki **A**, **B** ve A_α $(\alpha \in \Delta)$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $A \subset \Lambda_{\delta\beta}(A)$,
2. $A \subset B \Rightarrow \Lambda_{\delta\beta}(A) \subset \Lambda_{\delta\beta}(B)$,
3. $\Lambda_{\delta\beta}(\Lambda_{\delta\beta}(A)) = \Lambda_{\delta\beta}(A)$,
4. $A \in \delta\beta(X) \Rightarrow A = \Lambda_{\delta\beta}(A)$,
5. $\Lambda_{\delta\beta}(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}) = \bigcup \{ \Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta \}$,
6. $\Lambda_{\delta\beta}(\bigcap\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}) \subset \bigcap \{ \Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta \}$.

İspat. **(1)** $A \subset U$ olacak şekilde, **U** **δβ**-açık kümesini alalım. **A** kümesini kapsayan tüm **δβ**-açık kümeler için $A \subset \bigcap U$ olur. Tanım 2.1.1. gereğince $A \subset \Lambda_{\delta\beta}(A)$ elde edilir.

(2) $A \subset B$ olsun. Olmayana ergi yönteminden, $x \notin \Lambda_{\delta\beta}(B)$ olacak şekilde bir **x** noktasını alalım. O halde Tanım 2.1.1. gereğince $x \notin V$ olacak şekilde en az bir $V \in \delta\beta(X)$ $(B \subset V)$ vardır. $A \subset V$ ve $x \notin \bigcap V$ olduğundan, $x \notin \Lambda_{\delta\beta}(A)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\Lambda_{\delta\beta}(A) \subset \Lambda_{\delta\beta}(B)$ olur.

(3) Tanım 2.1.1. gereğince $\Lambda_{\delta\beta}(A) = \bigcap\{ U \mid A \subset U, U \in \delta\beta(X) \}$. $\Lambda_{\delta\beta}(\bigcap U) = \bigcap\{ V \mid \bigcap U \subset V, V \in \delta\beta(X) \}$. Ayrıca, $\bigcap U \subset U$ ve $U \in \delta\beta(X)$ olduğundan, $\bigcap V = \bigcap U$ olur. Dolayısıyla, $\Lambda_{\delta\beta}(\Lambda_{\delta\beta}(A)) = \Lambda_{\delta\beta}(A)$ elde edilir.

(4) Tanım 2.1.1. gereğince $\Lambda_{\delta\beta}(A) = \bigcap\{ U \mid A \subset U, U \in \delta\beta(X) \}$. $A \in \delta\beta(X)$ olduğundan, $\bigcap U = A$ olur. Dolayısıyla, $A = \Lambda_{\delta\beta}(A)$ elde edilir.

(5) Her $\alpha \in \Delta$ için **(2)** gereğince $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) \subset \Lambda_{\delta\beta}(\,\cup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\,)}$ geçerlidir. Dolayısıyla, $\cup_{\alpha\in\Delta}\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha)} \subset \mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}\,(\,\cup_{\alpha\in\Delta}\mathbf{A_\alpha})$ elde edilir.

Tersine, $\mathbf{x} \notin \cup_{\alpha\in\Delta}\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha)}$ kabul edelim. Her $\alpha \in \Delta$ için $\mathbf{x \notin \Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha)}$ olur, öyle ki $\mathbf{A_\alpha \subset U_\alpha}$ ve $\mathbf{x \notin U_\alpha}$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{U_\alpha \in \delta\beta(X)}$ kümesi vardır. $\cup_{\alpha\in\Delta}\mathbf{A_\alpha} \subset \cup_{\alpha\in\Delta}\mathbf{U_\alpha}$ ve $\mathbf{(\,\cup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha\,) \in \delta\beta(X)}$ olduğundan, $\mathbf{x \notin (\,\cup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha\,)}$ olur. $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\,(\cup_{\alpha\in\Delta}A_\alpha) = \cap\{\cup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha \mid \cup_{\alpha\in\Delta}A_\alpha \subset \cup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha,\ \cup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha \in \delta\beta(X)\,\}}$ olduğundan, $\mathbf{x \notin \Lambda_{\delta\beta}\,(\cup_{\alpha\in\Delta}A_\alpha)}$ olur. Bu ise, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\,(\,\cup_{\alpha\in\Delta}A_\alpha\,) \subset \cup_{\alpha\in\Delta}\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha)}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\,(\,\cup\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}\,) = \cup\,\{\,\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\,\}}$ olur.

(6) $\mathbf{x \notin \cap\,\{\,\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\,\}}$ olduğunu kabul edelim. $\mathbf{x \notin \Lambda_{\delta\beta}(A_{\alpha_0})}$ olacak şekilde en az bir $\boldsymbol{\alpha_0} \in \Delta$ ve en az bir $\mathbf{U \in \delta\beta(X)}$ kümesi vardır, öyle ki $\mathbf{x \notin U}$ ve $\mathbf{A_{\alpha_0} \subset U}$ olur. $\mathbf{\cap\,A_\alpha \subset A_{\alpha_0} \subset U}$ ve $\mathbf{x \notin U}$ olduğundan, $\mathbf{x \notin \Lambda_{\delta\beta}\,(\,\cap\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}\,)}$ olur. O halde $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(\,\cap\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}\,) \subset \cap\,\{\,\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\,\}}$ elde edilir.

Uyarı 2.1.1. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere Lemma 2.1.1. (6)' nın tersi, genelde doğru değildir.

Örnek 2.1.1. $\mathbf{(\,R,\ \mathcal{U}\,)}$ uzayı **R** (Reel sayılar) kümesinin alışılmış topolojisi olmak üzere, $\mathbf{A = Q}$ (Rasyonel sayılar) ve $\mathbf{B = (\,R - Q\,)}$ (İrrasyonel sayılar) alt kümeleri için $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\,(\,A \cap B\,) = \phi}$ kümedir. Fakat $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\,(\,A\,) \cap \Lambda_{\delta\beta}\,(\,B\,) = R}$ elde edilir.

Tanım 2.1.2. $\mathbf{(X,\ \tau)}$ topolojik uzay ve $\mathbf{A \subset X}$ olsun. Eğer $\mathbf{A = \Lambda_{\delta\beta}(A)}$ ise, **A** kümesine $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme denir.

Lemma 2.1.2. $\mathbf{(X,\ \tau)}$ topolojik uzayındaki **A** ve $\mathbf{A_\alpha\,(\,\alpha \in \Delta\,)}$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $\boldsymbol{\phi}$ ve **X** kümeleri $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.
2. $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A)}$, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.
3. $\mathbf{A \in \delta\beta(X)}$ ise, **A** kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.
4. Her $\alpha \in \Delta$ için $\mathbf{A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme ise, $\cup_{\alpha\in\Delta}\mathbf{A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.
5. Her $\alpha \in \Delta$ için $\mathbf{A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme ise, $\cap_{\alpha\in\Delta}\mathbf{A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.

İspat. (1) $\boldsymbol{\phi}$**,** $\mathbf{X \in \delta\beta(X)}$ olduğundan, ispat açıktır.

(2) $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\,(\,\Lambda_{\delta\beta}(A)\,) = \Lambda_{\delta\beta}(A)}$ olduğundan, Tanım 2.1.2. gereğince $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A)}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.

(3) $\mathbf{A \in \delta\beta(X)}$ olsun. Lemma 2.1.1. (4) gereğince $\mathbf{A = \Lambda_{\delta\beta}(A)}$ elde edilir. Dolayısıyla, tanım gereğince **A** kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.

(4) Her $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ için $\mathbf{A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme olsun. Lemma 2.1.1. (5) gereğince $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\ (\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}\ ) = \bigcup\ \{\ \Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\ \}}$ vardır. $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) = A_\alpha}$ olduğundan, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}\,(\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\,) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbf{\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.

(5) Her $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ için $\mathbf{A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme olsun. Lemma 2.1.1. (1) gereğince $\mathbf{\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subset \Lambda_{\delta\beta}(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha)}$ vardır. $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A_\alpha) = A_\alpha}$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafından kesişim işlemi alırsak $\mathbf{\bigcap\ \Lambda_{\delta\beta}\ (A_\alpha) = \bigcap\ A_\alpha}$ olur. Lemma 2.1.1. (6) gereğince $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(\ \bigcap A_\alpha\ ) \subset \bigcap A_\alpha}$ olur. Dolayısıyla, $\mathbf{\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha}$ kümesi $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.

$\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümelerin oluşturduğu aile $\boldsymbol{\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}}$ olmak üzere, bu ailenin Alexandroff **[7]** tarafından verilen Alexandroff uzayı olduğunu aşağıdaki teoremde verdik.

Teorem 2.1.1. (X, τ) topolojik uzayı için $\boldsymbol{\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}}$ **= { A | A, (X, τ)' da** $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$**-küme** } alırsak **(** **X,** $\boldsymbol{\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}}$ **)** uzayı bir Alexandroff uzaydır.

İspat. $\boldsymbol{\phi}$ ve **X** kümeleri $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme, Lemma 2.1.2. gereğince $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümelerin herhangi birleşimi ve herhangi arakesiti yine $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme olduğundan, **(X,** $\boldsymbol{\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}}$ **)** uzayı bir Alexandroff uzaydır.

Literatürde **δβ**-açık kümelerle ilgili bir ayırma aksiyomu olan $\mathbf{\delta\beta\text{-}T_1}$ uzay kavramını Tanım 1.1.14. de hatırlamıştık. Şimdi $\mathbf{\delta\beta\text{-}T_1}$ uzayının $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme ve **δβ**-kapalı kümelerle ilgili karakterizasyonlarını verelim.

Önerme 2.1.1. (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki özellikler denktir:

1. **(X, τ)**, $\mathbf{\delta\beta\text{-}T_1}$ uzayıdır.
2. $\forall$ **x ∈ X** için **{x}**, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümedir.
3. $\forall$ **x ∈ X** için **{x}**, **δβ**-kapalıdır.

İspat. (1) ⇒ (2) x ∈ X noktasını alalım. **x** noktasından farklı herhangi bir **y** noktası için Tanım 1.1.14. gereğince **x ∈ U**, **y ∉ U** olacak şekilde en az bir **U ⊂ X** (**U ∈ δβ(X)**) kümesi vardır. $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(\{x\}) = \bigcap U}$ olduğundan, **y** $\mathbf{\notin \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})}$ elde edilir. Buradan $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(\{x\}) \subset \{x\}}$ olur. Lemma 2.1.1. gereğince $\mathbf{\{x\} \subset \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})}$ olduğundan, $\mathbf{\{x\} = \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})}$ eşitliği elde edilir.

(2) ⇒ (3) $x \in X$ noktasını alalım. Herhangi bir $y \in X - \{x\}$ için (2) gereğince $\{y\} = \Lambda_{\delta\beta}(\{y\})$ olur. Tanım 2.1.1. gereğince $x \notin U_y$, $y \in U_y$ olacak şekilde en az bir $U_y \in \delta\beta(X)$ kümesi vardır. Böylece $y \in U_y \subset (X - \{x\})$ ve $(X - \{x\}) = \bigcup_{y \in (X - \{x\})} U_y$ bulunur. **δβ**-açık kümelerin herhangi birleşimi yine **δβ**-açık küme **[16]** olduğundan, $\{x\}$ kümesi bir **δβ**-kapalı küme olur.

(3) ⇒ (1) X' deki herhangi faklı **x**, **y** noktaları için $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri **δβ**-kapalı kümeler olsun. O halde (X, τ) uzayının **δβ**-T_1 uzayı olduğu açıktır.

β-açık kümelerle ilgili tanımlanan fonksiyon çeşitlerinden, Nasef ve ark. **[23]** tarafından verilen strongly-**β**-irresolute fonksiyon kavramını aşağıdaki tanımda ele aldık.

Tanım 2.1.3. [23] (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Eğer, (Y, σ) uzayındaki her $V \in \beta(Y)$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ oluyorsa, **f** fonksiyonuna strongly-**β**-irresolute fonksiyon denir.

Topolojinin önemli konularından biri olan bağlantılılık kavramı, Hatır ve Noiri **[16]** tarafından **δβ**-açık kümeler aracılığıyla aşağıdaki gibi yeni bir bağlantılılık çeşidine dönüştürülmüştür.

Tanım 2.1.4. [16] (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer **X** kümesi ayrık iki **δβ**-açık kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa, (X, τ) uzayına **δβ**-bağlantılı uzay denir.

Tanım 2.1.3. deki **β**-açık küme yerine **δβ**-açık küme alarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.1.4. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Eğer, (Y, σ) uzayındaki her $V \in \delta\beta(Y)$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ oluyorsa, **f** fonksiyonuna strongly-**δβ**-irresolute fonksiyon denir.

Şimdi (X, τ) topolojik uzayı verildiğinde $\Lambda_{\delta\beta}$-kümeler aracılığıyla Teorem 2.1.1. deki gibi tanımlanan $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$ ailesinin oluşturduğu $(X, \tau^{\Lambda_{\delta\beta}})$ Alexandroff uzayı ve (X, τ) topolojik uzayı ile ilgili bazı özellikleri ele alalım.

Teorem 2.1.2. (X, τ) ve $(X, \tau^{\Lambda_{\delta\beta}})$ topolojik uzayları için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. **(X, τ)** uzayının **$\delta\beta$-T_1** uzayı olması için gerek ve yeter şart **(X, $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$)** uzayının ayrık uzay olmasıdır.
2. **Id_x : (X, $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$) → (X, τ)** birim fonksiyonu strongly-**δβ**–irresolute fonksiyonudur.
3. **(X, $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$)** uzayı bağlantılı uzay ise, **(X, τ)** uzayı **δβ**-bağlantılı uzaydır.

İspat. (1) ⇒ (X, τ) uzayı **$\delta\beta$-T_1** uzayı olsun. Herhangi bir **x ∈ X** noktasını alalım. Önerme 2.1.1. gereğince **{x}**, $\Lambda_{\delta\beta}$-küme ve **{x} ∈ $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$** olur. **X**' in herhangi bir **A** alt kümesi için Lemma 2.1.2. gereğince **A ∈ $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$** elde edilir. Bu ise, **(X, $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$)** uzayının ayrık uzay olduğunu gösterir.

⇐ Her **x ∈ X** noktası için, **{x} ∈ $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$** ve **{x}** kümesi $\Lambda_{\delta\beta}$-küme olsun. Önerme 2.1.1. gereğince **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-T_1** uzayıdır.

(2) V kümesi **(X, τ)** uzayında herhangi bir **δβ**-açık küme olsun. Lemma 2.1.2. gereğince $(Id_x)^{-1}$ **(V) = V ∈ $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$** olduğundan, **$Id_x$** fonksiyonu strongly-**δβ**-irresolute fonksiyonudur.

(3) (X,τ) uzayının **δβ**-bağlantılı uzay olmadığını kabul edelim. O halde **$V_1 \cup V_2$ = X** ve **$V_1 \cap V_2 = \phi$** olacak şekilde **(X, τ)** uzayında boştan farklı **V_1, V_2** şeklinde iki **δβ**-açık kümesi vardır. Dolayısıyla, $(Id_x)^{-1}$**(V_1)**, $(Id_x)^{-1}$**(V_2)** kümeleri **(X, $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$)** uzayında açık kümelerdir. $(Id_x)^{-1}$**(V_1) ∪** $(Id_x)^{-1}$**(V_2) = $V_1 \cup V_2$ = X** ve $(Id_x)^{-1}$**(V_1) ∩** $(Id_x)^{-1}$**(V_2) = $V_1 \cap V_2 = \phi$** olur. Bu ise, **(X, $\tau^{\Lambda_{\delta\beta}}$)** uzayının bağlantılı olmadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

2.2. $\Lambda_{\delta\beta}$ -kapalı Kümeler

Λ-küme ve kapalı küme yardımıyla **[6]**’ da tanımlanan **𝝀**-kapalı küme kavramı da literatürde önemli yer tutmaktadır. Şimdi, Arenas ve ark. **[6]** tarafından verilen bu kümenin tanımını verip özelliklerini inceleyelim.

Tanım 2.2.1. [6] (X, τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $\mathbf{A \subset X}$ alt kümesini alalım. Eğer **L**, **Λ**-kümesi ve **F**, kapalı kümesi için $\mathbf{A = L \cap F}$ oluyorsa, **A** kümesine **𝝀**-küme (ya da **𝝀**-kapalı küme) denir. Bir **𝝀**-kapalı kümenin tümleyenine **𝝀**-açık küme denir.

Lemma 2.2.1. [6] (X, τ) topolojik uzay olsun. Herhangi bir $\mathbf{A \subset X}$ alt kümesi için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

1. **A** kümesi **𝝀**-kapalı kümedir.
2. **L** kümesi **Λ**-küme olmak üzere, $\mathbf{A = L \cap Cl(A)}$ eşitliği vardır.
3. $\mathbf{A = A^{\Lambda} \cap Cl(A)}$.

Lemma 2.2.2. [9] (X, τ) topolojik uzay olsun. $\mathbf{A_\alpha}$ $\mathbf{(\alpha \in \Delta)}$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. Her $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ için $\mathbf{A_\alpha}$ kümesi **𝝀**-kapalı küme ise, $\bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathbf{A_\alpha}$ kümesi **𝝀**-kapalı kümedir.
2. Her $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ için $\mathbf{A_\alpha}$ kümesi **𝝀**-açık küme ise, $\bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathbf{A_\alpha}$ kümesi **𝝀**-açık kümedir.

Şimdi, Tanım 2.2.1. de yer alan **Λ**-küme kavramından daha zayıf $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme kavramı ve kapalı küme kavramından daha zayıf **δ**-kapalı küme kavramı kullanılarak $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kapalı küme olarak adlandırdığımız yeni bir **Λ**-kapalı küme çeşidini verelim.

Tanım 2.2.2. (X, τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $\mathbf{A \subset X}$ alt kümesini alalım. Eğer **L**, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kümesi ve **F**, **δ**-kapalı kümesi için $\mathbf{A = L \cap}$ F oluyorsa, **A** kümesine $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kapalı küme denir.

Sonuç 2.2.1. Her $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-küme ve her **δ**-kapalı küme $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kapalı kümedir.

İspat. Tanım 2.2.2. den açıktır.

Şimdi de $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}}$-kapalı küme kavramının karakterizasyonlarını verelim.

Önerme 2.2.1. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. Herhangi bir $\mathbf{A \subset X}$ alt kümesi için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

1. **A** kümesi $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı kümedir.
2. **L** kümesi $\Lambda_{\delta\beta}$-küme olmak üzere, $\mathbf{A = L \cap \delta Cl(A)}$ eşitliği vardır.
3. $\mathbf{A = \Lambda_{\delta\beta}(A) \cap \delta Cl(A)}$.

İspat. **(1) ⇒ (2)** **A** kümesi $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı küme olsun. O halde Tanım 2.2.2. gereğince **L**, $\Lambda_{\delta\beta}$-küme ve **F**, **δ**-kapalı küme olacak şekilde **A** kümesi, $\mathbf{A = L \cap F}$ şeklinde yazılır. $\mathbf{A \subset F}$ olduğundan, $\mathbf{\delta Cl(A) \subset \delta Cl(F) = F}$ ve $\mathbf{A \subset L \cap \delta Cl(A) \subset L \cap F = A}$ olur. Böylece **L**, $\Lambda_{\delta\beta}$-küme olmak üzere, $\mathbf{A = L \cap \delta Cl(A)}$ eşitliği elde edilir.

(2) ⇒ (3) **L** kümesi $\Lambda_{\delta\beta}$-küme olmak üzere, $\mathbf{A = L \cap \delta Cl(A)}$ olsun. $\mathbf{A \subset L}$ olduğundan, $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A) \subset \Lambda_{\delta\beta}(L) = L}$ ve $\mathbf{A \subset \Lambda_{\delta\beta}(A) \subset L}$ olur. $\mathbf{A \subset \Lambda_{\delta\beta}(A) \cap \delta Cl(A) \subset L \cap \delta Cl(A) = A}$. Böylece $\mathbf{A = \Lambda_{\delta\beta}(A) \cap \delta Cl(A)}$ elde edilir.

(3) ⇒ (1) $\mathbf{A = \Lambda_{\delta\beta}(A) \cap \delta Cl(A)}$ eşitliği geçerli olsun. $\mathbf{\Lambda_{\delta\beta}(A)}$ kümesi, bir $\Lambda_{\delta\beta}$-küme ve **δCl(A)** kümesi, bir **δ**-kapalı küme olduğundan, Tanım 2.2.2. gereğince **A** kümesi, $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı kümedir.

Tanım 2.2.2. de verilen $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı küme kavramı ile ilgili olarak; akla gelen " Herhangi kesişim işlemine göre $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı kümeler ailesi kapalı mıdır ? " şeklindeki soruyu aşağıdaki önermede cevaplayalım.

Önerme 2.2.2. **(X, τ)** topolojik uzay olsun. $\mathbf{A_\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha \in \Delta}$) alt kümesini alalım. Her $\boldsymbol{\alpha \in \Delta}$ için, eğer $\mathbf{A_\alpha \subset X}$ alt kümesi $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı küme ise, $\mathbf{\bigcap\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}}$ kümesi $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı kümedir.

İspat. Her $\boldsymbol{\alpha \in \Delta}$ için, $\mathbf{A_\alpha \subset X}$ kümesinin $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı küme olduğunu kabul edelim. O halde her $\boldsymbol{\alpha \in \Delta}$ için, $\mathbf{A_\alpha = L_\alpha \cap F_\alpha}$ olacak şekilde bir $\mathbf{L_\alpha}$, $\Lambda_{\delta\beta}$-kümesi ile bir $\mathbf{F_\alpha}$, **δ**-kapalı kümesi vardır. Dolayısıyla $\bigcap_{\alpha\in\Delta} \boldsymbol{A_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in\Delta}(\boldsymbol{L_\alpha} \cap \boldsymbol{F_\alpha})$ ve $\bigcap_{\alpha\in\Delta} \boldsymbol{A_\alpha} = (\bigcap_{\alpha\in\Delta} \boldsymbol{L_\alpha}) \cap (\bigcap_{\alpha\in\Delta} \boldsymbol{F_\alpha})$ eşitliği geçerlidir. Lemma 2.1.2. gereğince $\bigcap_{\alpha\in\Delta} \boldsymbol{L_\alpha}$, $\Lambda_{\delta\beta}$-kümedir. Ayrıca, $\bigcap_{\alpha\in\Delta} \boldsymbol{F_\alpha}$ kümesi **δ**-kapalı küme olduğundan, $\bigcap_{\alpha\in\Delta} \boldsymbol{A_\alpha}$ kümesi Tanım 2.2.2. gereğince $\Lambda_{\delta\beta}$-kapalı küme olur.

Literatürde topolojik uzaylardaki genelleştirilmiş kapalı kümeler de önemli yer tutmaktadır. Şimdi bunlardan ikisini ele alalım.

Tanım 2.2.3. [18] (X, τ) topolojik uzay olsun. **A ⊂ X** alt kümesi için **A ⊂ U** ve **U ∈ τ** iken **Cl (A) ⊂ U** oluyorsa, **A** kümesine **g**-kapalı küme denir.

Tanım 2.2.4. [14] (X, τ) topolojik uzay olsun. **A ⊂ X** alt kümesi için, **A ⊂ U** ve **U**, **β**-açık küme iken **Cl (A) ⊂ U** oluyorsa, **A** kümesine **β-g**-kapalı küme denir.

N. Levin **[18]** tarafından verilen **g**-kapalı küme kavramı ile ilgili olarak **$T_{½}$** - uzayı şeklinde adlandırılan yeni bir ayırma aksiyomu aşağıdaki gibi Dunham **[12]** tarafından verilmiştir.

Tanım 2.2.5. [12] (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer **X'** in her **g**-kapalı alt kümesi kapalı küme oluyorsa, başka bir ifadeyle **X'** in tek noktadan oluşan her alt kümesi açık küme ya da kapalı küme oluyorsa, **(X, τ)** uzayına **$T_{½}$** - uzayı denir.

Tanım 2.2.5. in **β**-açık kümeler için karşılığı ise, Hatır ve Noiri **[14]** tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.2.6. [14] (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer **X'** in her **β-g**-kapalı alt kümesi kapalı küme oluyorsa, **(X, τ)** uzayına **β-$T_{½}$** uzayı denir.

Tanım 2.2.4. de yer alan **β**-açık küme kavramından daha zayıf **δβ**-açık küme kavramı ve kapanış yerine **δ**-kapanış kullanılarak **δβg**-kapalı küme olarak adlandırdığımız yeni bir genelleştirilmiş kapalı küme çeşidini verelim.

Tanım 2.2.8. (X, τ) topolojik uzay, **A ⊂ X** olsun. **A ⊂ U** ve **U ∈ δβ(X)** iken **δCl(A) ⊂ U** oluyorsa, **A** kümesine **δβg**-kapalı küme denir.

Regüler kapalı kümenin **δβg**-kapalı küme kavramı ile ilgili bir karakterizasyonunu aşağıdaki gibi elde ettik.

Önerme 2.2.3. (X, τ) topolojik uzay, **A ⊂ X** olsun. **A** kümesinin **δβg**-kapalı küme ve **δβ**-açık küme olması için gerek ve yeter şart **A** kümesinin regüler kapalı küme olmasıdır.

İspat. ⟹ A kümesi **δβg**-kapalı küme olduğundan, **A ⊂ U** ve **U ∈ δβ(X)** iken **δCl(A) ⊂ U** olur. Hipotez gereğince **A** kümesi **δβ**-açık küme olduğundan özel olarak **U** yerine **A** alırsak **δCl(A) ⊂ A** ve **A** kümesi **δ**-kapalı küme olur. Dolayısıyla, **δCl(A) = A** olduğundan, **Cl (Int (δCl (A))) = Cl (Int (A)) ⊂ Cl (A) ⊂ δCl(A)** olur. Buradan **Cl(Int (δCl (A))) ⊂ δCl(A)** elde edilir. **A** kümesi **δβ**-açık küme ve **δCl(A) = A**

olduğundan, $\delta Cl(A) \subset Cl\ (\ Int\ (\ \delta Cl\ (\ A\ )\ )\ )$ elde edilir. O halde $\delta Cl(A) = Cl\ (\ Int\ (\ \delta Cl(A)\ )\ )$ olur. $\delta Cl(A) = A$ olduğundan, $A = Cl\ (\ Int\ (A)\ )$ olur. Bu ise, **A** kümesinin regüler kapalı küme olduğunu gösterir

$\Leftarrow$ **A** kümesi regüler kapalı küme olsun. O halde **A** kümesi **δβg**-kapalı kümedir. Diğer taraftan $A = Cl\ (\ Int\ (\ A\ )\ ) \subset Cl\ (\ Int\ (\ Cl\ (\ A\ )\ )\ ) \subset Cl\ (\ Int\ (\ \delta Cl\ (\ A\ )\ )\ )$ olduğundan, **A** kümesi **δβ**-açık kümedir.

Şimdi ise, **δβg**-kapalı kümenin $\Lambda_{\delta\beta}$ operatörü ile ilgili karakterizasyonunu aşağıdaki önermede verelim.

Önerme 2.2.4. (X, τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. **A** kümesinin **δβg**-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $\delta Cl\ (A) \subset \Lambda_{\delta\beta}(A)$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ **A** kümesi **δβg**-kapalı küme olsun. O halde, Tanım 2.2.7. gereğince $A \subset U$ olmak üzere, herhangi bir $U \in \delta\beta(X)$ için $\delta Cl\ (\ A\ ) \subset U$ ve dolayısıyla, $\delta Cl\ (\ A\ ) \subset \cap\ \{\ U\ |\ A \subset U,\ U \in \delta\beta(X)\ \} = \Lambda_{\delta\beta}(A)$ elde edilir.

$\Leftarrow$ $A \subset U$ olmak üzere, herhangi bir $U \in \delta\beta(X)$ kümesini alalım. $\delta Cl\ (\ A\ ) \subset \Lambda_{\delta\beta}(A) \subset U$ olduğundan, **A** kümesi **δβg**-kapalı kümedir.

Ayrıca, **δβg**-kapalı kümenin **δβ**-kapalı kümelerle ilgili karakterizasyonunu da aşağıdaki gibi elde ettik.

Önerme 2.2.5. (X, τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. **A** kümesinin **δβg**-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $[\ \delta Cl\ (\ A\ ) - A\ ]$ kümesinin boştan farklı hiçbir **δβ**-kapalı küme içermemesidir.

İspat. $\Rightarrow$ **A** kümesi **δβg**-kapalı küme olsun. Olmayana ergi yönteminden $F \subset [\ \delta Cl\ (\ A\ ) - A\ ]$ olacak şekilde boştan farklı bir **F**, **δβ**-kapalı kümesinin var olduğunu kabul edelim. $F \subset [\ \delta Cl\ (\ A\ ) - A\ ] \subset (\ X - A\ )$ olduğundan, tümleme işlemi ile $(\ X - F\ )$ kümesi **δβ**-açık küme olmak üzere, $A \subset (\ X - F\ )$ elde edilir. **A** kümesi **δβg**-kapalı küme olduğundan, Tanım 2.2.7. gereğince $\delta Cl\ (\ A\ ) \subset (\ X - F\ )$ ve dolayısıyla, $F \subset (\ X - \delta Cl\ (\ A\ )\ )$ olur. **A** kümesi **δβg**-kapalı küme olduğundan, **F** kümesi boş kümedir.

$\Leftarrow$ Herhangi bir $U \in \delta\beta(X)$ kümesi için $A \subset U$ olsun. $\delta Cl\ (\ A\ ) \cap (\ X - U\ ) \subset \delta Cl\ (\ A\ ) \cap (\ X - A\ ) = [\ \delta Cl\ (A\ ) - A\ ]$ olur. Hipotez gereğince

[δCl (A) – A] kümesi boştan farklı hiçbir **δβ**-kapalı küme içermediğinden, **δCl (A) ⋂ (X – U) =** $\boldsymbol{\phi}$ ve dolayısıyla, **δCl (A) ⊂ U** olur. O halde Tanım 2.2.7. gereğince **A** kümesi **δβg-**kapalı kümedir.

2.3. Bazı Zayıf Ayırma Aksiyomları

Bu kesimde, öncelikle **δβ**-açık kümeler için sırasıyla **δβ-T**$_{½}$ ve **δβ-R**$_0$ uzayları olarak adlandırdığımız iki yeni ayırma aksiyomunu tanım kriterleri ile tanıttık. Ardından **δβ-T**$_1$ uzayı kavramının $\Lambda_{\delta\beta}$-küme ile ilgili özelliklerini elde ettik.

Tanım 2.3.1. (X, τ) topolojik uzay olsun.

1. **(X, τ)** uzayının **δβ-T**$_{½}$ uzayı olması için gerek ve yeter şart her **δβg**-kapalı kümenin **δ**-kapalı küme olmasıdır.
2. **(X, τ)** uzayının **δβ-R**$_0$ uzayı olması için gerek ve yeter şart herhangi bir **U ∈ δβ(X)** ve **x ∈ U** için, **δCl ({x}) ⊂ U** olmasıdır.

δβ-T$_{½}$ uzayının **δβ**-kapalı kümeler ile ilgili bir karakterizasyonunu verelim

Teorem 2.3.1. (X, τ) uzayının **δβ-T**$_{½}$ uzayı olması için gerek ve yeter şart **X**' in tek noktadan oluşan her bir alt kümesinin **δ**-açık küme ya da **δβ**-kapalı küme olmasıdır.

İspat. **⟹ x ∈ X** noktasını alalım. **{x}** kümesinin **δβ**-kapalı küme olmadığını kabul edelim. O halde **(X – {x})** kümesi **δβ**-açık küme değildir ve **(X – {x})** kümesi **δβg**-kapalı kümedir. **(X, τ)** uzayı **δβ-T**$_{½}$ uzayı olduğundan, **(X – {x})** kümesi **δ**-kapalı küme ve **{x}** kümesi **(X, τ)** uzayında **δ**-açık kümedir.

⟸ A kümesinin **δβg**-kapalı küme olduğunu kabul edelim. **δCl (A) ⊂ A** olduğunu göstermeliyiz. **x ∈ δCl (A)** olsun. **{x}** kümesi ya **δ**-açık küme ya da **δβ**-kapalı kümedir.

(i) {x}, **δ**-açık küme ise, **x ∈ δCl (A)** olduğundan, **Int (Cl ({x})) ∩ A** $\neq \phi$ ve **x ∈ A** olur.

(ii) {x}, **δβ**-kapalı küme ise, Önerme 2.2.5. gereğince **[δCl (A) – A]** kümesi boştan farklı hiçbir **δβ**-kapalı küme içermez. Böylece, **x ∉ [δCl (A) – A]** fakat, **x ∈ δCl (A)** olur. O halde **x ∈ A** bulunur. Sonuçta **(i)** ve **(ii)** gereğince **δCl (A) ⊂ A** elde edilir. Bu ise, **A** kümesinin **δ**-kapalı küme olduğunu gösterir.

Ayırma aksiyomları topolojik uzaylar üzerinde tanımlandığı için aşağıdaki teoremin varlığı aşikardır.

Teorem 2.3.2. Her topolojik uzay **δβ-T**$_{½}$ uzayıdır.

İspat. **(X, τ)**, topolojik uzay olsun ve **$x \in X$** noktasını alalım. Eğer **$\{x\}$** kümesi **δ**-açık küme değilse, **$\delta Int(\{x\}) = \phi$** olduğundan, **$\{x\}$** kümesi **δβ**-kapalı kümedir. Böylece, Teorem 2.3.1. gereğince **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-$T_{½}$** uzayıdır.

Sonuç 2.3.1. Teorem 2.3.2. gereğince her **$\delta\beta$-T_1** uzayının **$\delta\beta$-$T_{½}$** uzayı olduğu açıktır.

Şimdi, Tanım 2.3.1. (2)' de tanımlanan **$\delta\beta$-R_0** uzayının **$\Lambda_{\delta\beta}$** operatörü ile ilgili elde ettiğimiz bazı karakterizasyonlarını verelim.

Teorem 2.3.3. **(X, τ)** topolojik uzayı için, aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

1. **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-R_0** uzayıdır.
2. Her **$x \in X$** noktası için, **$\delta\beta Cl(\{x\}) = \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})$** eşitliği geçerlidir.
3. Her **$x \in X$** için, **$\delta\beta Cl(\{x\}) \subset \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})$** bağıntısı geçerlidir.

İspat. (1) ⇒ (2) **$x \in X$** noktasını ve **x**' i içeren herhangi bir **$V \in \delta\beta(X)$** kümesini alalım. **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-R_0** uzayı olduğundan, Tanım 2.3.1. gereğince **$\delta\beta Cl(\{x\}) \subset V$** ve dolayısıyla, **$\delta\beta Cl(\{x\}) \subset \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})$** olur. **$y \in \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})$** olduğunu kabul edelim. **x** noktasını içeren her **V** **δβ**-açık kümesi için **$y \in V$** ve **$x \in \delta\beta Cl(\{y\})$** olur. Diğer taraftan **$y \notin \delta\beta Cl(\{x\})$** olduğunu varsayalım. O halde **$y \in G$** ve **$x \notin G$** olacak şekilde en az bir **$G \in \delta\beta(X)$** kümesi vardır. **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-R_0** uzay olduğundan Tanım 2.3.1. gereğince **$\delta\beta Cl(\{y\}) \subset G$** ve **$x \notin \delta\beta Cl(\{y\})$** olur. Böylece, **$\Lambda_{\delta\beta}(\{x\}) \subset \delta\beta Cl(\{x\})$** elde edilir. Sonuç olarak, **$\delta\beta Cl(\{x\}) = \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})$** bulunur.

(2) ⇒ (3) İspatı açıktır.

(3) ⇒ (1) **$V \in \delta\beta(X)$** ve **$x \in V$** alalım. O halde **$\Lambda_{\delta\beta}(\{x\}) \subset V$** bağıntısı geçerlidir. Ayrıca (3) gereğince **$x \in \delta\beta Cl(\{x\}) \subset \Lambda_{\delta\beta}(\{x\})$** olduğundan, **$\delta\beta Cl(\{x\}) \subset V$** olur. Bu ise, **$(X, \tau)$** uzayının **$\delta\beta$-$R_0$** uzayı olduğunu gösterir.

Şimdi, oldukça kullanışlı olan aşağıdaki lemmayı ele alalım.

Lemma 2.3.1. [20] Herhangi bir **(X, τ)** topolojik uzayı için, **X** kümesinin tek noktadan oluşan her bir alt kümesi ya pre açık küme ya da pre kapalı kümedir.

Tanım 1.1.14. de verilen **$\delta\beta$-T_1** uzayının **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kümeler ile ilgili karakterizasyonlarını aşağıdaki teoremde verelim.

Teorem 2.3.4. **(X, τ)** topolojik uzayı için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

1. **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-T_1** uzayıdır.
2. **X** uzayındaki her alt küme, **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kümedir.
3. **X** uzayındaki her **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kapalı küme, **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kümedir.
4. **X** uzayındaki her pre kapalı küme, **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kümedir.

İspat. (1) ⇒ (2) A kümesi X' in herhangi bir alt kümesi olsun. Her $\mathbf{x \in A}$ için Önerme 2.1.1. gereğince **{x}** kümesi **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kümedir. Lemma 2.1.2. gereğince **A** kümesi **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kümedir.

(2) ⇒ (3) Hipotez gereğince **X** uzayındaki her alt küme, **$\Lambda_{\delta\beta}$**-küme olduğundan, her **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kapalı küme, **$\Lambda_{\delta\beta}$**-kümedir.

(3) ⇒ (4) İspatı açıktır.

(4) ⇒ (1) Herhangi bir $\mathbf{x \in X}$ noktasını alalım. Lemma 2.3.1. gereğince iki durum vardır:

(i) Eğer **{x}** kümesi pre kapalı küme ise,

$\{x\} \supset \mathbf{Cl}\,(\,\mathbf{Int}\,(\{x\}\,)\,) \supset \mathbf{Int}\,(\,\mathbf{Cl}\,(\,\mathbf{Int}\,(\{x\}\,)\,)\,) \supset \mathbf{Int}\,(\,\mathbf{Cl}\,(\,\delta\mathbf{Int}\,(\{x\}\,)\,)\,)$ ve $\mathbf{Int}\,(\,\mathbf{Cl}\,(\,\delta\mathbf{Int}\,(\{x\}\,)\,)\,) \subset \{x\}$ olduğundan, **{x}** kümesi **$\delta\beta$**-kapalı kümedir.

(ii) Eğer **{x}** kümesi pre açık küme ise,

$\mathbf{X} - \{x\}$ kümesi **$\Lambda_{\delta\beta}$**-küme ve $\mathbf{X} - \{x\} = \bigcap \{\, \mathbf{V} \mid \mathbf{X} - \{x\} \subset \mathbf{V}, \mathbf{V} \in \delta\beta(\mathbf{X}) \,\}$ olur. Böylece bazı $\mathbf{V_0} \in \delta\beta(\mathbf{X})$ için, $\{x\} \subset (\,\mathbf{X} - \mathbf{V_0}\,) \subset \bigcup(\,\mathbf{X} - \mathbf{V}\,) \subset \{x\}$ olur. Bu ise, $\{x\} = (\,\mathbf{X} - \mathbf{V_0}\,)$ kümesinin **$\delta\beta$**-kapalı küme olduğunu gösterir. Önerme 2.1.1. gereğince **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-T_1** uzayıdır.

Tanım 1.1.14. de verilen **$\delta\beta$-T_1** uzayı ile Tanım 2.3.1. de verilen **$\delta\beta$-R_0** uzayı kavramlarının çakışık olduğunu verelim.

Teorem 2.3.5. (X, τ) uzayının **$\delta\beta$-T_1** uzayı olması için gerek ve yeter şart **(X, τ)** uzayının **$\delta\beta$-R_0** uzayı olmasıdır.

İspat. ⟹ (X, τ) uzayı **$\delta\beta$-T_1** uzayı olsun. Herhangi bir **U**, **$\delta\beta$**-açık kümesi ve $\mathbf{x \in U}$ noktası için, Önerme 2.1.1. gereğince $\delta\beta\mathbf{Cl}\,(\,\{x\}\,) = \{x\} \subset \mathbf{U}$ olur. Böylece, **(X, τ)** uzayı **$\delta\beta$-R_0** uzayıdır.

⟸ Lemma 2.3.1. gereğince her bir $\mathbf{x \in X}$ noktası için, **{x}** kümesi pre açık küme ya da prek apalı kümedir. **x** noktasından farklı $\mathbf{y \in X}$ noktası alınsın.

(i) $\{x\}$ kümesi pre açık küme ise, $\{x\} \in \delta\beta(X)$ ve $y \notin \{x\}$ olur.

(ii) $\{x\}$ kümesi pre kapalı küme ise, $y \in (X - \{x\})$ $[(X - \{x\}) \in \delta\beta(X)]$ olduğundan, $\delta\beta Cl (\{y\}) \subset (X - \{x\})$ ve $x \in (X - \delta\beta Cl (\{y\}))$ $[(X - \delta\beta Cl (\{y\})) \in \delta\beta(X)]$ olur. $y \notin (X - \delta\beta Cl (\{y\}))$ olduğundan, **(i)** ve **(ii)** gereğince $x \in U$ ve $y \notin U$ olacak şekilde en az bir $U \in \delta\beta(X)$ kümesi vardır. Aynı şekilde $y \in V$ ve $x \notin V$ olacak şekilde en az bir $V \in \delta\beta(X)$ kümesi vardır. Böylece, (X, τ) uzayı $\delta\beta$-T_1 uzayıdır.

$\delta\beta$-R_0 ve $\delta\beta$-$T_{½}$ uzaylarının literatürde var olan diğer uzaylarla ilişkilerini, aşağıdaki şemada verdik. Dikkat edilirse; bu şema, Şema 1.1.2. nin daha da genişletilen halidir. Ayrıca; bu şemada yer alan β-T_1 uzayı ile β-$T_{½}$ uzayı arasındaki ilişkinin ispatı ve β-T_1 uzayı ile β-R_0 uzayının çakışık olduğu **[14]**' de verildi.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta\text{-}T_{1/2}\text{ uzayı} & \delta\beta\text{-}T_{1/2}\text{ uzayı} \\
T_1\text{- uzayı} \arrow[r] & \beta\text{-}T_1 (\equiv \beta\text{-}R_0)\text{ uzayı} \arrow[u] \arrow[r] & \delta\beta\text{-}T_1 (\equiv \delta\beta\text{-}R_0)\text{ uzayı} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Şema 2.1.1.

KAYNAKLAR

[1]. Abd El-Monsef M. E. , El-Deeb S. N. ve Mahmoud R. A. , 1983, β-open sets and β-continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. , (12) : 77-90.

[2]. Abd El-Monsef M. E. ve Mahmoud R. A. , 1990, β-irresolute and β-topological invariant, Proc. Pakistan Acad. Sci. , (27) : 285-296.

[3]. Abd El-Monsef M. E. , El-Deeb S. N. ve Mashhour A. S. , 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, (53) : 47-53.

[4]. Adrijevic D. , 1996, On b-open sets, Mat. Vesnik, (48) : 59-64.

[5]. Aho T. ve Nieminen T. , 1994, Spaces in which preopen subsets are semi-open, Ricerche Mat. , (43) : 45-59.

[6]. Arenas F. G. , Dontchev J. ve Ganster M. , 1997, On λ-sets and the dual of generalized continuity, Questions Answers Gen. Topology, 15(1).

[7]. Alexandroff P. , 1937, Diskrete Raume, Mat. Sb. , (2) : 501-508.

[8]. Caldas M. ve Jafari S. , 2002, On δD-sets and associated weak separation axioms, Bull. Malaysion Math. Sc. Soc. (second series), (25) : 173-185.

[9]. Caldas M. , Jafari S. ve Navalagi G. , 2007, More on λ-closed sets in topological spaces, Revista Colombiana de Matematicas, 41 (2) : 355-369.

[10]. Caldas M. , Jafari S. ve Noiri T. , 2006, On Λ_b-sets and the associated topology, Acta Math. Hungar. , 110 (4) : 337-345.

[11]. Davis A. S. , 1961, Indexed systems of neigborhood for general topological, Amer. Math. Monhtly, (68) : 886- 893.

[12]. Dunham W. , 1997, $T_{½}$-spaces, Kyungpook Math. J. , (17) : 161-169.

[13]. Ganster M. , Jafari S. ve Noiri T. , 2002, On pre-Λ-sets and pre-V-sets, Acta Math. Hungar. , 95 (4) : 337-343.

[14]. Hatir E. ve Noiri T. , 2004, Λ_{sp}-sets and some weak separation axioms. , Acta Math. Hungary, 103 (3) : 225-232.

[15]. Hatir E. ve Noiri T. , 2006, Decompositions of continuity and complete continuity, Acta Math. Hungary, 113 (4) : 281-287.

[16]. Hatir E. ve Noiri T. , 2009, On δ-β-continuous functions, Chaos, Solitons and Fractals, (42) : 205-211.

[17]. Levine N. , 1963, Semiopen sets and semi-continuity in topological spaces. , Am Math Mon, (70) : 36-41.

[18]. Levine N. , 1970, Generalized closed sets in topology, Rend. Cric. Mat. Palermo, (19) : 89-96.

[19]. Maki H. , 1986, Generalized Λ-sets and the associated closure operator, special ıssure in commemoration of Pref. Kazusada IKEDA’s Retirement,139-146.

[20]. Maki H. , Noiri T. ve Umehara J. , 1996, Every topological space is pre-$T_{½}$, Mem. Fac. Sci. Kochi. Univ. Ser. A Math. , (17) : 33-42.

[21]. Mrsevic M. , 1985, On pairwise R_0 and pairwise R_1 bitopological spaces, to appear in Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie.

[22]. Mukherjee M. N. ve Raychaudhurim S. , 1993, On δ-almost continuity and δ-preopen sets, Bull Inst Math Acad Sinica, 21(4).

[23]. Nasef A. A. ve Noiri T. , 1996, strongly β-irresolute functions, J. Natur. Sci. Math. , (36) : 199-206.

[24]. Nijastad O. , 1965, On some classes of nearly open sets, Pasific J. Math. , (15) : 961-970.

[25]. Noiri T. , 2003, Remarks on δ-semiopen sets and δ-preopen sets, Demonstratio Math, (36) : 1007-1020.

[26]. Noiri T. ve Popa V. , 1994, weakly β- continuous functions, An. Univ. Timioara Ser. Mat. Inform. , (32) : 83-92.

[27]. Shanin N. A. , 1943, On separation in topological space, Doklady Akad. Nauk USSR, (38) : 209-216.

[28]. Stone M. H. , 1937, Applications of the theory of Boolean ring to general topology,
TAMS (41) : 375-381.

[29]. Tong J. , 1983, On the separation axioms R_0, Glasnik Matematicki, (18) : 149-152.

[30]. Velicko N. V. , 1968, H-closed topological Spaces, Amer. Math. Soc. Transl. , (78) : 103-118.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Rabia ÇOBAN

Uyruğu : T. C.

Doğum Yeri ve Tarihi : Ilgın 25.11.1985

Telefon : 0 544 406 81 02

e-mail : fztrabia@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: Selçuklu Cumhuriyet lisesi, Selçuklu, KONYA	2003
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	2008
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	

UZMANLIK ALANI : Topoloji

YABANCI DİLLER : İngilizce