T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN NORMALİZED LAPLACİAN MATRİSİNİN HIZI VE DİĞER BAZI PARAMETRELER İLE OLAN BAĞINTILARI

Aydan Zeynep AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MatematikAnabilim Dalı

12-2013
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFLARIN NORMALİZED LAPLACİAN MATRİSİNİN HIZI VE DİĞER BAZI PARAMETRELER İLE OLAN BAĞINTILARI

Aydan Zeynep AYDIN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2013, 45 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Bünyamin AYDIN

Bu çalışmada basit bağlantılı bir grafın normalize edilmiş Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri ile sıfırdan farklı en küçük özdeğeri arasındaki fark normalize edilmiş Laplacian hız olarak tanımlanmıştır ve $SL\ \ G$ şeklinde gösterilmiştir. Daha sonra ise $SL\ \ G$ değeri için bazı sınır elde edilmiş ve bazı graf parametreleri ile bağlantılar sağlanmıştır. (Klik sayısı, Bağımsızlık sayısı, Randik indeks). Ayrıca iki grafın tensor çarpımlarının normalize edilmiş Laplacian hızı için sınırlar elde edilmiştir. Özel olarak seçilmiş bir ağaç ve bir tek devir içeren graf içinde normalize edilmiş Laplacian hızları bulduktan sonra son olarak normalize edilmiş Laplacian matrisin özdeğerlerine bağlı olarak derece Kirchhoff indeks için sınırlar bulacağız.

Anahtar Kelimeler: Bağımsızlık sayısı, klik sayısı, normalize edilmiş Laplacian hız, Randić indeks, tensor çarpım.

ABSTRACT

MS THESIS

THE NORMALIZED LAPLACIAN SPREAD OF GRAPHS AND RELATIONS WITH OTHER SOME PARAMETERS

Aydan Zeynep AYDIN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATİCS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2013, 44Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Assoc. Prof. Dr. Bünyamin AYDIN

In this study, we define the normalized Laplacian spread of a simple graph as the difference between the largest eigenvalue and the second smallest eigenvalue of the normalized Laplacian matrix of the graph and denote by $SL(G)$. Then we present some bounds for $SL(G)$ andrelatedwith graph parameterssuch asRandić index, clique and independent number. Moreover, as extendent approximation of the theory, we obtain lower and upper bounds for the normalized Laplacian spread of tensor product of any two simple graphs. We calculate normalized Laplacian spread for specially selected in a tree and unicyclic graph after finally, we find upper and lower bounds for the degree-Kirchhoff index depending on eigenvalues of normalized Laplacian matrix.

Keywords: Clique number, independent number, normalized Laplacian spread, Randić index, tensor product

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın birinci bölümünde, graf teorinin ve spektral graf teorinin tarihçesi ve literatür özetlerinden bahsedilmiştir. İkinci bölüm, giriş bölümü olup, ileriki bölümlerde kullanacağımız temel bilgiler verilmiştir. Geriye kalan bölümler çalışmanın ana bölümleri olup öncelikle basit bağlantılı bir grafın normalize edilmiş Laplacian matrisinin hızıtanımlanıp bunun için bir üst sınır bulunmuştur. Daha sonra ise bazı parametreler ile normalize edilmiş Laplacian hız arasında çeşitli bağıntılar kurulup grafların tensor çarpımları ve bazı özel seçilmiş graflar için normalize edilmiş hız ile ilgili bağıntılar bulunmuştur. Son olarak ise derece Kirchhoff indeks için normalize edilmiş Laplacian matrisin öz değerleri türünden sınırlar bulunmuştur.

Bu çalışma süresince emeği geçen değerli hocam Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN'e ve sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aydan Zeynep AYDIN
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT........ v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. GENEL TANIM VE TEOREMLER 4

2.1. Graf Tanımları 4
2.1.1. Özel Graflar 8
2.2. Grafların Matris Gösterimleri 10
2.3. Lineer Cebir Bilgileri 13
2.3.1 Matrislerin Tensor Çarpımları 15
2.4. Normalize EdilmişLaplacian Matrisin Özdeğerleri 16

3. NORMALIZE EDİLMİŞ LAPLACIAN HIZ 18

3.1. Hız Tanımı ve Özellikleri 18
3.2. Normalize Edilmiş Laplacian Hız 18

4. NORMALİZE EDİLMİŞ LAPLACİAN HIZIN KLİK VE BAĞIMSIZLIK SAYILARI İLE İLİŞKİSİ 21

5. GRAFLARIN TENSOR ÇARPIMININ NORMALİZE EDİLMİŞ LAPLACİAN HIZI 25

6. AĞAÇLARIN ve TEK DEVİRLİ GRAFLARIN NORMALIZE EDİLMİŞ LAPLACIAN HIZI 31

6.1. $\boldsymbol{T \ \ n, p}$ - Tipindeki Ağaçların Normalize Edilmiş Laplacian Hızı 31
6.2. $\boldsymbol{G_1(n-3,0;n)}$ - Tipindeki $(\boldsymbol{n} \geq 5)$ Tek Devir İçeren Grafların Normalize Edilmiş Laplacian Hızı 33

7. GRAFLARIN DERECE KIRCHHOFF İNDEKSİ 35

KAYNAKLAR 42

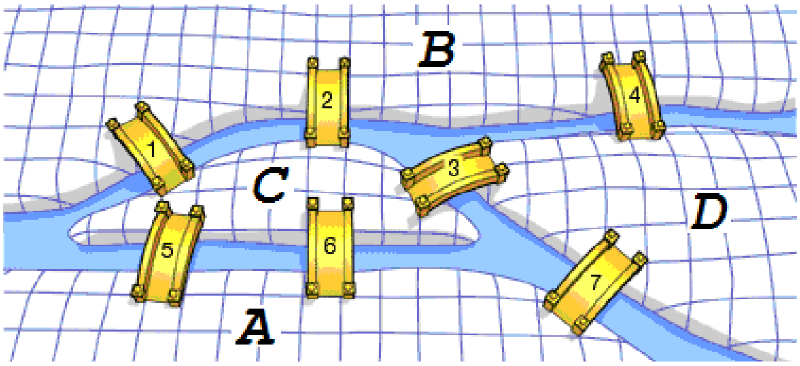
SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\in$	elemanıdır
$\notin$	elemanı değildir
$=$	eşittir
$\neq$	eşit değildir
$\subseteq$	altkümesidir
$\supseteq$	kapsar
$>$	büyüktür
$<$	küçüktür
$\geq$	büyük ya da eşittir
$\leq$	küçük ya da eşittir
$\alpha(G)$	G grafının bağımsızlık sayısı
$\omega(G)$	G grafının klik sayısı
$\delta(G)$	G nin noktalarının derecelerinin minimumu
$\Delta(G)$	G nin noktalarının derecelerinin maksimumu
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
$der(e_i)$	e_i noktasınınderecesi
E	kenar kümesi
e	kenar
$\{e_i, e_j\}$ veya $e_i e_j$	uç noktaları e_i ve e_j olan kenar
$G=(V,E)$	*V*nokta kümeli *E* kenar kümeli bir *G* grafı
$\overline{G}$	G grafının tamamlayıcısı
$G_1 \otimes G_2$	G_1 ile G_2 grafının tensor çarpım grafı
$Kf(G)$	G grafının Kirchhoff indeksi
r_{ij}	i ve j noktaları arasındaki direnç mesafesi
$S(M)$	M matrisinin hızı
m	boyut (*E* nin eleman sayısı)
n	mertebe (*V*nin eleman sayısı)
B_n	n mertebeli boş graf
C_n	n mertebeli devir graf
P_n	n mertebeli yol graf
K_n	n mertebeli tam graf
$K_{r,s}$	iki parçalı graf (kümelerin eleman sayısı r ve s)
V	nokta kümesi
v	nokta
$V_1 \times V_2$	V_1 kümesi ile V_2 kümesinin kartezyen çarpımı
R_α	Randić indeks

1. GİRİŞ

Graf teorisinin temeli olan köprü problemi,18. yüzyılda,Prusya'daki Königsberg kasabasının Pregel Nehri ile dört bölgeye ayrılmasıyla ilgilidir. Bu dört bölgeyi birbirine bağlayan yedi köprü bulunmaktadır (Şekil 1.1).Kasabanın bu karmaşık yapısı üzerine "*Kasabanın bir yakasından gezinti yapmak için çıkan biri tüm köprüleri bir kez geçerek başladığı noktaya dönebilir mi?* "sorusu ortaya çıkmıştır.Bu soru ünlü matematikçi Leonhard Euler'e (1707-1783) kadar ulaşmıştır ve 1736 yılındabu problemin çözümü olmadığı Leonhard Euler tarafından gösterilmiştir. Leonhard Euler, bu problemin çözümü için uğraşırken Graf Teorinin ilk adımlarını da atmıştır.

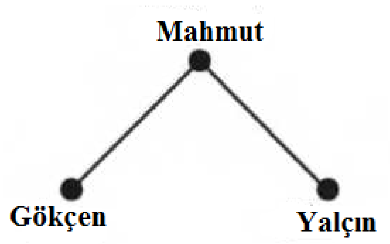


Şekil 1.1.Königsberg Köprüsü

Sonraki yüzyıl boyunca üzerinde herhangi bir çalışma yapılmayan teori, 1847 yılında G. R. Kirchhoff' un (1824 – 1887) "*Ağaç Teorisinin Elektrik Devrelerine Uygulanması*" başlıklı çalışması ile yeniden gündeme geldi. Bundan on yıl kadar sonra A. Cayley (1821 – 1895) "*CnH2n+2 Doymuş Hidrokarbon İzomerlerinin Sınıflaması*" çalışması sırasında ağaç kavramını keşfetti.

İki nesne arasında daima bir ilişkiden söz etmek mümkündür. Bu ilişki nesnelerin boyları, ağırlıkları, renkleri vs. hakkında olabilir. Söz gelimi kişiler arası tanışıklık ilişkisini ele alalım. Bu tanışıklıkilişkisinde, her bir kişiyi nokta ile temsil edelim. Eğer herhangi iki kişi tanışıyor ise bu iki kişiyi temsil eden noktaları bir çizgi ile birleştirelim, aksi halde noktaları öylece bırakalım.

Örneğin; Mahmut, Gökçen ve Yalçın isimli üç öğrenci düşünelim. Eğer Mahmut; Gökçen ve Yalçın'ı tanıyorsa fakat Gökçen ve Yalçın birbirini tanımıyorsa bu ilişki şekil 1.2. deki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.2.

Bir graf, işte yukarıdaki gibi bir şekildir. Nokta sayısı sonsuz olabilir. Bazı noktalar, “... ilişkisi var” anlamına gelen bir çizgi ile birleştirilir. Çizgilerin boyu veya şekli hiç önemlideğildir, var ya da yok olmaları önemlidir. Noktaların konumu da önemli değildir. Bu özellikleri nedeniyle bir grafın sonsuz farklı şeklinin çizilebileceği açıktır.

Graf teorinin önemli alt dallarından biride spektral graf teoridir. Spektral graf teorinin temeli ise 1950’li yıllara dayanmakla birlikte daha eskilere kadar uzanmaktadır. Bu alan bilgisayar bilimleri, kimya ve kodlama teorisi gibi birçok alanda uygulanabilir olması açısından ayrık matematiğin önemli bir parçasıdır. Bu alanda, grafın bazı matrislerinin özdeğerleri ve özvektörleri üzerine çalışılır. Bu çalışmada en önemli amaç; grafın matrislerden elde edilen spektral bilgiler vasıtası ile belli başlı özellikleri hakkında bilgi edinmektir. Kuantum kimyada Hückel’in 1931’deki makalesinde belirli elektronların enerji sınıflarını bulurken spektral graf teoriden yararlandığını görüyoruz.

Matris-Ağaç Teorisi ise, spektral graf teori sonucunda ortaya çıkmakla birlikteilk olarak Kirchhoff’un 1847’deki makalesinde belirtilmektedir.

Collatz ve Sinogowitz in 1957’deki çalışmalarından buyana spektral graf teori kavramına matematik literatüründe sıklıkla rastlanmaktadır. Genellikle graf teoriye, grafın derece-özdeğer ilişkisi anlamında yaklaşılmıştır. Fakat Cvetković, Rowlinson ve Simić 1980 de grafların spektral ve yapısal özelliklerini incelediler. (Bunun için;Biggs N., 1993, Biggs N., Lloyd E. ve Wilson R., 1986, Brouwer A. ve Haemers W., 2010 gibi çalışmalara bakılabilir.)

Spektral graf teorinin temel problemi, grafların matris gösterimlerinin özdeğerleri ile graf yapılarının nasıl bağdaştırılacağıdır. Bunun için sadece graf teori değil lineer cebirede ihtiyaç duyarız. Bu nedenle öncelikle bizim için gerekli olan graf tanımlarını verdikten sonra lineer cebir tanımlarına da değineceğiz.

Şimdi çalışmamızla ilgili birkaç literatür hakkında bilgi verelim.

A.D. Maden ve arkadaşları (2013)çalışmalarında,işaretsiz Laplacian matrisin hızı için bir alt sınır ve iki grafın tensor çarpımının hızı için bir üst sınır elde etmişlerdir.

A.D. Maden ve A. S. Çevik (2012) çalışmalarında, işaretsiz Laplacian matrisin hızı için klik sayısına ve bağımsızlık sayısına bağlı bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

Y.Z. Fan ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, $T\ \ n, p$ tipindeki bir ağaçlar için $n \geq 5$ ve $n \geq 6$, $\frac{n-2}{2} \leq p \leq n-4$ olmak üzere Laplacian hız hesaplamışlardır.

Y.H. Bao ve arkadaşları (2009) çalışmalarında, özel seçilmiş tek devir içeren bir grafın Laplacian hızı hakkında çalışmalar yapmışlardır.

Ş. B. Bozkurt ve D.Bozkurt(2012) çalışmalarında, bir grafın direnç mesafesi ve derece Kirchhoff indeksinin o grafın normalize edilmiş Laplacian matrisinin özdeğerleri ile eşitini bulmuşlardır.

K. C. Das (2013) çalışmasında, Bir grafın Kirchhoff indeksini, o grafın Laplacian matrisinin özdeğerleri ile üstten ve alttan sınırlamıştır.

2. GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümün ilk kısmında graflarla ilgili temel tanımlar verilmiştir. İkinci kısmında ise matrislerle ilgili ihtiyacımız olan genel bilgiler ve grafların matris gösterimleri ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

2.1. Graf Tanımları

Tanım2.1.1. V , boş olmayan bir küme ve E , her elemanı V nin farklı elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan çiftlerden oluşan küme olmak üzere V ve E kümelerinden oluşan $G=(V,E)$ şeklinde ki yapıya ***graf*** denir.

V kümesinin elemanlarına ***nokta,*** E kümesinin elemanlarına ise ***kenar*** denir. $u,v\in V$ olmak üzere kenarlar, $e=\{u,v\}$ formundaki kümelerle daha da basit olarak $e=uv$ şeklinde gösterilir. u,v ise bu kenarın ***uç noktaları*** olarak ifade edilir.

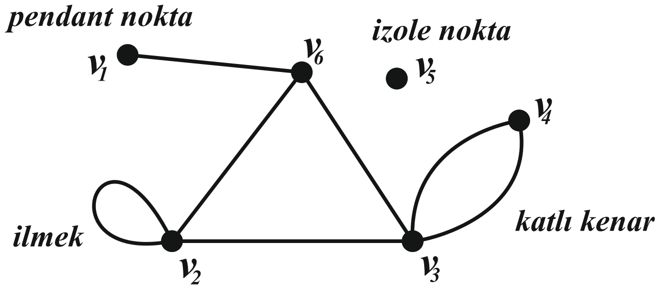
Tanım 2.1.2. Bir $G=(V,E)$ grafı için $v_G=n=|V_G|$ gösterimine ***grafın mertebesi***, $\varepsilon_G=m=|E_G|$ gösterimine ise ***grafın boyutu*** denir. Kısaca n grafın nokta sayısını, m ise grafın kenar sayısını gösterir.

Tanım 2.1.3. G grafı, noktalar kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir graf olmak üzere v_i ve v_j noktaları kenar oluşturuyor ise bu noktalara ***komşudur*** denir ve $v_i \sim v_j$ şeklinde gösterilir.Aksi takdirde komşu değildir denir ve $v_i \nsim v_j$ şeklinde gösterilir. Herhangi bir v_i noktasının derecesi v_i ye komşu olan noktaların sayısı olup d_i ile gösterilir. Derecesi 0 (sıfır) olan noktaya ***izole nokta***, derecesi 1 (bir) olan noktaya ise ***pendant nokta*** denir.

Bir G grafının en az komşuya sahip olan noktasına ***minimum dereceli nokta*** denir ve bu noktanın derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok komşuya sahip noktaya ise ***maksimum dereceli nokta***denir ve bu noktanın derecesi $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Bir grafta aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara ***katlı kenar*** denir. Bir noktayı kendisi ile birleştiren kenara ***ilmek*** denir. Katlı kenar ya da ilmeği olmayan grafa ise ***basit graf*** denir.

Örneğin; aşağıdaki grafta, v_2 noktası v_3 ve v_6 noktaları ile komşudur fakat diğer noktalar ile komşu değildir. Bu grafın noktalarının dereceleri $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 4$, $d_4 = 2$, $d_5 = 0$, $d_6 = 3$ olup $\delta(G) = 0$, $\Delta(G) = 4$. Grafın v_5 noktası izole nokta, v_1 noktası ise pendant noktadır.



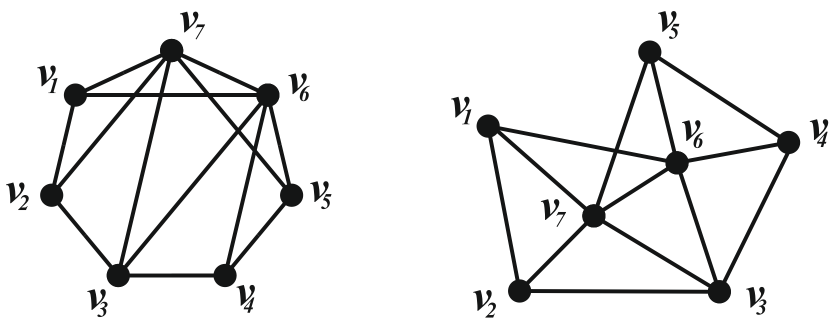
Şekil 2.1.1

Bir G grafının m tane kenarı ve $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ile gösterilen n tane noktası olsun. Her bir kenar başlangıç ve bitiş noktaları olmak üzere iki nokta ile temsil edileceğinden

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

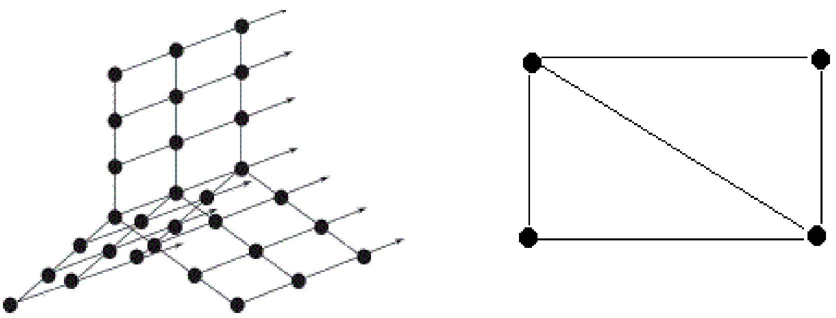
şeklinde ifade edilebilir (Euler teoremi).

Tanım 2.1.4. G ve H iki graf olmak üzere H grafının noktaları ve kenarları G grafının yeniden adlandırılması ile oluşuyorsa bu graflara ***izomorf graflar*** denir. Daha açık olarak $\forall u, v \in V(G)$ için $uv \in E(G) \Leftrightarrow \alpha(u)\alpha(v) \in E(H)$ olacak şekilde $\alpha : V(G) \rightarrow V(H)$ birebir ve örten fonksiyonu varsa, G ve H grafları ***izomorfiktir*** denir. Örneğin; Şekil 2.1.1 deki iki graf izomorftur.



Şekil2.1.2.İzomorf graf

Tanım 2.1.5. Graflar, sayılabilirliklerine göre sonlu ve sonsuz graflar olmak üzere ikiye ayrılır. Nokta ve kenar kümeleri, sonsuz kümeler alınarak oluşturulan yapılara ***sonsuz graf*** denir. Sonlu kenar ve nokta kümelerinin oluşturduğu graflara ise ***sonlu graf*** denir.



Şekil 2.1.3. Sonsuz ve sonlu graf örnekleri

Tanım2.1.6. Bir G grafının nokta kümesi $V(G)=\{u,v,w,x,...,y,z\}$ olsun. Ardı ardına k kenarın dizilmesi ile elde edilen

$$\underbrace{uv, vw, wx, ..., yz}_{k}$$

formuna$G$ de k uzunluğunda bir ***yürüme*** denir. Bu şekildeki bir yürüme $uvwx...yz$ şeklinde gösterilir.

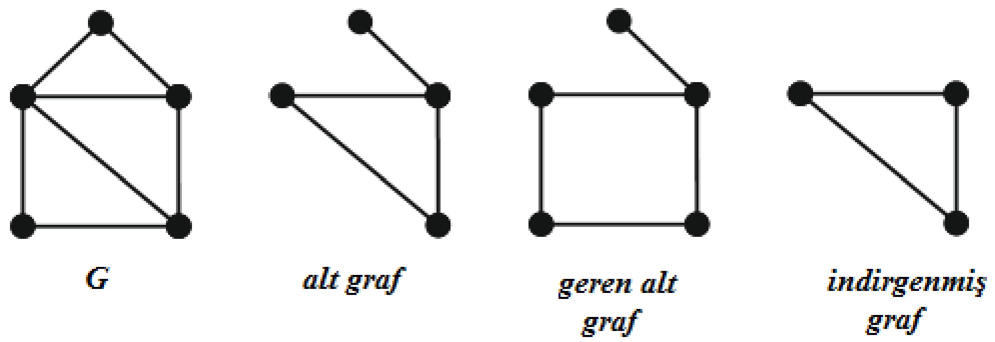
Herhangi bir G grafında; aynı noktada başlayan ve biten yürümeye G de bir ***kapalı yürüme***denir.Bütün noktaları ve kenarları birbirinden farklı olan yürümeye G de bir ***yol***denir. Bütün kenarları ile başlangıç ve bitiş noktaları hariç, bütün noktaları farklı olan kapalı bir yürümeye ise G de bir ***devir*** denir.Nokta sayılarına göre, n noktalı bir yol P_n, devir C_n ile gösterilir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin v_i ve v_j noktaları arasında bir yol varsa bu takdirde bu noktalara ***bağlantılıdır***denir. Bağlantılılık bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $V_1, V_2, ..., V_r$ denklik sınıfları olmak üzere $G(V_1), G(V_2), ..., G(V_r)$ alt graflarına$G$ nin ***birleşenleri***denir. $r=1$ olması durumunda graf ***bağlantılıdır***, aksi taktirde r bileşene sahip ***bağlantısız***bir graftır.

Tanım 2.1.7. G ve H iki graf olmak üzere $V_H \subseteq V_G$ ve $E_H \subseteq E_G$ olacak şekildeki H grafına G grafının ***alt grafı*** denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilir. H, G grafının alt grafı ise G grafına H grafının***süper grafı*** denir.

H, G grafının alt grafı ve $V_H \neq V_G$ ya da $E_H \neq E_G$ ise H grafına G grafının ***özalt grafı*** denir. Eğer$V_H = V_G$ ise *H*, G*'* nin ***geren alt*** grafıdır.

Eğer, $E_H = E_G \cap E(V_H)$ ise H 'ye G 'nin ***indirgenmişalt grafı*** (induced subgraph) denir.



Şekil 2.1.4. Bir G grafın sırası ile alt, geren ve indirgenmiş alt grafları.

Tanım 2.1.8. Bir G grafı verilsin. G nin ikişerli komşu olmayan noktalarının bir kümesine ***bağımsız küme (independent sets)***denir.

Bir G grafının,maksimum eleman sayısına sahip olanbağımsız kümelerinin eleman sayısına grafın ***bağımsızlık sayısı (independence number)***denir ve bu sayı $\boldsymbol{\alpha(G)}$ ile gösterilir. Yani,

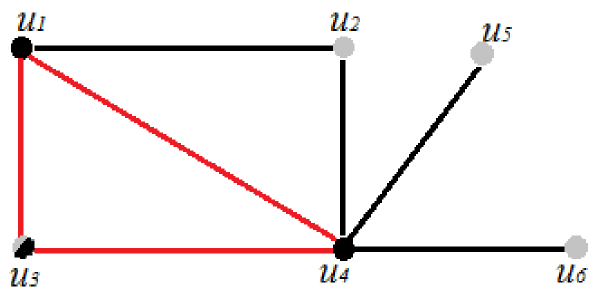
$$\alpha(G) = \max\{|V_i| : V_i \text{ } bağımsız \text{ } küme\}$$

dir.

Tanım 2.1.9. Bir G grafı verilsin. G nin alt graflarından tam graf olanların kümesine ***klik kümesi (clique sets)*** denir.

Bir G grafının klik kümeleri içinde en çok noktaya sahip olanın nokta sayısına, grafın ***klik sayısı (cliquenumber)*** denir ve $\boldsymbol{\omega(G)}$ ile gösterilir.

$$\omega(G) = \max\{|V_i| : G_i = (V_i, E_i) - tam\, alt\, graf\}$$



Şekil 2.1.5. Klik ve bağımsızlık sayılarını gösteren bir graf örneği

Şekil 2.1.5 daki grafta bağımsızlık sayısı, açık renk ile belirtilen noktaların sayısı olup $\alpha(G)=4$, ve klik sayısı ise koyu ile belirtilen noktaların sayısı yani $\omega(G)=3$ dür.

Tanım 2.1.10. G n noktalı bir graf olmak üzere ***genel randić indeks***,

$$R_\alpha(G)=\sum_{uv\in E} d_u d_v{}^{\alpha}$$

biçiminde tanımlanır $\alpha \in \mathbb{R}$.

Biz çalışmamız da genel olarak $\alpha=-1$ alınarak elde edilen $R_{-1}(G)=\sum_{uv\in E}\frac{1}{d_u d_v}$ ifadesini kullanacağız.

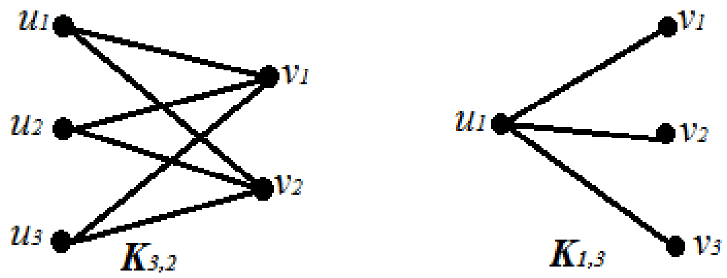
2.1.1. Özel Graflar

Şimdi çalışmamızda adı geçen bazı özel grafların tanımlarını verelim.

Tanım 2.1.1.1. Her bir nokta çifti birbirine komşu olan G grafına bir ***tam graf*** denir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir. Bir tam graf, nokta kümesi üzerinde tanımlanabilecek bütün kenarları bulundurur. Bu nedenle n mertebeli ve m boyutlu bir tam graf için $m=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ eşitliği geçerlidir.

Nokta kümesi X ve Y gibi iki alt kümeye ayrılmış olan ve kenarları da X deki bir noktayla Y deki bir noktanın birleştirilmesi ile elde edilen, G grafına iki parçalı graf ve X,Y ikilisine de G nin parçaları denir. Ayrıca, $|X|=p$ ve $|Y|=q$ olacak şekildeki iki parçalı tam graf $K_{p,q}$ ile gösterilir. Özel olarak $K_{1,q}$ grafına da star graf denir.

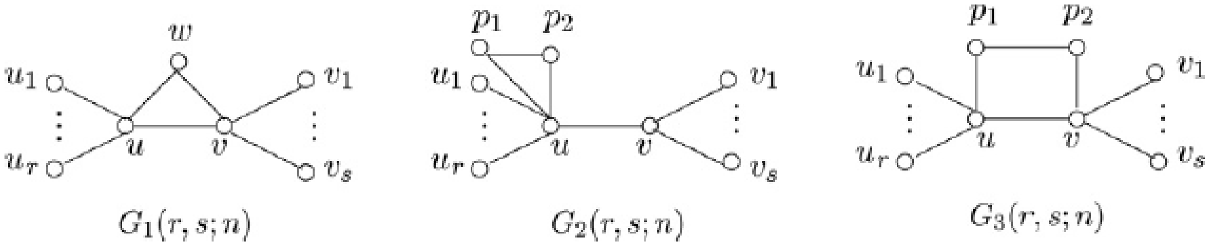
Aşağıda iki parçalı graf ve star graf örneği verilmiştir.



Şekil 2.1.1.1. İki parçalı tam graf ve yıldız örneği

Tanım 2.1.1.2. Hiç deviri olmayan bağlantılı grafa *ağaç* denir, $T=(V,E)$ şeklinde gösterilir. Bizim çalışmamızda sıklıkla kullanacağımız özel $T(n,p)$ grafı ise Bölüm 6.1 de tanımlandı.

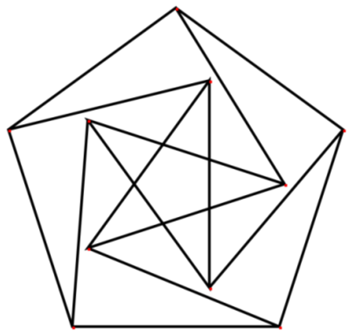
Tanım 2.1.1.3. Bir devir ve bir ya da birkaç ağaçın birleşmesi ile oluşan graflara***Tekdevir içeren graflar***denir. Bu graflar pek çok şekilde oluşturulabilirler. Fakat spektral graf teoride genel olarak üç sınıf altında inceleme yapılmıştır. Bunlar şekil 2.1.1.2 da gösterilmiştir.



Şekil 2.1.1.2. Tek devir içeren graf örnekleri

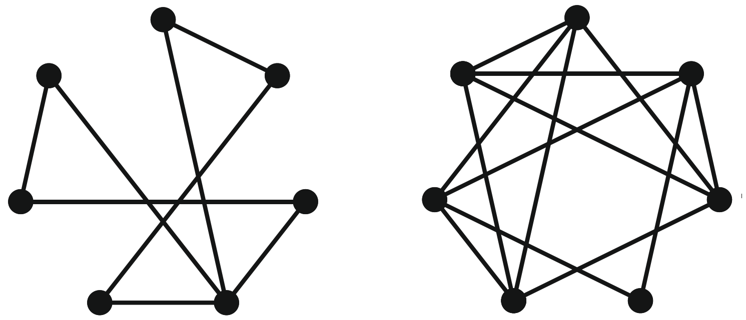
Tanım 2.1.1.4. Tek bir noktaya sahip olan hiç kenarı olmayan grafa ***trivial*** *graf* denir.Hiç kenarı olmayan sadece noktalardan oluşan grafa ***boş (null)graf***denir.

Tanım 2.1.1.5. Bir *G* grafında tüm noktaların dereceleri birbirine eşit yani $\forall v_i \in V_G$ için $d\ v_i = r$ ise *G* grafına ***r-regüler graf*** adı verilir. ***Petersen grafı*** bir regüler grafdır.



Şekil 2.1.1.4. Petersen grafı

Tanım 2.1.1.6. $G=(V_G,E_G)$ şeklinde bir graf ve $E_{\bar{G}} = \{e \in E(V) \mid e \notin E(G)\}$ olmak üzere $\bar{G}=(V_G,E_{\bar{G}})$ şeklindeki grafa G grafının ***tamamlayıcısı*** *(complement)*denir.



G $\qquad$ $\bar{G}$

Şekil 2.1.1.5.G grafı ve tamamlayıcısı

2.2. Grafların Matris Gösterimleri

Bir G grafı verilsin, grafın yapısı hakkındaki bazı bilgileri kullanarak bu grafı matris şekline getirebiliriz. Grafların matris gösterimleri hakkındaki çalışmaların çoğu ***komşuluk matrisi*** *(adjacency matrix),**kombinatoryal Laplacian matris** (combinatorial Laplacian matrix), **işaretsiz Laplacian matris ve normalize edilmiş Laplacian matris***üzerinedir.

Bir $G=(V,E)$ grafının ***komşuluk matrisi***(*adjacencymatrix,* $A(G)$),satır ve sütunları G grafının noktaları ile adlandırılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$A(G)=a_{ij}=\begin{cases}1 & ,\ v_i \sim v_j\\ 0 & ,\ aksi\, halde\end{cases}.$$

Bir $G=(V,E)$ grafının **Derece matrisi** (*degreematrix,* $D(G)$),satır ve sütunları G grafının noktaları ile adlandırılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$D(G)=(d_{ij})=\begin{cases}d_i & ,\ v_i=v_j\\ 0 & ,\ aksi\, halde\end{cases}.$$

Bir $G=(V,E)$ grafının **Kombinatoryal Laplacian matrisi**(*combinatorial Laplacian matrix,* $L(G)$),satır ve sütunları G grafının noktaları ile adlandırılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L(G)=(l_{ij})=\begin{cases}d_i & ,v_i=v_j\\ -1 & ,v_i \sim v_j\\ 0 & ,aksi\, halde\end{cases}.$$

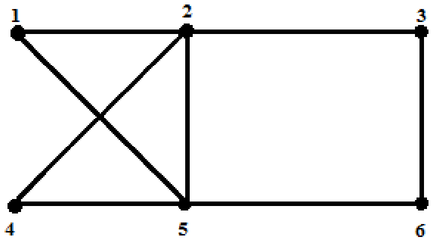
Bir $G=(V,E)$ grafının ***İşaretsiz* Laplacian matris**(*signless Laplacian matrix,* $Q(G)$), satır ve sütunları G grafının noktaları ile adlandırılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$Q(G)=(q_{ij})=\begin{cases}d_i & ,v_i=v_j\\ 1 & ,v_i \sim v_j\\ 0 & ,aksi\, halde\end{cases}.$$

Bir $G=(V,E)$ grafının **Normalize Edilmiş Laplacian matris**(*normalized Laplacian matrix,* $\mathcal{L}(G)$), satır ve sütunları G grafının noktaları ile adlandırılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{L}(G)=(\ell_{ij})=\begin{cases}1 & ,\ v_i=v_j\ \ ve\ d_i\neq 0\\ \dfrac{-1}{\sqrt{d_i d_j}} & ,\ v_i \sim v_j\\ 0 & ,\ aksi\, halde\end{cases}.$$

Şimdi, Şekil 2.2.1 deki G grafının temel matris gösterimlerini inceleyelim.



Şekil 2.2.1. Basit bağlantılı *G* grafı

- Komşuluk matrisi;

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Derece matrisi;

$$D(G)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Kombinatoryal Laplacian matris;

$$L(G)=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- İşaretsiz Laplacian matrisi;

$$Q \;\, G \; = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Normalize edilmiş Laplacian matrisi;

$$\mathrm{L} \;\, G \; = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{8}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 0 & 1 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

2.3. Lineer Cebir Bilgileri

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı Lineer Cebir bilgilerini hatırlayacağız ve kullanacağımız notasyonları açıklayacağız.

I_n; n boyutlu birim matrisi, $0_{m\times n}$ ise $m \times n$ boyutlu sıfır matrisi göstermektedir.

0_n; n boyutlu sıfır vektör, e_n, n boyutlu her bir elemanı bir olan vektör olarak kabul edilir.

M , n mertebeli reel matris olarak ele alınacaktır. M^T , M nin transpozesini gösterirken, $\det\ \lambda I - M\ = 0$ fonksiyonuna matrisin ***karekteristik polinomu***, bu polinomun köklerine ise matrisin ***özdeğerleri*** denir. Bir matrisin özdeğerlerinin kümesi ise o matrisin ***spektrumu*** olarak adlandırılır. Bir matrisin özdeğerleri $\lambda,\ \mu,\ q$ gibi notasyonlarla gösterilirken, $Mx = \lambda x$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı x değerlerine matrisin ***özvektörleri*** denir.Matrsinözvektörleri ise u, v, x gibi notasyonlarla göstereceğiz.

u, v sıfırdan farklı boyutlarıuygun herhangi iki vektör olsun, $Mu = \sigma u$ ve $M^T v = \sigma v$ denklemlerini sağlayan σ değerine M nin ***tekil (singular) değeri*** denir.

Bir reel matrisin transpozesi kendisine eşit $M = M^T$ ise o matrise ***simetrik matris*** denir.

Reel simetrik ve n boyutlu bir M matrisi, her n boyutlu x vektörü için $x^T M\ x \geq 0$ şartını sağlıyorsa bu matrise ***pozitif yarı tanımlı matris*** denir.

Teorem 2.3.1. (Cvetković ve ark., 1980, Horn ve ark., 1985) M n boyutlu reel simetrik bir matris olmak üzere

i) M matrisinin özdeğerleri reel sayılardır. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

ii) M matrisinin özdeğerlerinincebirsel ve geometrik katlılıkları eşittir.

iii) M matrisinin singüler değerleri, özdeğerlerinin mutlak değerine eşittir.

Teorem 2.3.2. (Fan, 1951) M ve N n - boyutlu iki kare matris olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i\ \ A+B\ \ \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\ \ A\ \ + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\ \ A$$

şartını sağlar.

Teorem 2.3.3.(Horn ve ark., 1985) M n boyutlu reel simetrik bir matris olmak üzere aşağıdakiler özdeştir.

i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $x^T M\ x \geq 0$ şartını sağlıyorsa M matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

ii) M matrisinin her bir özdeğerleri pozitif yada sıfırdır.

iii) $M = S\ S^T$ olacak şekilde bir S matrisi vardır.

M n boyutlu kare matrisinin esas köşegen elemanları toplamına o ***matrisin izi*** denir ve $iz \ M$ ile gösterilir,

$$iz \ M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ M$$

eşitliği vardır.

M n boyutlu matris ve $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $aM + bI_n$ matrisinin özdeğerleri;

$$a\lambda_1(M)+b \ , \ a\lambda_2(M)+b \ ,..., a\lambda_n(M)+b$$

şeklindedir.

2.3.1 Matrislerin Tensor Çarpımları

Tanım 2.3.1.1. $A, m \times n$ tipinde $B, p \times q$ tipinde iki matris olmak üzere A ve B matrislerinin ***tensor (kronecker ya da direkt)*** çarpımı

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}$$

biçiminde tanımlanır. Tensor çarpım değişmeli değildir.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2B & B \\ B & 3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 12 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B \otimes A = \begin{bmatrix} 4A & A \\ 3A & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 12 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{olup,}$$

$A \otimes B \neq B \otimes A$ dır.

ŞimdiKronecker çarpım ile ilgili bazı teoremleri verelim.

Teorem 2.3.1.1.(Belmann, 1970) A ve B reel değerli iki kare matris olmak üzere

i) $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$.

ii) $iz \ A \otimes B = iz \ A \otimes iz \ B$

Teorem 2.3.1.2(Belmann, 1970) A_1 ve A_2 aynı boyutlu matrisler ve B herhangi bir matris olmak üzere $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için

i) $(A_1 + A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) + (A_2 \otimes B)$.

ii) $B \otimes (A_1 + A_2) = (B \otimes A_1) + (B \otimes A_2)$.

iii) $(\alpha A) \otimes (\beta B) = \alpha\beta (A \otimes B)$.

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 2.3.1.3.(Belmann, 1970) $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, B = \left[b_{ij}\right]_{p\times q}, C = \left[c_{ij}\right]_{n\times r}, D = \left[d_{ij}\right]_{q\times s}$ şeklindeki reel değerli matrisler olmak üzere

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) ,$$

eşitliği vardır.

Teorem 2.3.1.4.(Belmann, 1970) A,B,C reel değerli üç matris olmak üzere

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

dir.

Teorem 2.3.1.5.(Belmann, 1970) A ve B tekil olmayan iki matris olmak üzere $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ dir.

Teorem 2.3.1.6.(Belmann, 1970) $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}, B = \left[b_{ij}\right]_{m\times m}$ reel değerli iki matris, A nınözdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ve B nin özdeğerleri ise $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ olmak üzere $A \otimes B$ nin özdeğerleri $\lambda_1\mu_1, \lambda_1\mu_2, ..., \lambda_1\mu_m, ..., \lambda_n\mu_1, \lambda_n\mu_2, ..., \lambda_n\mu_m$ şeklindedir.

2.4. Normalize EdilmişLaplacian Matrisin Özdeğerleri

G, n noktalı bir graf ve $\mathrm{L}(G)$, G nin normalize edilmiş Laplacian matrisi olmak üzere, $\mathrm{L}(G)$ reel, simetrik ve pozitif yarı tanımlıbir matristir. Böylece özdeğerleri pozitif reel sayılardır.

S, satır ve sütunları G grafının noktaları ile adlandırılmış bir matris olmak üzere

$$S(u,e)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{d_x}} & ,\ e=xy\ ve\ u=x\\[2mm] \dfrac{-1}{\sqrt{d_x}} & ,\ e=xy\ ve\ u=y\\[2mm] 0 & ,\ aksi\ halde\end{cases}$$

şeklinde seçeceğimiz S matrisi $\mathcal{L}(G)=SS^T$ şartını sağlar. Böylece Teorem 2.3.3 den $\mathcal{L}(G)$ matrisinin özdeğerleri pozitif yada sıfırdır.

Ayrıca izole nokta içermeyen her graf için normalize edilmiş Laplacian matris ile derece matrisi, komşuluk matrisi ve kombinatoryal Laplacian matris arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=D^{-1/2}L\,D^{-1/2}\\&=D^{-1/2}(D-A)D^{-1/2}\\&=I-D^{-1/2}AD^{-1/2}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Lemma 2.4.1. (Chung, 1997) G , $n\geq 2$ noktalı izole nokta içermeyen bir graf ve normalize edilmiş Laplacian spektrumu;

$$\lambda_1(G)\geq\lambda_2(G)\geq\ldots\geq\lambda_{n-1}(G)\geq\lambda_n(G)=0$$

olsun. Bu özdeğerler,

i) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\mathcal{L})=n$

ii) $\lambda_{n-1}\leq\dfrac{n}{n-1}$ eşitlik şartı sadece n noktalı tam graflarda geçerlidir.

iii) $\lambda_1\geq\dfrac{n}{n-1}$ eşitlik şartı sadece n noktalı tam graflarda geçerlidir.

iv) Eğer G tam graf değilse, $\lambda_{n-1}\leq 1$ şartını sağlar.

v) G bağlantılı, kenar sayısı m ve diameter D olan bir graf ise; $\lambda_{n-1}\geq\dfrac{1}{2mD}>0$ dır.

vi) $1\leq i\leq n$ için $\lambda_i(\mathcal{L})\in[0,2]$

vii) $\lambda_1\leq 2$ eşitlik şartı sadece iki parçalı tam graflar için geçerlidir.

şartlarını sağlar.

3. NORMALIZE EDİLMİŞ LAPLACIAN HIZ

Bu bölümde, öncelikle reel matrisler için hız tanımı ve özellikleri verildi. Daha sonra basit bağlantılı grafların normalize edilmiş Laplacian matrislerinin hızlarına dair bir üst sınır elde edildi.

3.1. Hız Tanımı ve Özellikleri

ŞimdiTeorem 3.2.1 de kullanacağımız, literatürdeyer alan temel tanım ve ifadeleri verelim. [Johnson ve ark., 1985; Mirsky, 1956; Nylen ve Tam, 1994; Thompson, 1992]

Tanım 3.1.1. $M = (m_{ij})$, $n \times n$ tipinde reel bir matris ve herhangi iki özdeğeri λ_i ve λ_j olsun. M matrisinin özdeğerlerininfarkının maksimum değerine ***matrisin hızı (spread)*** denir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$S(M) = \max_{i,j} \left| \lambda_i - \lambda_j \right|$$

M Hermityen matris olduğundanözdeğerleri $\lambda_i = \lambda_i(M)$ şeklindeki reel sayılardır.

M matrisininözdeğerlerinin artmayan sırayla dizilişi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ olsun. M matrisinin hızı;

$$S(M) = \lambda_1 - \lambda_n$$

dir. M Hermityen matrisi ve $x, y \in \mathbb{C}^n$ için

$$\lambda_1 \geq x^* M x \ , \ \lambda_n \leq y^* M y$$

olup bunları hız tanımında yerine koyarsak;

$$S(M) = \max_{x,y} \left| x^* M x - y^* M y \right| = \max_{x,y} \sum_{i,j} m_{ij} (\bar{x}_i x_j - \bar{y}_i y_j)$$

elde edilir.

3.2. Normalize Edilmiş Laplacian Hız

Literatürde grafların kombinatoryal Laplacian ve işaretsiz Laplacian matrislerinin hız değerleri üzerine pek çok çalışma mevcuttur. Örneğin; Liu M. ve Liu B., 2010;Maden ve ark., 2013;Zhai ve ark., 2011.Bizde bu çalışmalara ek olarak normalize edilmiş Laplacian matrisin hızı tanımlayarak bazı sınır elde edeceğiz. Öncelikle bu hesaplama için bize gerekli olan tanımları verelim

G basit bağlantılı bir graf olmak üzere, G grafının normalize edilmiş Laplacian matrisinin

$$\mathrm{L}(G) = (\ell_{ij}) = \begin{cases} 1 & , v_i = v_j \ ve\ d_i \neq 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{d_i d_j}} & , v_i \sim v_j \\ 0 & , aksi\, halde \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Simetrik $\mathrm{L}(G)$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathrm{L}) \geq \lambda_2(\mathrm{L}) \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}(\mathrm{L}) \geq \lambda_n(\mathrm{L}) = 0$$

şeklindeartmayan sırada sıralansın. Bu tanımlardan yararlanarak bir G grafının normalize edilmiş Laplacian matrisinin hızını

$$S\mathrm{L}(G) = \lambda_1 - \lambda_{n-1}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Şimdi $S\mathrm{L}(G)$ nin üst sınırını hesaplamak için aşağıdaki bilinen eşitlikleri kullanacağız.

$$iz(\mathrm{L}(G)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n \ , \ iz(\mathrm{L}^2(G)) = n + 2\sum_{uv \in E} \frac{1}{d_u d_v} = n + 2R_{-1}(G) \,. \qquad (3.2.1)$$

Teorem 3.2.1. G, n noktalı basit bağlantılı graf olmak üzere, G grafının normalize edilmiş Laplacian matrisinin hızı için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$S\mathrm{L}(G) \leq \lambda_1(G) + \sqrt{n + 2R_{-1}(G) - \lambda_1^2} \leq 2\sqrt{\frac{n}{2} + R_{-1}(G)} \,. \qquad (3.2.2)$$

İspat.(3.2.1) eşitliğini kullanarak,

$$\lambda_1^2 + \lambda_{n-1}^2 \leq n + 2R_{-1}(G)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği normalize edilmiş Laplacian hız tanımında yerine yazarsak

$$S\mathrm{L}(G) = \lambda_1 - \lambda_{n-1} \leq \lambda_1(G) + \sqrt{n + 2R_{-1}(G) - \lambda_1^2} \qquad (3.2.3)$$

elde edilir. Burada λ_1 e bağlı $\lambda_1+\sqrt{n+2R_{-1}(G)-\lambda_1^2}$ fonksiyonu, $\lambda_1 \le \sqrt{\frac{n}{2}+R_{-1}(G)}$ iken sürekli artandır ve $\lambda_1 \ge \sqrt{\frac{n}{2}+R_{-1}(G)}$ iken sürekli azalandır. Bundan faydalanarak (3.2.3) de $\lambda_1 \le \sqrt{\frac{n}{2}+R_{-1}(G)}$ eşitsizliğini yerine yazarsak,

$$\lambda_1(G)+\sqrt{n+2R_{-1}(G)-\lambda_1^2} \le 2\sqrt{\frac{n}{2}+R_{-1}(G)}$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Böylece (3.2.2) eşitsizliğini sağlatırız.

Bazı bilinen özel grafların normalize edilmiş Laplacian hızlarını hesaplayalım,

- $\boldsymbol{K_n}$ tam grafının normalize edilmiş Laplacian matrisi ;

$$\mathrm{L}_{K_n}=\begin{cases} 1 & , u=v \\ \dfrac{1}{n-1} & , aksi\, halde \end{cases}$$

şeklindedir. Bu matrisin özdeğerleri ise $\left\{ \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} ,\ 0\ ^{1} \right\}$ olup, normalize edilmiş Laplacian hızı ise $S\mathrm{L}(G)=\lambda_1-\lambda_{n-1}$ formülünden,

$$S\mathrm{L}(K_n)=0$$

olarak elde edilir. Benzer olarak;

- $\boldsymbol{K_{p,q}}$ iki parçalı grafının normalize edilmiş Laplacian matrisinin özdeğerleri ,

  $2\ ^{1} ,1^{p+q-2} ,\ 0\ ^{1}$ olup,

$$S\mathrm{L}(K_{p,q})=1$$

  dir.

- ***Petersen grafının*** normalize edilmiş Laplacian matrisinin özdeğerleri ise ;

  $\left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^{4} , \left(\frac{2}{3}\right)^{5} ,\ 0\ ^{1} \right\}$ olup

$$SL\ \ G_{Petersen}\ \ =1$$

olarak elde edilir.

4. NORMALİZE EDİLMİŞ LAPLACİAN HIZIN KLİK VE BAĞIMSIZLIK SAYILARI İLE İLİŞKİSİ

Bu bölümde normalize edilmiş Laplacian hız için klik ve bağımsızlık sayılarına bağlı olarak alt ve üst sınırlar elde edildi. Buradaki temel tanımlar ve ifadeler için ana kaynak olarak Motzkin ve Strauss, 1965 ve Maden ve Çevik, 2012 çalışmaları kullanıldı.

S, $\mathbb{R}^n$ de $(n-1)$-boyutlu birim simpleks olsun. Yani $S=\{x\in\mathbb{R}^n : e^T x=1,\ x\geq 1\}$

Klik sayısının ω ve bağımsızlık sayısının α, komşuluk matrisi A ile arasında

$$1-\frac{1}{\omega}=\max_{x\in S}<x, Ax> \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\alpha}=\min_{x\in S}<x,\ (I+A)x>$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

$\mathrm{L}(G)$ nin $\lambda_1(G)\geq\lambda_2(G)\geq\ldots\geq\lambda_{n-1}(G)\geq\lambda_n(G)=0$ şeklindeki özdeğerlerine ait özvektörler $\upsilon^1>0,\upsilon^2,\ldots,\upsilon^n$ olmak üzere $y_i(\beta)=\beta u^i+\sqrt{1-\beta^2}u^1\in\mathbb{R}^n$ olacak şekilde bir birim vektör ailesi oluşturulabilir. $i=1,2,\ldots,n$, $\beta\in(-1,+1)$. Buradan $i=2,3,\ldots,n$ için

$$l_i=\max_{j:u_j^i>0}\frac{-u_j^1}{\sqrt{(u_j^1)^2+(u_j^i)^2}}<0 \text{ ve } u_i=\min_{j:u_j^i<0}\frac{-u_j^1}{\sqrt{(u_j^1)^2+(u_j^i)^2}}>0$$

olmak üzere $\beta\in[l_i,u_i]$ için, (4.1) denkleminin olası çözümü,

$$z_i(\beta)=(1/e^T y_i(\beta))/y_i(\beta)$$

olarak elde edilir. $s_i=e^T u^i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_i &= \max_{\beta\in[l_i,u_i]} z_i(\beta)^T A z_i(\beta) \\ &= \max_{\beta\in[l_i,u_i]}\frac{\beta^2\lambda_i+(1-\beta^2)\lambda_1}{\left[\beta s_i+\sqrt{1+\beta^2}s_1\right]^2} \end{aligned}$$

olsun. $g^* = \max_{i=1,2,\dots,n} g_i$ biçiminde gösterirsek (4.1)denkleminden dolayı

$$\omega \geq \frac{1}{1-g^*}$$

elde edilir. Şimdi bu bilgileri kullanarak, klik ve bağımsızlık sayısı için normalize edilmiş Laplacian matrisin özdeğerlerine bağlı sınırlar bulmaya çalışalım.

Teorem 4.1. G bir graf ve minimum derecesi δ olmak üzere

$$\omega \geq \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{n}{n-\delta(\beta^2(\lambda_1-\lambda_i)-\lambda_1+1)} \tag{4.2}$$

$\beta \in (-1,+1)$ eşitsizliği mevcuttur.

İspat. $\mathrm{L}(G)$ nin özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(G) \geq \lambda_n(G) = 0$, bu özdeğerlere içinözvektörler $\upsilon^1 > 0, \upsilon^2, \dots, \upsilon^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left\langle z_i(\beta)\ ,\ \mathrm{L}z_i(\beta)\right\rangle &= \left\langle z_i(\beta)\ ,\ (\mathrm{I}-D^{1/2}AD^{-1/2})z_i(\beta)\right\rangle \\
&= \left\langle z_i(\beta)\ ,\ \mathrm{I}z_i(\beta)\right\rangle - \left\langle z_i(\beta)\ ,\ D^{-1/2}AD^{-1/2}z_i(\beta)\right\rangle \\
&= \left\langle z_i(\beta)\ ,\ \mathrm{I}z_i(\beta)\right\rangle - \sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} \frac{\left\langle z_i(\beta)\ ,\ Az_i(\beta)\right\rangle}{\sqrt{d_u d_v}} \\
&\geq \left\langle z_i(\beta)\ ,\ \mathrm{I}z_i(\beta)\right\rangle - \frac{1}{\delta} g_i
\end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.3) eşitsizliğinde, $\left\langle z_i(\beta)\ ,\ \ell z_i(\beta)\right\rangle = \dfrac{\beta^2\lambda_i + (1-\beta^2)\lambda_1}{\left[\beta s_i + \sqrt{1+\beta^2}\, s_1\right]^2}$ eşitliğini yerine koyarsak,

$$\frac{\beta^2\lambda_i + (1-\beta^2)\lambda_1}{\left[\beta s_i + \sqrt{1+\beta^2}\, s_1\right]^2} \geq \frac{\beta^2 + (1-\beta^2)}{\left[\beta s_i + \sqrt{1+\beta^2}\, s_1\right]^2} + \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) \tag{4.4}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve $\left[\beta s_i + \sqrt{1+\beta^2}\, s_1\right]^2 \leq n$ olduğunu biliyoruz(Maden ve Çevik, 2012). Buna göre (4.4) eşitsizliğini düzenlersek,

$$\frac{1}{\delta}(1-\frac{1}{\omega})\geq\frac{1+\beta^2\;\;\lambda_1-\lambda_i\;\;-\lambda_1}{\left[\beta s_i+\sqrt{1+\beta^2}\,s_1\right]^2}\geq\frac{1+\beta^2\;\;\lambda_1-\lambda_i\;\;-\lambda_1}{n},$$

$$(1-\frac{1}{\omega})\geq\frac{\delta\;\;1+\beta^2\;\;\lambda_1-\lambda_i\;\;-\lambda_1}{n},$$

$$\frac{1}{\omega}\leq 1-\frac{\delta\;\;1+\beta^2\;\;\lambda_1-\lambda_i\;\;-\lambda_1}{n}$$

elde edilir. Buradan (4.2) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Teorem 4.2.G bir graf ve maksimum derecesi Δ ve $U_i=\beta s_i+\sqrt{1+\beta^2}\,s_1$ olmak üzere

$$\alpha\geq\max_{i=1,2,\ldots,n}\frac{U_i^{\;\;2}}{\Delta(\beta^2(\lambda_1-\lambda_i)-\lambda_1+1)+\;U_i^{\;\;2}}$$

$\beta\in(-1,+1)$ eşitsizliği mevcuttur.

İspat. Teorem 4.1 ve (4.1) denkleminden ispat açıktır.

Şimdi Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 için bazı sonuçlar verelim.

Sonuç 4.1. G n noktalı ve minimum derecesi δ olan bir graf olmak üzere klik sayısı ile normalize edilmiş Laplacian hız arasına,

$$S\mathrm{L}(G)\leq\frac{\frac{n}{\delta}(1-\frac{1}{\omega})-1+\lambda_1}{\beta^2}$$

eşitsizliği vardır.

İspat.

$$\omega\geq\frac{n}{n-\delta(\beta^2(\lambda_1-\lambda_i)-\lambda_1+1)}$$

$i=n-1$ için çözüm yapılırsa,

$$\omega\geq\frac{n}{n-\delta(\beta^2(S\mathrm{L}(G))-\lambda_1+1)}$$

ve

$$\beta^2(S\mathrm{L}(G))-\lambda_1+1\leq\frac{n}{\delta}(1-\frac{1}{\omega})$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2. G n noktalı ve maksimum derecesi Δ olan bir graf olmak üzere bağımsızlık sayısı ile normalize edilmiş Laplacian hız arasında,

$$SL(G) \geq \frac{U_{n-1}^{2}\left(\frac{1}{\alpha\Delta}-1\right)+\lambda_1-1}{\beta^{2}}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. $(1 \leq i \leq n, U_i = \beta s_i + s_i\sqrt{1-\beta^2})$

Sonuç 4.3. Normalize edilmiş Laplacian hızın klik sayısı ve bağımsızlık sayısına bağlı bağlı olarak alt ve üst sınırları

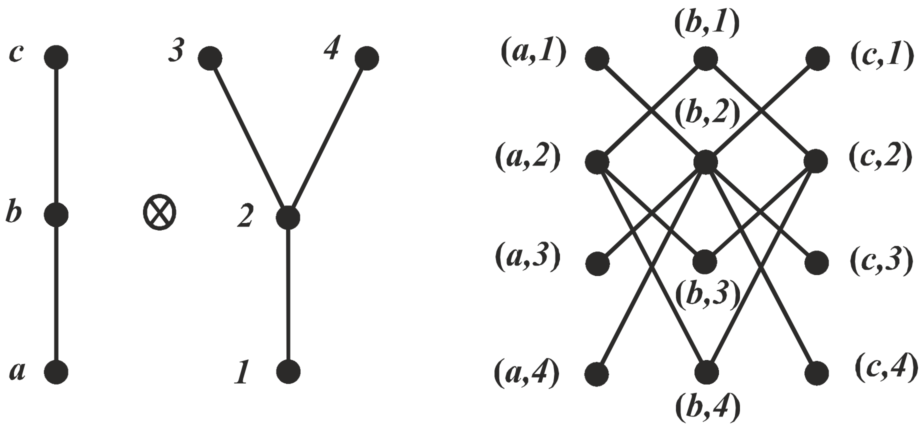
$$\frac{U_{n-1}^{2}\left(\frac{1}{\alpha\Delta}-1\right)+\lambda_1-1}{\beta^{2}} \leq SL(G) \leq \frac{\frac{n}{\delta}(1-\frac{1}{\omega})-1+\lambda_1}{\beta^{2}}$$

şeklindedir.

5. GRAFLARIN TENSOR ÇARPIMININ NORMALİZE EDİLMİŞ LAPLACİAN HIZI

Bu bölümde basit bağlantılı grafların tensor çarpımının normalize edilmiş Laplacian matrisin hızı için bir alt ve bir üst sınır elde edildi. Matrislerin tensor çarpımları ile ilgili daha genel bilgiler Bölüm 2.3.1. de bulunmakla birlikte bazı önemli tanımlardan bu bölümde bahsedeceğiz.

Tanım 5.1.(Weichsel, 1962) G ve H , n mertebeli iki graf olmak üzere bu iki grafın tensor çarpımı $G\otimes H$ şeklinde gösterilir. Çarpım grafının,nokta kümesi; $V(G)\times V(H)$ olup $V(G\otimes H)$ ile gösterilir, kenar kümesi ise $u_1\neq u_2\in V(G)$, $v_1\neq v_2\in V(H)$ olmak üzere $E(G\otimes H)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2):u_1u_2\in E(G),v_1v_2\in E(H)\}$ şeklindedir.



Şekil 5.1.1İki grafın tensor çarpımı

Lemma 5.1. (Cvetković ve ark.,2010;Weichsel, 1962) G ve H graflarını ele alalım. Bu grafların komşuluk matrisleri sırası ile $A(G)$ ve $A(H)$ olsun. $G\otimes H$ grafının komşuluk matrisi ise $A(G\otimes H)$ olup, bu matrisler arasında

$$A(G\otimes H)=A(G)\otimes A(H) \tag{5.1}$$

eşitliği vardır.Benzer olarak derece matrisleri için,

$$D(G\otimes H)=D(G)\otimes D(H) \tag{5.2}$$

eşitliği vardır.

Tanım 5.2. $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B=\left[b_{kl}\right]_{p\times q}$ iki matris olmak üzere bu iki matrisin tensor çarpımı ise $A\otimes B=\left[a_{ij}B\right]_{mp\times nq}$ şeklindedir ve X,Y,Z ve T herhangi reel matrisler olmak üzere

$$(X+Y)\otimes(Z+T)=(X\otimes Z)+(X\otimes T)+(Y\otimes Z)+(Y\otimes T)$$

eşitliği verdır.

Lemma 5.2. G ve H basit bağlantılı iki graf olmak üzere

$$\mathrm{L}(G\otimes H)=\mathrm{I}(G)\otimes\mathrm{L}(H)+\mathrm{L}(G)\otimes\mathrm{I}(H)-\mathrm{L}(G)\otimes\mathrm{L}(H) \qquad (5.3)$$

eşitliği vardır.

İspat. $\mathrm{L}=\mathrm{I}-D^{-1/2}AD^{-1/2}$ olduğunu biliyoruz. $G\otimes H$ grafı için bu eşitliği yazalım.

$$\mathrm{L}(G\otimes H)=\mathrm{I}(G\otimes H)-D^{-1/2}(G\otimes H)\,A(G\otimes H)\,D^{-1/2}(G\otimes H)$$

olup (5.1) ve (5.2) eşitliklerden,

$$\mathrm{L}(G\otimes H)=\mathrm{I}(G\otimes H)-\left(D^{-1/2}(G)\otimes D^{-1/2}(H)\right)\left(A(G)\otimes A(H)\right)\left(D^{-1/2}(G)\otimes D^{-1/2}(H)\right)$$

olur. Bu eşitliği düzenlersek,

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(G\otimes H)&=\mathrm{I}(G\otimes H)-\left[D^{-1/2}(G)A(G)D^{-1/2}(G)\right]\otimes\left[D^{-1/2}(H)A(H)D^{-1/2}(H)\right]\\&=\mathrm{I}(G)\otimes\mathrm{I}(H)-\left[\mathrm{I}(G)-\mathrm{L}(G)\right]\otimes\left[\mathrm{I}(H)-\mathrm{L}(H)\right]\\&=\mathrm{I}(G)\otimes\mathrm{I}(H)-\left[\mathrm{I}(G)\otimes\mathrm{I}(H)-\mathrm{I}(G)\otimes\mathrm{L}(H)-\mathrm{L}(G)\otimes\mathrm{I}(H)+\mathrm{L}(G)\otimes\mathrm{L}(H)\right]\end{aligned}$$

sonuç olarak (5.3) eşitliği elde edilir.

Örnek 5.1. Şekil 5.1.1daki grafın normalize edilmiş Laplacian matrisleri için lemma 5.2. nin doğruluğunu gösterelim.

$$L(G)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1\end{bmatrix},\quad L(H)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1 & 0\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olup $L(G \otimes H) = I(G) \otimes L(H) + L(G) \otimes I(H) - L(G) \otimes L(H)$ eşitliğinde yerlerine yazarsak,

$$L(G \otimes H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}(G\otimes H)=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0\\
\frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\
0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0\\
0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Önerme 5.1.(Kaveh ve Alinejad, 2009) A_i ve B_i $(1\le i\le n)$ iki matris olmak üzere tüm $1\le i<j\le n$ için $A_iA_j=A_jA_i$ ve $B_iB_j=B_jB_i$ ise, aşağıdaki eşitlik mevcuttur.

$$eig\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\otimes B_i\right)=\sum eig(A_i\otimes B_i)$$

Teorem 5.1G ve H sırası ile n ve m mertebeli iki basit bağlantılı graf olmak üzere

$$S\mathcal{L}(G\otimes H)\le S\mathcal{L}(G)+S\mathcal{L}(H)+S(\mathcal{L}(G)\otimes\mathcal{L}(H))$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik şartı ise sadece G ve H tam graf olduğu taktirde geçerlidir.

İspat. Önerme 5.1 deki eşitlikten,

$$\max\ eig\ \mathrm{L}\ G\otimes H\quad = \max\ eig\ \mathrm{I}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H\ + \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{I}\ H\ - \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H$$

ve

$$\min\ eig\ \mathrm{L}\ G\otimes H\quad = \min\ eig\ \mathrm{I}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H\ + \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{I}\ H\ - \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H$$

olup bu eşitlikleri düzenlersek,

$$\begin{aligned} \max\ eig\ \mathrm{L}\ G\otimes H\quad &\leq \max\ eig\ \mathrm{I}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H\quad + \max\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H \\ &\quad - \min\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \min\ eig\ \mathrm{L}\ G\otimes H\quad &\geq \min\ eig\ \mathrm{I}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H\quad + \min\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{I}\ H \\ &\quad - \max\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu eşitsizlikleri normalize edilmiş Laplacian hız formülünde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \max\ eig\ \mathrm{L}\ G\otimes H\quad - \min\ eig\ \mathrm{L}\ G\otimes H\quad &\leq \max\ eig\ \mathrm{I}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H\quad - \min\ eig\ \mathrm{I}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H \\ &\quad + \max\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{I}\ H\quad - \min\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{I}\ H \\ &\quad + \max\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H\quad - \min\ eig\ \mathrm{L}\ G\ \otimes \mathrm{L}\ H \end{aligned}$$

elde edilir. Normalize edilmiş hız tanımına göre ispat açıktır.

Teorem 5.2. G ve H sırası ile n ve m mertebeli iki basit bağlantılı graf ve $\lambda_{n-1}(G)$ ve $\lambda_{m-1}(H)$ sırasıyla G ve H nin normalize edilmiş Laplacian matrisininözdeğerleriolmak üzere

$$S\mathrm{L}\ G\otimes H\ \geq\ 1-\lambda_{m-1}\ S\mathrm{L}\ G\ +\ 1-\lambda_{n-1}\ S\mathrm{L}\ H\ - S\mathrm{L}\ G\ S\mathrm{L}\ G \tag{5.4}$$

eşitsizliği vardır, eşitlik şartı ise sadece tam graflar için geçerlidir.

İspat. Lemma 5.2. den,

$$\lambda_1\ \mathrm{L}\ G\otimes H\ \geq \lambda_1\ \mathrm{L}\ H\ + \lambda_1\ \mathrm{L}\ G\ - \lambda_1\ \mathrm{L}\ G\ \ \lambda_1\ \mathrm{L}\ H$$

ve

$$\lambda_{nm-1}\ \mathrm{L}\ G\otimes H\ \leq \lambda_{m-1}\ \mathrm{L}\ H\ + \lambda_{n-1}\ \mathrm{L}\ G\ - \lambda_{n-1}\ \mathrm{L}\ G\ \ \lambda_{m-1}\ \mathrm{L}\ H$$

olup, normalize edilmiş Laplacian hız tanımından,

$$\lambda_1 \; \mathcal{L} \; G\otimes H \; - \lambda_{nm-1} \; \mathcal{L} \; G\otimes H$$
$$\geq \lambda_1 \; \mathcal{L} \; H \; - \lambda_{m-1} \; \mathcal{L} \; H \; + \lambda_1 \; \mathcal{L} \; G \; - \lambda_{n-1} \; \mathcal{L} \; G \; - \lambda_1 \; \mathcal{L} \; G \; \lambda_1 \; \mathcal{L} \; H \; + \lambda_{n-1} \; \mathcal{L} \; G \; \lambda_{m-1} \; \mathcal{L} \; H$$
$$\geq \lambda_1 \; \mathcal{L} \; H \; - \lambda_{m-1} \; \mathcal{L} \; H \; + \lambda_1 \; \mathcal{L} \; G \; - \lambda_{n-1} \; \mathcal{L} \; G \; - \left[\begin{array}{l} \lambda_1 \; \mathcal{L} \; G \; - \lambda_{n-1} \; \mathcal{L} \; G \quad \lambda_1 \; \mathcal{L} \; H \; - \lambda_{m-1} \; \mathcal{L} \; H \\ + \lambda_{n-1} \; \mathcal{L} \; G \quad \lambda_1 \; \mathcal{L} \; H \; - \lambda_{m-1} \; \mathcal{L} \; H \\ + \lambda_{m-1} \; \mathcal{L} \; H \quad \lambda_1 \; \mathcal{L} \; G \; - \lambda_{n-1} \; \mathcal{L} \; G \end{array} \right]$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi grafların tensor çarpımının normalize edilmiş Laplacian hızı için bulduğumuz sınırları bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 5.2.örnek 5.1 de ki matrisler için;

$\mathcal{L} \; G$ için;özdeğerler kümesi, $2,1,0$ olup $S\mathcal{L} \; G = 1$dir. $\mathcal{L} \; H$ için;özdeğerler kümesi, $2,1,1,0$ olup $SL \; H = 1$dir. $\mathcal{L} \; G\otimes H$ için; özdeğerlerkümesi, $2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0$ olup $SL \; G\otimes H = 1$ olup, bu değerlerin, Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 deki eşitsizlikleri sağladığı açıkça görülür.

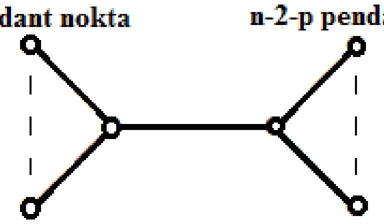
6. AĞAÇLARIN ve TEK DEVİRLİ GRAFLARIN NORMALIZE EDİLMİŞ LAPLACIAN HIZI

Bu bölümdeözel $T(n,p)$ ve $G(n-3,0;n)$ $(n\geq 5)$ graflarının normalize edilmiş Laplacian hızlarını hesaplayacağız.

6.1. $T(n,p)$ - Tipindeki Ağaçların Normalize Edilmiş Laplacian Hızı

Öncelikle $T(n,p)$ tipindeki ağaçların tanımını verip bu grafların normalize edilmiş Laplacian matrisinin karakteristik polinomunu hesaplayalım.

$T(n,p)$ tipindeki ağaçlar $K_{1,p}$ ve $K_{1,n-2-p}$ şeklindeki iki yıldızın birleştirilmesi ile oluşurve şekil 6.1.1 deki gibi gösterilir.



Şekil 6.1.1 $T(n,p)$ - tipindeki ağaç

Şimdi bu grafın normalize edilmiş Laplacian matrisinin karakteristik polinomunu hesaplayalım.

Teorem 6.1.1. $q=n-p-2$ olmak üzere $\mathcal{L}(T(n,p))$ karakteristik polinomu

$$\det(\lambda I-\mathcal{L}(T(n,p)))=\lambda(\lambda-1)^{p+q-2}(\lambda-2)\left[(\lambda-1)^2-\frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right] \quad (6.1)$$

dir.

İspat. $M=\lambda I-\ell(T(n,p))$ olsun,

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc} \lambda-1\ \mathrm{I}_p & 0 & \dfrac{e_p}{\sqrt{p+1}} & 0 \\ 0 & \lambda-1\ \mathrm{I}_q & 0 & \dfrac{e_q}{\sqrt{q+1}} \\ \hline \dfrac{e_p}{\sqrt{p+1}} & 0 & \lambda-1 & \dfrac{1}{\sqrt{\ p+1\quad q+1}} \\ 0 & \dfrac{e_q}{\sqrt{q+1}} & \dfrac{1}{\sqrt{\ p+1\quad q+1}} & \lambda-1 \end{array}\right]$$

olup bu matrisini soldan $B=\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{p+q} & 0 \\ \lambda-1\ diag\left\{\dfrac{e_p^{\ T}}{\sqrt{p+1}},\dfrac{e_q^{\ T}}{\sqrt{q+1}}\right\} & \mathrm{I}_2 \end{bmatrix}$ matrisi ile çarparsak,

$$BM=\begin{bmatrix} \lambda-1\ \mathrm{I}_p & 0 & \dfrac{e_p}{\sqrt{p+1}} & 0 \\ 0 & \lambda-1\ \mathrm{I}_q & 0 & \dfrac{e_q}{\sqrt{q+1}} \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \dfrac{1}{\sqrt{\ p+1\quad q+1}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\ p+1\quad q+1}} & \lambda-1 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

matrisini elde ederiz. Eşitlik 6.2 deki matrisin determinantı,

$$|BM|=|B|.|M|=1.|\mathrm{I}\lambda-\mathrm{L}(T(n,p))|=\lambda\ \ \lambda-1^{\ p+q-2}\ \ \lambda-2\left[\ \lambda-1\ -\frac{pq}{p+1\quad q+1}\right]$$

ve

$$|M|=|\mathrm{I}\lambda-\mathrm{L}(T(n,p))|=\lambda\ \ \lambda-1^{\ p+q-2}\ \ \lambda-2\left[\ \lambda-1\ -\frac{pq}{p+1\quad q+1}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıda elde ettiğimizkarakteristik polinomunun kökleri $T\ \ n,p$ -tipi ağacın normalize edilmiş Laplacian özdeğerleri denir ve bu özdeğerlerin en büyüğü ile sıfırdan farklı en küçüğü arasındaki farka $T(n,p)$ tipindeki grafların normalize edilmiş Laplacian hızı denir. Şimdi bu hızı hesaplayalım.

Teorem 6.1.2. $T(n,p)$ tipindeki grafların normalize edilmiş Laplacian hızı için $q=n-p-2$ olmak üzere

$$S\mathrm{L}(T(n,p))=1+\sqrt{\frac{pq}{(p+1)(q+1)}}$$

eşitliği vardır.

İspat. Teorem 6.1.1 de $\mathrm{L}(T(n,p))$ matrisinin karakteristik polinomunu

$$\det\left(\mathrm{I}\lambda-\mathrm{L}(T(n,p))\right)=\lambda(\lambda-1)^{p+q-2}(\lambda-2)\left[(\lambda-1)^2-\frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right]$$

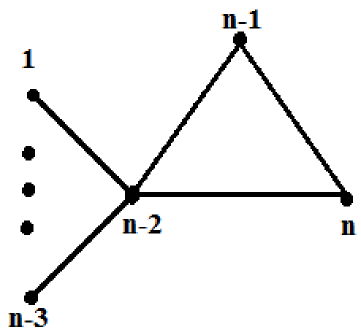
biçiminde hesaplamıştık. Bu eşitlikten $\mathrm{L}(T(n,p))$ matrisinin özdeğerleri; $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=1\pm\sqrt{\frac{pq}{(p+1)(q+1)}}$, $\lambda_4=0$ şeklindedir. Sonuç olarak hız tanımından;

$$S\mathrm{L}(T(n,p))=1+\sqrt{\frac{pq}{(p+1)(q+1)}}$$

elde edilir.

6.2. $G_1(n-3,0;n)$- Tipindeki $(n\geq 5)$ Tek Devir İçeren Grafların Normalize Edilmiş Laplacian Hızı

Bu bölümdetek devir içerengrafalardan özel olarak Şekil 6.2.1görülen $(n\geq 5)$ $G_1(n-3,0;n)$ tipindeki grafların normalize edilmiş Laplacian hızlarını hesaplayacağız.



Şekil 6.2.1. $G_1(n-3,0;n)$ - tipi $(n\geq 5)$ tek devir içeren graf

Teorem 6.2.1. $G_1(n-3,0;n)$, $(n\geq 5)$ tipindeki grafların normalize edilmiş Laplacian hızı

$$S\mathrm{L}\ \ G_1(n-3,0;n)\ \ =\frac{n-3}{n-1} \tag{6.3}$$

dır.

İspat. Öncelikle $M=\lambda \mathrm{I}-\mathrm{L}\ \ G_1(n-3,0;n)$ olsun.

$$M=\begin{bmatrix} \lambda-1\ \ \mathrm{I}_{n-3} & \frac{e_{n-3}}{\sqrt{n-1}} & 0 & 0 \\ \frac{e^T_{\ n-3}}{\sqrt{n-1}} & \lambda-1 & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} & \lambda-1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} & \frac{1}{2} & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

olur. Elementer satır işlemi uygulayarak

$$M=\begin{bmatrix} \lambda-1\ \ \mathrm{I}_{n-3} & \frac{e_{n-3}}{\sqrt{n-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1\ \ \frac{2}{n-1} & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} & \lambda-1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2\ \ n-1}} & \frac{1}{2} & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$\det\ \ \lambda\mathrm{I}-\mathrm{L}\ \ G_1(n-3,0;n)\ \ =\lambda\ \ \lambda-1^{\ n-3}\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\left[\lambda-\frac{n+3}{2\ \ n-1}\right]$$

olur. $n \geq 5$ için $f(x) = \dfrac{x+3}{2\ \ x-1}$ azalan olduğundan $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ ve $\lambda_{n-1} = \dfrac{n+3}{2\ \ n-1}$ olacaktır. Normalize edilmiş Laplacian hız tanımını kullanarak (6.3) eşitliğini kolaylıkla elde edelir.

7. GRAFLARIN DERECE KIRCHHOFF İNDEKSİ

Bu bölümde derece Kirchhoff indeksi içingrafın normalize edilmiş Laplacian matrisinin özdeğerlerine, kenar ve nokta parametrelerine bağlı alt ve üst sınırlar bulundu. Şimdi bu sınırları bulmak için kullandığımız bazı tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 7.1. (Chen ve Zhang, 2007) Direnç mesafesi (resistancedistance, r_{ij}) elektrik ağlarının herhangi iki kenarı arasındaki mesafe olarak bilinir ve kombinatoryal Laplacian matris ve normalize edilmiş Laplacian matrisin özdeğerleri ve özvektörleri ile ifade edilebilir.

Bir G grafının tüm noktaları ve bazı kenarları ile oluşan devir içermeyen alt grafına ***geren ağaç*** denir. Bir grafın içerdiği tüm geren ağaçların sayısı $t(G)$ ile gösterilir. Biz çalışmamız sırasında bu değeri kısaca t ile göstereceğiz.

Tanım7.2. (Xiou ve Gutman, 2003;Klein ve Randić 1993; Das, 2013)G basit bağlantılı bir graf olmak üzere G nin herhangi iki noktası v_i ve v_j olsun. Bu noktalar arasındaki direnç mesafesi (resistancedistance)r_{ij} ile ifade edilmek üzere bir G moleküler grafının tüm noktaları arasındaki direnç mesafeleri toplamına ***Kirchhoff indeks*** denir. Kısaca

$$Kf(G) = \sum_{i<j} r_{ij}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım7.3.(Xiou ve Gutman, 2003; Das, 2013) Bir n noktalı, m kenarlı G grafının Laplacian matrisi, derece matrisi ile komşuluk matrisinin farkına eşittir. Yani $L(G) = D(G) - A(G)$ dir. Laplacian matrisinözdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n = 0$ olmak üzere Kichhoffindex için Xiouve Gutman (2003) aşağıdaki bağıntıyı elde etmiştir.

$$Kf(G) = n\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_k} .$$

Tanım 7.4. Chen ve Zang (2007) Kirchhoff indeks tanımından yolla çıkarak,

$$Kf^{*}\left(G\right)=\sum_{i<j}d_i d_j r_{ij}$$

şeklinde derece Kirchhoff indeksi tanımladılar.Yine aynı çalışmada grafın, kenar sayısına ve normalize edilmiş Laplacian matrisin özdeğerlerine $\lambda_1(\mathrm{L})\geq\lambda_2(\mathrm{L})\geq...\geq\lambda_{n-1}(\mathrm{L})\geq\lambda_n(\mathrm{L})=0$ bağlı olarak derece Kirchhoff indeks için

$$Kf^{*}\left(G\right)=2m\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i} \tag{7.2}$$

eşitliği elde edilmiştir.

Şimdi ise çalışmamızın bu bölümünde kullanacağımız lemmaları verelim.

Lemma 7.1. (Cvetković ve ark., 1980) Geren ağaç sayısı, normalize edilmiş Laplacian matrisin özdeğerlerine bağlı olarak

$$t=\frac{\Delta}{2m}\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i$$

şeklinde elde edilmiştir.

Lemma7.2.(Maclaurin'sSymmetricMeanInequality) $a_1, a_2, ..., a_r$ pozitif reel sayıları için a_i nin k tanesinin çarpımının ortalaması P_k ile gösterilsin. Bu taktirde

$$P_1=\frac{a_1+a_2+...+a_r}{r}$$

$$P_2=\frac{a_1a_2+a_1a_3+...+a_1a_r}{\frac{1}{2}r\left(r-1\right)}$$

$$\vdots$$

$$P_{r-1}=\frac{a_1a_2...a_{r-1}+a_1a_2...a_{r-2}a_r+...+a_2a_3...a_{r-1}a_r}{r}$$

$$P_r=a_1a_2...a_r$$

olmak üzere

$$P_1\geq P_2^{1/2}\geq P_3^{1/3}\geq...\geq P_r^{1/r}$$

sağlanır.

Şimdi derece Kirchhoff indeks için elde ettiğimiz ilk ana sonucumuzu verelim.

Teorem 7.1. G ; n noktalı, m kenarlı bir graf olsun. Bu grafın maksimum derecesi Δ ve geren ağaç sayısı t olmak üzere, derece Kirchhoff indeks için,

$$2m(n-2)\left(\frac{\lambda_1}{2mt}\right)^{\frac{1}{n-2}}+\frac{2m}{\lambda_1}\leq Kf^*\ G\ \leq\frac{\Delta\ n-1}{t}\left(\frac{n^2-n+2\Re_{-1}(G)}{2(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Alt sınır için Tanım 7.4.'daki (7.2) eşitliğini düzenlersek,

$$\frac{Kf^*\ G}{2m}-\frac{1}{\lambda_1}=\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i}$$

elde edilir. Lemma7.2.'de $r=n-2$ ve $a_i=\lambda_i$, $i=2,3,...,n-1$ olarak kabul edersek,

$$P_{n-2}=\lambda_2\lambda_3...\lambda_{n-1}=\prod_{i=2}^{n-1}\lambda_i$$

ve

$$P_{n-3}=\frac{\sum_{i=2}^{n-1}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq n-i+1}}^{n-1}\lambda_j}{n-2}=\frac{\prod_{j=2}^{n-1}\lambda_j}{n-2}\times\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i}=\frac{\prod_{j=2}^{n-1}\lambda_j}{n-2}\times\frac{1}{2m}\left[Kf^*\ G\ -\frac{2m}{\lambda_1}\right]$$

elde edilir.

Lemma 7.2.'deki eşitsizliğe göre, $P_{n-2}^{1/n-2}\geq P_{n-3}^{1/n-3}$ olduğundan yukarıda bulduklarımızı yerine yazarsak;

$$\left(\prod_{i=2}^{n-1}\lambda_i\right)^{n-3/n-2}\leq\frac{\prod_{j=2}^{n-1}\lambda_j}{n-2}\times\frac{1}{2m}\left[Kf^*\ G\ -\frac{2m}{\lambda_1}\right]$$

ve böylece

$$2m(n-2)\left(\prod_{i=2}^{n-1}\lambda_i\right)^{-1/n-2}\leq Kf^*\ G\ -\frac{2m}{\lambda_1}$$

elde edilir. Buradan

$$2m(n-2)\left(\prod_{i=2}^{n-1}\lambda_i\right)^{-1/n-2}+\frac{2m}{\lambda_1}\leq Kf^*\ G$$

alt sınırına ulaşılır. Üst sınır için öncelikle,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+...+\lambda_{n-1}+\lambda_n=n\ ,\ \lambda_n=0\quad,\quad\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2=n^2$$

$$iz(\mathrm{L}^2(G))=n+2\sum_{uv\in E}\frac{1}{d_ud_v}=n+2R_{-1}(G)$$

eşitliklerini hatırlayalım. Lemma 7.1.'deki eşitliği düzenlersek, $\dfrac{2mt}{\Delta}=\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i$ olduğu açıktır. Lemma 7.2. 'de $r=n-1$ ve $a_i=\lambda_i$, $i=1,2,...,n-1$ olarak kabul edersek,

$$P_2=\frac{1}{n-1\quad n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m-1}\lambda_i\lambda_j=\frac{1}{n-1\quad n-2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{\,2}\right)\right]$$

eşitliğini daha sade hale getirirsek

$$P_2=\frac{1}{n-1\quad n-2}\left[n^2-n-2R_{-1}\right]$$

olarak elde edilir ve

$$P_{n-2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n-i+1}}^{m-1}\lambda_i\lambda_j}{n-1}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\lambda_j}{n-1}\times\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i}$$

daha sade şekilde

$$P_{n-2}=\frac{2mt}{\Delta\ \ n-1}\times\frac{Kf^*(G)}{2m}$$

olarak elde edilir. Lemma7.2.'deki eşitsizlikten $P_2^{1/2}\geq P_{n-2}^{1/n-2}$, $P_2^{n-2/2}\geq P_{n-2}$ olduğunu biliyoruz. Yukarıda bulduğumuz P_2 ve P_{n-2} değerlerini bu eşitsizliklerde yerine yazarsak,

$$\frac{Kf^*(G)}{2m}\times\frac{2mt}{\Delta\ \ n-1}\leq\left[\frac{1}{n-1\quad n-2}\left[n^2-n-2R_{-1}\right]\right]^{n-2\ /2}$$

ve buradan

$$Kf^*(G)\leq\frac{\Delta\ \ n-1}{t}\left[\frac{1}{n-1\quad n-2}\left[n^2-n-2R_{-1}\right]\right]^{n-2\ /2}$$

olarak üst sınır elde edilir.

Bu sınırları, ağaçlar ve tek devir içeren graflar için uygularsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 7.1. T, n noktalı bir ağaç ve bu ağacın en büyük derecesi Δ olmak üzere, T ağacının derece Kirchhoff indeksi için

$$2m(n-2)\left(\frac{\lambda_1}{2m}\right)^{\frac{1}{n-2}}+\frac{2m}{\lambda_1}\leq Kf^*\ T\ \leq\Delta\ n-1\ \left(\frac{n^2-n+2\Re_{-1}(T)}{2(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Ağaçlar için $t=1$ olup Teorem 7.1 den sonuç açıktır.

Sonuç 7.2. U , n noktalı tek devir içeren bir graf olmak üzere bu grafın en büyük derecesi olarak Δ alınırsa tek devir içeren U grafının derece Kirchhoff indeksi için alt ve üst sınırlar

$$2m(n-2)\left(\frac{\lambda_1}{2mn}\right)^{\frac{1}{n-2}}+\frac{2m}{\lambda_1}\leq Kf^*\ U\ \leq\frac{\Delta\ n-1}{3}\left(\frac{n^2-n+2\Re_{-1}(U)}{2(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

şeklindedir.

İspat. Tek devir içeren graflar için $3\leq t\leq n$ olmak üzere Teorem 7.1 den ispat açıktır.

Lemma 7.3. Reel sayılar kümesinde tanımlı, $a_1, a_2, ..., a_n\geq 0$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ olacak şekildeki, $p_1, p_2, ..., p_n\geq 0$ ve $\lambda=\min\ p_1, p_2, ..., p_n$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n}p_ia_i-\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\geq n\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-\prod_{i=1}^{n}a_i^{1/n}\right)$$

eşitsizliği mevcuttur. Eşitlik şartı ancak ve ancak $a_1=a_2=...=a_n$ için geçerlidir.

Şimdi bu lemmadan yararlanarak derece Kirchhoff indeks için bir alt sınır bulalım.

Teorem7.2. G n noktalı, maksimum derecesi Δ, geren ağaç sayısı t olan bağlantılı bir graf olmak üzere bu grafın derece Kirchhoff indeksi için,

$$Kf^*\ G\ \geq\frac{n}{n-1}\ 2m\ +4m\ n-2\ \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{-1}{2\ n-2}}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2\ n-1\ n-2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lemma 7.3 deki eşitsizlikte $a_i=\lambda_i$, $i=1,2,...,n-1$ ve $p_1=\dfrac{1}{2\ n-1}$,

$p_i=\dfrac{2n-3}{2\ n-1\ \ n-2}$, $i=2,3,...,n-1$ olarak alınırsa, $\lambda=\min\ p_1, p_2, ..., p_n\ =p_1$ olup bu değerler

$$p_1a_1+\sum_{i=2}^{n-1}p_ia_i-a_1^{p_1}\times\prod_{i=1}^{n-1}a_i^{p_i}\geq (n-1)\,p_1\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_i-\prod_{i=1}^{n-1}a_i^{1/(n-1)}\right),$$

eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{\lambda_1}{2(n-1)}+\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\lambda_i\right)-(\lambda_1)^{\frac{1}{2(n-1)}}\left(\prod_{i=2}^{n-1}\lambda_i\right)^{\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i-\left(\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\right),$$

$$\frac{\lambda_1}{2(n-1)}+\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}\left(\frac{Kf^*(G)}{2m}-\lambda_1\right)-(\lambda_1)^{\frac{1}{2(n-1)}}\left(\frac{2mt}{\Delta\lambda_1}\right)^{\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}}\geq\frac{1}{2(n-1)}\frac{Kf^*(G)}{2m}-\frac{1}{2}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$\frac{2n-3}{4m(n-1)(n-2)}Kf^*(G)-\frac{\lambda_1}{2(n-2)}-(\lambda_1)^{\frac{-1}{2(n-2)}}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}}\geq\frac{1}{4m(n-1)}Kf^*(G)-\frac{1}{2}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$Kf^*(G)\left(\frac{2n-3}{4m(n-1)(n-2)}-\frac{1}{4m(n-1)}\right)\geq\frac{\lambda_1}{2(n-1)}-\frac{1}{2}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}+(\lambda_1)^{\frac{-1}{2(n-2)}}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}},$$

$$Kf^*(G)\left(\frac{1}{4m(n-2)}\right)\geq\frac{\lambda_1}{2(n-1)}-\frac{1}{2}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}+(\lambda_1)^{\frac{-1}{2(n-2)}}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}},$$

ve

$$Kf^*(G)\geq\lambda_1(2m)+4m(n-2)\left[(\lambda_1)^{\frac{-1}{2(n-2)}}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}}-\frac{1}{2}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]$$

olarak elde edilir. Normalize edilmiş Laplacian matrisin en büyük öz değeri için, $\lambda_1\geq\frac{n}{n-1}$ sağlandığından

$$Kf^*(G)\geq\frac{n}{n-1}(2m)+4m(n-2)\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{-1}{2(n-2)}}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)}}-\frac{1}{2}\left(\frac{2mt}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]$$

elde edilir.

G grafı özel olarak ağaç ve tek devir içeren graf seçilirse aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 7.3. T n noktalı bir ağaç ve bu ağacın en büyük derecesi Δ olmak üzere, T ağacının derece Kirchhoff indeksi için

$$Kf^{*}\ T\ \geq \frac{n}{n-1}\ 2m\ +4m\ n-2\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{-1}{2\ n-2}}\left(\frac{2m}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2\ n-1\ \ n-2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Ağaçlar için $t=1$ olup Teorem 7.2 den sonuç açıktır.

Sonuç 7.4. U , n noktalı tek devir içeren bir graf olmak üzere bu grafın en büyük derecesi olarak Δ alınırsa tek devir içeren U grafının derece Kirchhoff indeksi için aşağıdaki sınırı vardır.

$$Kf^{*}\ U\ \geq \frac{n}{n-1}\ 2m\ +4m\ n-2\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{-1}{2\ n-2}}\left(\frac{6m}{\Delta}\right)^{\frac{2n-3}{2\ n-1\ \ n-2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{2mn}{\Delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]$$

İspat. Tek devir içeren graflar için $3\leq t\leq n$ olup Teorem 7.2 den ispat açıktır.

KAYNAKLAR

1- Bao Y.H., Tan Y.Y. and Fan Y.Z., 2009, The Laplacian spread of unicyclic graphs, Applied Mathematics Letters, 22, 1011-1015..

2- Belmann R., Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill book Comp., New York, 1970.

3- Biggs N., 1993, Algebraic Graph Theory (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge

4- Biggs N., Lloyd E. and Wilson R., 1986, Graph Theory, 1736-1936, Oxford University Press.

5- Bozkurt Ş. B. and Bozkurt D., 2012, On the sum of powers of normalized Laplacian eigenvalues of graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 68, 917-930.

6- Brooks R., Smith C., Stone A. and Tutle W., 1940, Dissection of a rectangle into squares, Duke Math. J., 7, 312-340.

7- Brouwer A. and Haemers W., 2010, Spectra of Graphs, unpublished course notes, retrieved,Feb 1st, 2010, (http://homepages.cwi.nl/~ aeb/math/ipm.pdf).

8- Cavers M.S., 2010, On the normalized Laplacian energy and general Randić index of graphs, Linear Algebra and its Applications, 433, 172–190.

9- Chen H. and Zhang F., 2007, Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum, Discr. Appl. Math., 155, 654-661.

10- Chung F. R. K., 1997, Spectral Graph Theory, American Mathematical Society,Providence.

11- Collatz L. and Sinogawitz U., 1957, Spectren endlicher grafen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21, 63-77.

12- Cvetković D., Doob M. and Sachs H., 1980, Spectra of Graphs, Acedemic press, New York.

13- Cvetković D., Rowlinson P. and Simić S., 1980, Eigenspaces of Graphs, Academic Press, New York.

14- Cvetković D., Rowlinson P. and Simić S.K., 2010, Introduction to the theory of graph spectra, Cambridge University Press, Cambridge.

15- Das K. C., 2007, A sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph, Graphs Combin. 23 625-632.

16- Das K. C., 2013, On Kirchhoff index of graphs, Zeitscrift Fuer Naturforschung A, 68(a), 531-538.

17- Fan K., 1951, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continious operators, Proc. N.A.S., 37, 760-766.

18- Fan Y.Z., Xu J., Wang Y. and Liang D., 2008, The Laplacian spread of a tree, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 10:1, 79-86.

19- Godsil C. and Royle G., 2001, Algebraic Graph Theory, Springer, New York.

20- Huckel E., Quantentheoretische Beitrage zum Benzolproblem, Z. Phys., 70 (1931), 204-286.

21- Horn R. A. and Johnson C. R., 1985, Matrix Analysis,Cambridge Univ. Press, New York.

22- Johnson C.R., Kumar R. and Wolkowicz H., 1985, Lower bounds for the sprean of a matrix, Linear Algebra Applications, 71, 161-173.

23- Kaveh A., and Alinejad B., 2009, A general theorem for adjacency matrices of graph products and application in graph partition for parallel computing, Finite Element in Analysis and desing, 45, 161-173.

24- Kirchhoff G., 1847, Uber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer Ströme geführt wird, Ann. Phys. Chem., 72, 497-508.

25- Klein D. J. and Randic M., 1993 Resistance distance, J. Math. Chem., 12, 81-95.

26- Liu M. and Liu B., 2010, The signless Laplacian spread, Linear Algebra and its Applications, 432, 505-514.

27- Maden A. D. Çevik A. S. and Habibi N., 2012, New bounds for the spread of signless Laplacian spectrum, Mathematical Inequalities & Application-3165, Accepted.

28- Maden A. D. and Çevik A. S., 2012, A generalization for the clique and independence numbers. ELA, 164-170.

29- Mirsky L., The spread of matrix, 1956, Mathematika, 3, 127-130.

30- Motzkin T. and Strauss E. G., 1965, Maksima fof graphs and a new proof of atheorem Turàn, Canadian Journal of a Mathematics, 17, 533-540.

31- Nylen P. and Tam T. Y., 1994, On the spread of a hermitian matrix and conjecture of Thompson, Linear and Multilinear Algebra, 37, 3-11.

32- Thompson R. C., 1992, The eigenvalue spread of a hermitian matrix and is prencipal submatrices, Linear and Multilinear Algebra, 32, 327-333.

33- Weichsel P.M., 1962, Kronecker product of graphs, Proceedings of the American Mathematical Society, 13(1), 47-52.

34- Xiou W. and Gutman I., 2003, Resistance distance and Laplacian spectrum, Theoretical Chemistery Accounts, 110, 284-289.

35- Xiou W. and Gutman I., 2003, On resistance matrices, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 49, 67-81.

36- Zhai M., Shua J. and Honga Y., 2011, On the Laplacian spread of graphs, Applied Mathematics Letters, 24, 2097–2101.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Aydan Zeynep AYDIN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Tarsus 13.06.1989
Telefon	**:**	05433828220
Faks	**:**	
e-mail	**:**	ndy_ndy@windowslive.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**E.N.M Lisesi, Çukurova, Adana**	**2006**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2011**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2013**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
-	-	-

UZMANLIK ALANI
Matematik

YABANCI DİLLER
İngilizce, İtalyanca, Fransızca