# LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLI HALE GETİRİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA

**Ali BOZKURT**

**DOKTORA TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Konya, 2007**

**T. C.**
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLI HALE GETİRİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA**

**ALİ BOZKURT**

**DOKTORA TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Bu tez 28 / 09 / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir**

| | | |
|---|---|---|
| **Prof. Dr. Haydar BULGAK** | **Prof. Dr. Hasan TAŞELİ** | **Prof. Dr. Ali SİNAN** |
| **(Danışman)** | **(Üye)** | **(Üye)** |

| | |
|---|---|
| **Prof. Dr. Ülfet ATAV** | **Doç. Dr. Kemal AYDIN** |
| **(Üye)** | **(Üye)** |

# ÖZET

**Doktora Tezi**

**LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLI HALE GETİRİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA**

**Ali BOZKURT**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Ana Bilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Haydar BULGAK**

**2007, 58 Sayfa**

**Jüri: Prof. Dr. Haydar BULGAK**
**Prof. Dr. Hasan TAŞELİ**
**Prof. Dr. Ali SİNAN**
**Prof. Dr. Ülfet ATAV**
**Doç. Dr. Kemal AYDIN**

Bu tezde, literatürde m noktadan kontrol sistemi olarak adlandırılan

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n), \;\; n = 0,1,2,...$$

fark denklem sistemi için

$$n \to \infty, \quad \| x(n) \| \to 0$$

şartını sağlayan bir $u(n) = Kx(n), n = 0,1,2,...$ kontrol dizisinde $K$ matrisini varlığını araştıran varsa bu $K$ matrisini hesaplayan bir algoritma verilmiştir. Burada $A$, N boyutlu, karesel, reel bir $\mu^*$- regüler matris; $B$, N satır m sütunlu reel bir matris; $(A,B)$ $\rho$- kontrol edilebilir bir çift ve $\{x(n)\}, n = 0,1,2,...$ N boyutlu bir sütun vektör dizisidir. Bu doğrultuda, Sima 1981'de verilmiş olan algoritma esas alınarak bu algoritmanın adımlarına yeni yaklaşımlar getirilmiştir.

Ayrıca kontrol edilebilirlik ile kararlılık arasındaki ilişki verilmiştir. Bir matrisin $\mu^*$- regüler matris olup olmadığını araştıran bir algoritma ile verilen $(A,B)$ çiftinin $\rho$- kontrol edilebilir olup olmadığını araştıran bir algoritma verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Lineer fark denklem sistemleri, kararlılık, kontrol sistemi, kararlı hale getirilebilirlik, $\rho$-kontrol edilebilirlik, $\mu^*$- regüler matris

## ABSTRACT

**PhD Thesis**

**AN ALGORITM FOR STABILIZATION OF DIFFERENCE LINEAR EQUATION SYSTEMS**

**ALİ BOZKURT**

**Selçuk University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Haydar BULGAK**

**2007, 58 Page**

**Jury** : **Prof. Dr. Haydar BULGAK**
**Prof. Dr. Hasan TAŞELİ**
**Prof. Dr. Ali SİNAN**
**Prof. Dr. Ülfet ATAV**
**Doç. Dr. Kemal AYDIN**

In this thesis, the existence of a matrix $K$ in the control sequence $u(n) = Kx(n), n = 0,1,2,...$ and if exists, an algorithm for its calculation have been investigated, which appears in the system of difference equations

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),\ \ n = 0,1,2,...$$

known as the control system from m-points, subject to condition

$$\| x(n) \| \to 0 \quad as \quad n \to \infty$$

where $A$ is a real $\mu^*$- reguler square matrix of order N; $B$ is a Nxm real matrix; $(A, B)$ is a $\rho$-controllable pair, and $\{x(n)\}, n = 0,1,2,...$ denotes a sequence of columns vektors. In this regard, based on the algorithm presented by Sima (1981) new approaches were introduced.

In addition, the relation between controlability and stability have been given. An algorithm which investigates whether $\mu^*$-reguler matrix or not and algorithm which investigates whether the pair of $(A, B)$ is $\rho$-controllable or not have given.

**Key Words:** Linear difference equation system, stability, control system, stabilization, $\rho$-controlability, $\mu^*$-regular matrix

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER

w(A) : A matrisinin kararlılık parametresi

F : Bilgisayar sayılarının kümesi

|| A || : A matrisinin spektral normu

|| x || : x vektörünün Öklit normu

$w^*$ : Pratik asimtotik kararlılığı gösteren reel sayı

$\mu^*$ : Pratik regülerliğin parametresi

γ : Kullanılan bilgisayarın sayı tabanı (pozitif 1'den büyük bir sayı)

$\varepsilon_{-\infty}$ : F- formatın en küçük elemanı

$\varepsilon_0$ : Sıfıra yakın en küçük pozitif F'in elemanı

$\varepsilon_1$ : 1 den $\gamma$ sayısına kadar olan format sayılarının adım ölçüsü

$\varepsilon_\infty$ : F-formatın en büyük elemanı

$\lambda_{\min}(A)$ : A matrisinin en küçük öz değeri

$\Lambda(A)$ : A matrisinin öz değerlerinin kümesi

$A^T$ : A matrisinin transpozu

$A^{-1}$ : A matrisinin tersi

$A^*$ : A matrisinin eşlenik transpozu

MVC : Matrix Vektor Calculator

$\overline{a}$ : a karmaşık sayısının eşleniği

$Z^+$ : Z matrisinin sözde tersi ( $Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ise* $Z^+ = \begin{pmatrix} Z_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ )

$\overline{\Lambda}$ : $\Lambda$ karmaşık sayılar kümesinin elemanlarının eşleniğinin kümesi

# 1. GİRİŞ

Teknolojinin gelişmesi ve ilerlemesi ile birlikte kontrol sistemlerinin önemi giderek artmaya başlamıştır. Kontrol sistemlerinde, verilen bir problemi bir başlangıç noktasından alıp istenilen herhangi bir noktaya taşımak amaçlanmaktadır. **Başka bir ifadeyle kontrol sistemlerinin amacı, verilen problemin, seçilen bir kontrol değişkeni ile istenilen hedefe ulaşıp ulaşamayacağına karar vermektir.**

Kontrol sistemlerinin teknik ve matematiksel tarafları vardır. 1960'lı yıllara kadar kontrol sistemlerinin dizaynı ve analizinde Laplace dönüşümü, Z-dönüşümü gibi dönüşüm metotları kullanılıyordu. Ancak 1960'da İsviçreli matematikçi R. E. Kalman, **durum uzay metotlarına** (*state space methods*) girerek modern kontrol teorisinin temelini atmıştır (Elaydi 1996 sayfa 262). Böylece matrisler modern kontrol teorisinde yerini almıştır.

Bu çalışmada, kontrol sistemlerinin matematiksel boyutu üzerinde durulmuştur öyle ki $a_{ik}, b_{ij}, k,i = 1,2,...,N; j = 1,2,...,m$ reel sayılar ve $n = 0,1,2,...$ olmak üzere

$$x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + ... + a_{1N}x_N(n) + b_{11}u_1(n) + ... + b_{1m}u_m(n)$$
$$x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + ... + a_{2N}x_N(n) + b_{21}u_1(n) + ... + b_{2m}u_m(n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_N(n+1) = a_{N1}x_1(n) + a_{N2}x_2(n) + ... + a_{NN}x_N(n) + b_{N1}u_1(n) + ... + b_{Nm}u_m(n)$$

sabit katsayılı, homojen olmayan lineer fark denklem sistemini alalım. Burada $\{u_j(n)\}$'ler $j = 1,2,...,m;\ n = 0,1,2,...;$ kontrol dizileri ve $\{x_j(n)\}$'ler ise kontrol dizilerine bağlı, sistemin tepkileridir. Bu denklem sistemi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ .... & ... & ... & ... \\ b_{N1} & b_{N2} & ... & b_{Nm} \end{pmatrix},\ x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{pmatrix},\ n = 0,1,2,...$$

alınarak

$$x(n+1) = Ax(n) + u_1(n)b_1 + u_2(n)b_2 + ... + u_m(n)b_m$$
$$= Ax(n) + Bu(n), \; n = 0,1,2,... \qquad (1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{Nj} \end{pmatrix}, \; j = 1,2,...,m$$

vektörleri $B$ matrisini oluşturan sütun vektörlerdir. $B$ matrisinin sütun sayısı, sistemin kontrol noktalarının sayısını gösterir. Ayrıca

$$u(n) = \begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ \vdots \\ u_m(n) \end{pmatrix}, \; n = 0,1,2,...$$

m boyutlu bir sütun vektör dizisidir. Bu durumda sistemin m tane kontrol değişkeni (*m control variables*) vardır ve $\{u(n)\}, n = 0,1,2,...$ sistemin kontrol vektör dizisidir ( La Salle 1986, sayfa 97).

Literatürde (1.1) fark sistemleri **kontrol sistemleri** olarak bilinir ( Kwakernaak ve Sivan 1972, Barnett 1975, Elaydi 1996, sayfa 260).

**(1.1) kontrol sisteminde hedef ne olabilir?** Sorusunun cevabı için;

**a)** Bu problemde *(A,B)* kontrol edilebilir bir çift ve M$\geq$N ise $x(0)=\alpha$**'dan başlayıp M'inci (M>1) adımda verilen** $x(M)=\beta$ **vektöründe çözüm tamamlanabilir**. Bu konu 6. bölümde (Fark Denklem Sistemlerinin Kontrol Edilebilirliği) ele alınmıştır.

**b)** Verilen bir fonksiyoneli (bedel fonksiyon) minimum yapan bir kontrol hedeflenebilir. Örneğin

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mN} \end{pmatrix}$$

olmak üzere literatürde *geri besleme ( feedback )* kontrol elemanı olarak bilinen ( Barnett 1975, La Salle 1986, Elaydi 1996, Bir 2002 )

$$u(n) = Kx(n), \; n = 0,1,2,\dots. \tag{1.2}$$

kontrol elemanına bağlı olarak

$$\min_{\{u(n)\}} \sum_{n=0}^{\infty} ( \| x(n) \|^2 + \| u(n) \|^2 )$$

ifadesini hesaplayan bir kontrol hedeflenebilir.

**c)** (1.2)'de verilen geri besleme kontrol elemanı kullanılarak (1.1) sistemi

$$x(n+1) = (A + BK)x(n), \; n = 0,1,2,... \tag{1.3}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$n \to \infty \; , \; \| x(n) \| \to 0 \tag{1.4}$$

şartını sağlayacak bir $K$ matrisinin bulunması hedeflenebilir.

**Örnek 1.1.** $x(n+1) = 2x(n) + u(n) \, , \; n = 0,1,2,...$

$$y(n+1) = \frac{1}{2} y(n) + v(n)$$

denklem sistemini alalım.

**1)** $u(n) = -\frac{3}{2} x(n) \, , \; n = 0,1,2,...$

$v(n) = 0$

**2)** $u(n) = -\dfrac{5}{4}x(n), \;\; n = 0,1,2,...$

$v(n) = \dfrac{1}{3}y(n)$

**3)** $u(n) = -2x(n), \;\; n = 0,1,2,...$

$v(n) = \dfrac{1}{4}y(n)$

. . . . . . . . . . .

olacak şekilde istenildiği kadar çok $u(n)$ ve $v(n)$, $n = 0,1,2,...$ kontrol elemanları seçilerek sistem kararlı hale getirilebilir. Ancak (1.1) sistemi keyfi seçilen her bir $B$ matrisi için kararlı hale getirilemez. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

**Örnek 1.2.** $x(n+1) = 2x(n) + u(n), \; n = 0,1,2,...$

$$y(n+1) = 4y(n)$$

denklem sistemini alalım.

Verilen sistem hiçbir $\{u(n)\}, n = 0,1,2,...$ kontrol dizisi için kararlı hale getirilemez. Çünkü

$$y(n) = 4^n y(0), \; n = 0,1,2,...$$

dır ve $\{y(n)\}$ dizisine etki edecek herhangi bir kontrol elemanı yoktur.

**Tanım 1.1.** K, m satır N sütunlu bir matris olmak üzere eğer (1.1) sistemi için (1.4) şartını sağlayan bir $u(n) = Kx(n), \; n = 0,1,2,...$ kontrol dizisi varsa bu taktirde $(A, B)$ çiftine *kararlı hale getirilebilir (stabilizable) çift* denir (Elaydi 1996, sayfa 289).

1950'li yıllardan itibaren bilgisayarlar matematikteki aktif hesaplamalar için kullanılmaya başlandı. Bu durum determinant, rank, simetrik olmayan matrislerin öz değer hesaplamaları gibi konularda sağlıklı sonuçlar verememe problemini beraberinde getirdi. Bu sebeple regüler matris yerine $\mu^*$ - regüler kavramına ihtiyaç duyulmuştur (Örneğin bak. Aydın 1995, Bulgakov 1995, Bulgak A ve Bulgak H 2001).

Bu çalışmada, Sima (1981)'de verilen algoritma ele alınarak güncel kavramlara uygun hale getirilmeye çalışılmıştır. Algoritmada, problemin pratik sağlıklı olup olmadığını araştırmak ve problem pratik sağlıklı ise çözümü hesaplamak, aksi halde problemden vazgeçmek amaçlanmıştır. Bu amaca tam olarak ulaşılamamıştır, konu üzerindeki çalışmalara ileride çalışılmaya devam edilecektir.

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır.

- Giriş bölümünde problem genel hatlarıyla tanıtılmıştır.
- İkinci bölümde, problem ile ilgili literatür çalışması ve literatürde verilen bazı algoritmalar (Sima (1981) algoritması dahil) verilmiştir.
- Üçüncü bölümde fark denklem sistemlerinin Lyapunov'a göre kararlılığı ve Schur kararlılığı hatırlatılmıştır.
- Dördüncü bölümde, pratik regülerliğin şart sayısı kavramı hakkında literatür bilgisi verilmiştir. Verilen bir matrisin $\mu^*$-regüler olup olmadığını belirleyen ve $\mu^*$-regüler ise bu matrisin tersini hesaplayan bir algoritma hatırlatılmıştır.
- Beşinci bölümde, yedinci bölümde oluşturulacak algoritma için gerekli bazı teoremlere yer verilmiştir.
- Altıncı bölümde, fark denklem sistemlerinin $\rho$-kontrol edilebilirliği ($\rho > 0$), $\rho$-kontrol edilebilirlik algoritması ve $\rho$-kontrol edilebilirlik ile Schur kararlılık arasındaki ilişki ele alınmıştır.
- Son olarak yedinci bölümde ise lineer fark denklem sistemlerinin kararlı hale getirilmesi için Sima (1981) algoritmasının yeni bir versiyonu verilmiştir.

## 2. LİTERATÜR ÖZETİ

Fark denklem sistemlerinin geri besleme elemanı yardımı ile kararlı hale getirilmesi çalışmaları 19. yüzyılın başlarına dayanır. Ancak 1950'li yıllardan itibaren konu ile ilgili günümüze kadar gelen önemli çalışmalar yapılmıştır (Langenhop 1964, Kwakernaak ve Sivan 1972, Kleinman 1974, Barnett 1975, Sima 1981, La Salle 1986, Elaydi 1996, Son 2000, Kuo 2002).

Literatürde, (1.1) sisteminin kararlı hale getirilmesi için gerekli şartları ortaya koyan ve varsa (1.2) şartını sağlayan $K$ matrisini hesaplayan çeşitli çalışmalar algoritma tarzında düzenlenerek verilmiştir. Bu algoritmalardan farklı dört tanesini verelim.

### 1. Algoritma

**Armstrong (1975)** ve **Armstrong ve Rublein (1976)**, literatürde verilen temel bilgiler ışığında Lyapunov matris denklemlerinden yararlanarak teoremler verilmiştir. Sima 1981'de bu teoremler algoritma tarzında aşağıdaki gibi verilmiştir.

**Adım 0. (Giriş elemanları)** N boyutlu karesel, reel, regüler $A$ matrisi; N satır m sütunlu bir reel $B$ matrisi ve $\lambda^A$, $A$ matrisinin her bir öz değerini göstermek üzere

$$0 < \alpha < \min\{1, \min|\lambda^A|\}$$

aralığından seçilmiş bir $\alpha$ reel sayısı veriliyor.

**Adım 1.** $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çift ise adım 2'ye geçilir. Aksi taktirde adım 4'e geçilir.

**Adım 2.** $Z = Z^T > 0$ olacak şekilde

$$AZA^T = \alpha^2 Z + 2BB^T$$

eşitliğinden $Z$ matrisi bulunur. Adım 7.1'e gidilir.

**Adım 4.** $V$, N boyutlu ortogonal bir matris olmak üzere

$$\widetilde{A} = VAV^T = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}; \quad \widetilde{B} = V^T B = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri hesaplanır.

**Adım 5.** $(\widetilde{A}_{11}, \widetilde{B}_1)$ kontrol edilebilir bir çift ve $\widetilde{A}_{22}$ kararlı bir matris ise adım 6'ya geçilir, aksi taktirde adım 8'e geçilir.

**Adım 6.** $0 < \alpha < \min\{|\lambda^A| (\lambda \neq 0)\}$ aralığından herhangi bir α değeri seçilerek $Z = Z^* \geq 0$ olacak şekilde

$$AZA^T = \alpha^2 Z + 2BB^T$$

eşitliğinden Z matrisi bulunur. Adım 7.2'ye gidilir.

**Adım 7.1.** $K = -B^T (BB^T + Z)^{-1} A$ eşitliğinden $K$ matrisi hesaplanır.

**Adım 7.2.** $K = -B^T (BB^T + Z)^{+} A$ eşitliğinden $K$ matrisi hesaplanır.

**Adım 8.** (1.1) sistemini kararlı hale getiren bir $K$ matrisi bulunamaz.

## 2. Algoritma

**Barnett (1975)** ve **Elaydi (1996)**'da öz değerlerden yararlanılarak aşağıdaki algoritma verilmiştir.

**Adım 0. (Giriş elemanları)** $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çift olacak şekilde N boyutlu karesel $A$ matrisi; N satır m sütunlu $B$ matrisi ve $|\lambda_i| < 1,\ i = 1,2,...,N$ sayıları veriliyor.

**Adım 1.** $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_N \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$|A + BK - \lambda I| = 0$$

denklem sisteminden $K$ matrisi bulunur.

**3. Algoritma** ( $A$ matrisi 3x3 tipinde; $B$ matrisi 3x2 olarak alınmıştır.)

**La Salle (1986) ve Kuo (2002)**'de problemi çözmek için öz değerlerden yararlanarak aşağıdaki algoritma verilmiştir.

**Adım 0. (Giriş elemanları)** $A$ ve $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, matrisleri $|\mu_i|<1,\ i=1,2,3$ şartını sağlayan karmaşık sayılar veriliyor öyle ki $\mu_1$ reel sayı ve $\mu_2=\overline{\mu}_3$ olmalıdır.

**Adım 1.** Eğer $b_1$, $Ab_1$ *ve* $A^2b_1$ vektörleri lineer bağımsız ise buradan $u_2 = 0$ ve $b_1$, $Ab_1$ ve $A^2b_1$ vektörleri lineer bağımsız iseler adım 2'ye geçilir (eğer gerekirse $b_1$ ve $b_2$ vektörleri yer değiştirebilir). Aksi taktirde adım 3'e geçilir.

**Adım 2.** $K=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$|A+BK-\lambda I|=0$$

denklem sisteminden $K$ matrisi bulunur.

**Adım 3.** $b_1$, $Ab_1$ ve $b_2$ vektörleri lineer bağımsız iseler $P=\begin{pmatrix} b_1 & Ab_1 & b_2 \end{pmatrix}$ matrisi alınarak

$$x(n)=P\widetilde{x}(n),\ n=0,1,2,...$$

dönüşümü yapılır.

**Adım 4.** $$\widetilde{x}(n+1)=\widetilde{A}\widetilde{x}(n)+P^{-1}b_1u_1(n)+P^{-1}b_2u_2(n)$$

hesaplanır. Burada

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_0 & \alpha_1 \\ 1 & a_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix},\qquad P^{-1}b_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad P^{-1}b_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dır.

**Adım 5.** $u_2(n)=\widetilde{k}_3\widetilde{x}_3(n)$ , $u_1(n)=\widetilde{k}_1\widetilde{x}_1(n)+\widetilde{k}_2\widetilde{x}_2(n)$ seçilir.

**Adım 6.** $\widetilde{x}(n+1)=(\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{K})\widetilde{x}(n)$ ve buradan $\widetilde{x}=\hat{A}\widetilde{x}(n)$ olsun.

**Adım 7.** $$\hat{A}=\begin{pmatrix} \widetilde{k}_1 & a_0+\widetilde{k}_2 & \alpha_1 \\ 1 & a_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3+\widetilde{k}_3 \end{pmatrix}$$

matrisinin karakteristik denklemi

$$\phi(\lambda)=(\lambda-\alpha_3-\widetilde{k}_3)(\lambda^2-(a_1+\widetilde{k}_1)\lambda+a_1\widetilde{k}_1-a_0-\widetilde{k}_2)$$

dir. Bu durumda $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ ve $\widetilde{k}_3$ sayıları matrisin öz değerleri $|\lambda_i|<1,\ i=1,2,3$ olacak şekilde seçilir.

**Adım 8.** $b_1$ ve $Ab_1$ lineer bağımsız ise adım9'a geçilir aksi taktirde adım12'ye geçilir.

**Adım 9.** $A^2 b_1 = a_0 b_1 + a_1 A b_1$ ve $b_2 = \beta_0 b_1 + \beta_1 A b_1$ olsun. $P = \begin{pmatrix} b_1 & Ab_1 & v_1 \end{pmatrix}$ ($P$, regüler matris) alınır ve $x = P\widetilde{x}$ dönüşümü yapılır.

$$Av_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 Ab_1 + \alpha_3 v_1$$

eşitliğinden $\alpha_1$, $\alpha_2$ ve $\alpha_3$ değerleri hesaplanır.

**Adım 10.**

$$\widetilde{x}_1(n+1) = a_0 \widetilde{x}_2(n) + \alpha_1 \widetilde{x}_3(n) + u_1 + \beta_0 u_2$$

$$\widetilde{x}_2(n+1) = \widetilde{x}_1(n) + a_1 \widetilde{x}_2(n) + \alpha_1 \widetilde{x}_3(n) + \beta_1 u_2$$

$$\widetilde{x}_3(n+1) = \alpha_3 \widetilde{x}_3(n)$$

sistemi yazılır. Burada $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ kontrol edilebilir değişkenler, $\widetilde{x}_3$ kontrol edilemeyen değişkendir.

**Adım 11.** Eğer $|\alpha_3| < 1$ ise sistem kararlı hale getirilebilen bir sistemdir. Aksi taktirde sistem kararlı hale getirilemez.

**Adım 12.** $b_1 \neq 0$, $Ab_1 = a_0 b_1$, $b_2 = \beta_0 b_1$ ise sadece bir kontrol değişkeni vardır. $b_1, v_1, v_2$ bir baz olacak şekilde $v_1$ ve $v_2$ sütun vektörlerini seçilir.

**Adım 13.** $P = \begin{pmatrix} b_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ regüler matris olmak üzere

$$Ab_1 = a_0 b_1$$

$$Av_1 = \alpha_{12} b_1 + \alpha_{22} v_1 + \alpha_{32} v_2$$

$$Av_2 = \alpha_{13} b_1 + \alpha_{23} v_1 + \alpha_{33} v_2$$

şartları altında $x = P\widetilde{x}$ dönüşümü yapılarak aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\widetilde{x}(n+1) = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \widetilde{x}(n) + \begin{pmatrix} 1 & \beta_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(n)$$

**Adım 14**. Eğer $\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ kararlı ise $A + BK$ kararlı hale getirilebilen bir matristir.

## 4. Algoritma

**Elaydi (1996)**'da problemi çözmek için öz değerlerden yararlanarak bir algoritma verilmiştir.

**Adım 0. (Giriş elemanları)** $A$, N boyutlu karesel matris; $B$, N boyutlu sütun vektör ve $\Lambda = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N\} = \overline{\Lambda}$ , $|\mu_1| < 1$, $i = 1,2,...,N$ karmaşık sayıları veriliyor.

**Adım 1.** $W = \begin{pmatrix} B & AB & ... & A^{N-1}B \end{pmatrix}$ matrisi hesaplanır.

**Adım 2.** $rank\, W = N$ ise adım 3'e geçilir. Aksi taktirde adım 9'a geçilir.

**Adım 3.** $a_1, a_2, ... , a_N$ 'ler ($A$ matrisinin karakteristik denkleminden yani

$$K(\lambda) = \lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + ... + a_N$$

ifadesinden) hesaplanır.

**Adım 4.** $q_1, q_2 , ... ,q_N$ sayıları ( $\prod_{i=1}^{N}(\lambda - \mu_i) = \lambda^N + q_1\lambda^N + ... + q_N$ ifadesinden) hesaplanır.

**Adım 5.** $M = \begin{pmatrix} a_{N-1} & a_{N-2} & ... & a_1 & 1 \\ a_{N-2} & a_{N-3} & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi hesaplanır.

**Adım 6.** $T = WM$ hesaplanır ve $T^{-1}$ bulunur.

**Adım 7.** $k = (q_N - a_N, q_{N-1} - a_{N-1}, ..., q_1 - a_1)$ vektörü hesaplanır.

**Adım 8.** $K = -k\, T^{-1}$ hesaplanır.

**Adım 9.** $W$ 'nin lineer bağımsız sütunları N'ye tamamlanarak $U$ matrisi bulunur.

**Adım 10.** $x(n) = Uy(n)$ dönüşümü yapılır.

**Adım 11.** $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, $\overline{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

hesaplanır.

**Adım 12.** $A_{11}$, $k$ ($k < N$) boyutlu karesel matris; $B_1$, k boyutlu sütun vektör olmak üzere $(A_{11}, B_1)$ için $rank\begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & ... & A_{11}^{k-1}B \end{pmatrix} = k$ ise ve $A_{22}$ kararlı bir matris ise sistem kararlı hale getirilebilirdir. Aksi taktirde sistem kararlı hale getirilemez.

# 3. LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

## 3.1. Lyapunov'a Göre Fark Kararlılık

$A$, N boyutlu karesel, reel bir matris; $a$, N boyutlu reel bir vektör ve $m \in Z$ olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n),\ n = m, m+1, \ldots \qquad (3.1)$$
$$x(m) = a$$

Cauchy problemini alalım. Bu problemin çözümü vardır ve tektir (Elaydi 1996).

**Tanım 3.1.1.** (3.1) sistemini alalım. $b$, N boyutlu reel bir vektör olmak üzere

$$y(n+1) = Ay(n),\ n = m, m+1, \ldots \qquad (3.2)$$
$$y(m) = b$$

sistemi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için (3.2) sisteminin çözümü $y(n)$ olmak üzere

$$\| b - a \| < \delta$$
$$\| y(n) - x(n) \| < \varepsilon,\ n = \mathrm{m}, \mathrm{m}+1, \ldots$$

eşitsizliği en az bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı durumunda sağlanırsa bu durumda (3.1) sisteminin *x(n)* çözümüne, *Lyapunov'a göre fark kararlıdır,* denir. Ayrıca bu durumda *A* matrisine de Lyapunov'a göre fark kararlı matris denir (Elaydi 1996 sayfa 206, Akın ve Bulgak 1998 sayfa 106). Bu duruma iki basit örnek verelim.

**Örnek 3.1.1.** $x(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(n),\ n = 0,1,2,\ldots;\quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

birinci mertebeden lineer homojen fark denklem sisteminin "0" çözümünün kararlılığını inceleyelim.

Verilen homojen fark denklem sisteminin çözümü;

$$x(n) = A^n x(0) = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

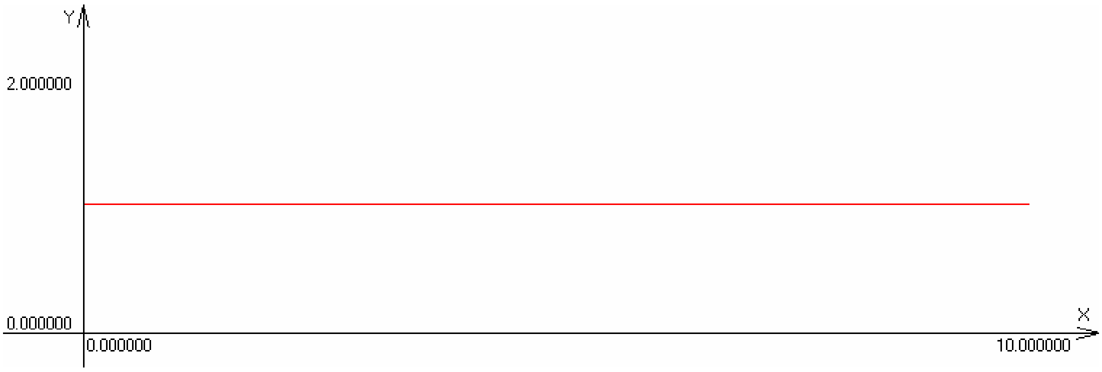
şeklindedir. Burada her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|x(0)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right\| < \delta$$

şartını sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı bulunur öyle ki; $x(n)$ çözümü için

$$\|x(n)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \ \mathrm{n} = 0,1,2,\ldots$$

sağlandığından sistemin $x(n) \equiv 0,\ n = 0,1,2,...$ çözümü Lyapunov'a göre fark kararlı olur. Sistemin çözümünün normunun Prof. Dr. Haydar Bulgak ve Dilaver Eminov tarafından hazırlanan Cauchy Solver bilgisayar yazılımı yardımı ile çizilmiş grafiği şekil 3.1 verilmiştir.




şekil - 3.1

**Örnek 3.1.2.** $x(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(n),\ n = 0,1,2,...;\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

birinci mertebeden lineer homojen fark denklem sisteminin "0" çözümünün kararlılığını inceleyelim.

Verilen homojen fark denklem sisteminin çözümü

$$x(n) = A^n x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) + n\,x_2(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

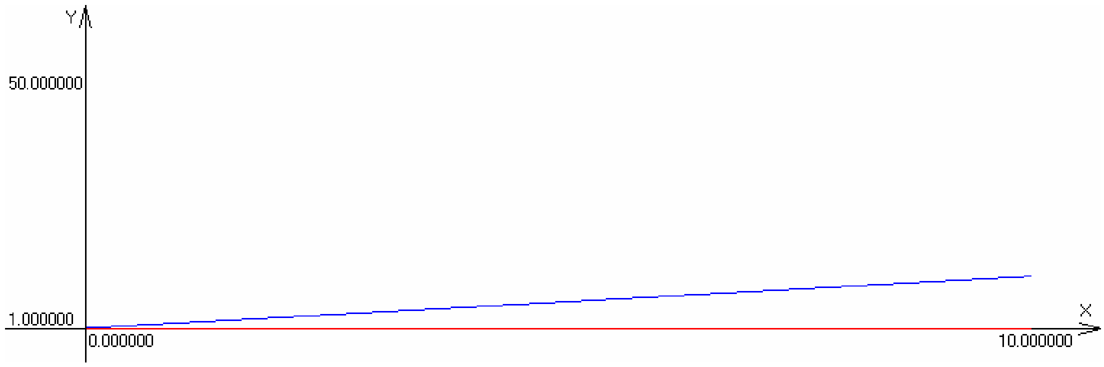
şeklindedir. Burada her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|x(0)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right\| < \delta$$

şartını sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı bulunur öyle ki; $x(n)$ çözümü için

$$\| x(n) \| = \left\| \begin{pmatrix} x_1(0) + n\,x_2(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon,\ n = 0,1,2,...$$

sağlanamadığından sistemin $x(n) \equiv 0,\ n = 0,12,...$ çözümü Lyapunov'a göre fark kararlı olmaz. Sistemin çözümünün normunun Cauchy Solver bilgisayar yazılımı yardımı ile çizilmiş grafiği şekil 3.2 gibidir.




Şekil - 3.2

Bilindiği gibi $A$ matrisinin öz değerleri birim çemberin üzerinde veya içinde ise bu durumda $A$ matrisine Lyapunov'a göre fark kararlı matris denir (Akın ve Bulgak 1998, sayfa 108).

Açıktır ki $A$ Lyapunov'a göre fark kararlı bir matris ise $A^*$ da Lyapunov'a göre fark kararlıdır.

### 3.2. Lyapunov'a Göre Fark Asimtotik Kararlılık ( Schur Kararlılık )

**Tanım 3.2.1.** Eğer (3.1) başlangıç-değer probleminin *x(n)* çözümü için

a) *x(n)*, Lyapunov'a göre fark kararlı

b) $y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin bütün çözümleri için

$$n \to \infty, \quad ||x(n) - y(n)|| \to 0$$

şartları sağlanırsa bu takdirde (3.1) sisteminin *x(n)* çözümüne **Lyapunov'a göre fark asimtotik kararlıdır,** denir. Ayrıca bu durumda *A* matrisine de **Lyapunov'a göre fark asimtotik kararlıdır,** denir. (Elaydi 1996 sayfa 206, Akın ve Bulgak 1998, sayfa 107)

**Uyarı 3.2.1.** $x(n+1) = Ax(n)$ sistemi için

a) Sistemin $x(n) \equiv 0$ aşikar çözümü Lyapunov'a göre fark kararlı,

*b)* $n \to \infty$ iken $\| x(n) \| \to 0$

ise (3.1) sisteminin $a = 0$ için $x(n) \equiv 0$ çözümü Lyapunov'a göre fark asimtotik kararlı olur.

**Örnek 3.2.1.** $x(n+1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} x(n),\ n = 0,1,2,...;\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

lineer homojen fark denklem sisteminin Lyapunov'a göre asimtotik kararlılığını inceleyelim.

Fark denklem sisteminin çözümü

$$x(n) = \begin{pmatrix} (0.5)^n & n(0.5)^{n-1} \\ 0 & (0.5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1(0) + 2nx_2(0))(0.5)^n \\ x_2(0)(0.5)^n \end{pmatrix}$$

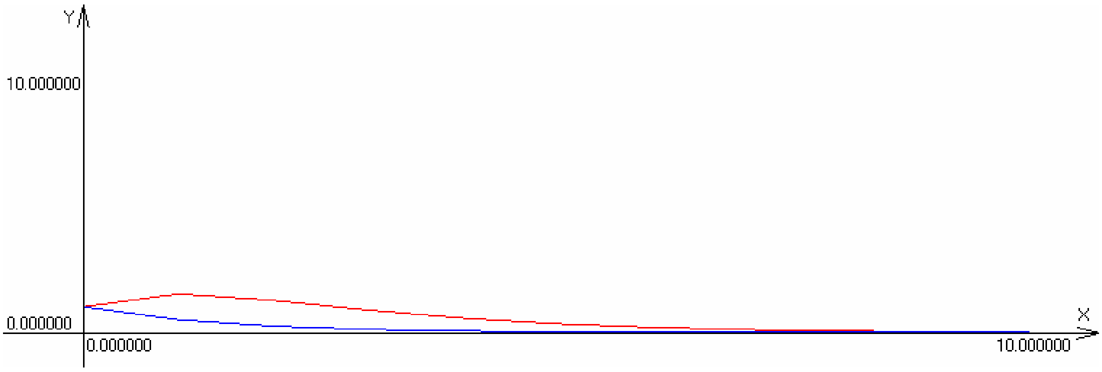
şeklinde elde edilir. Her ε > 0 sayısı için bir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(0.5)^n(1+2n)}$ sayısı buluruz ki;

$$\|x(0)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right\| < \delta$$

şartını sağlayan $x(n)$ çözümü için

$$\|x(n)\| \le \|A^n\| \|x(0)\| \le \left\| \begin{pmatrix} (0.5)^n & n(0.5)^{n-1} \\ 0 & (0.5)^n \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right\|$$
$$< (0.5)^n (1+2n)\delta < \varepsilon, \quad n > 0$$

sağlanır. Bu sistemin çözümünün normunun Cauchy Solver bilgisayar yazılımı yardımı ile çizilmiş grafiği şekil 3.3 ile verilmiştir.




Şekil -3.3

**Tanım 3.2.2.** *C*, N boyutlu, karesel, simetrik matris; *x*, N boyutlu reel bir vektör olmak üzere, eğer ∀x ≠0 için $(Cx, x) > 0$ ise *C* matrisine **pozitif tanımlı matris** denir.

$(Cx, x) \ge 0$ ise *C* matrisine **yarı pozitif tanımlı matris** denir (Bronson 1989).

$C = C^*$ matrisinin pozitif tanımlı bir matris olması için gerek ve yeter şart öz değerlerinin pozitif olmasıdır ( örneğin bak. Lutkepohl 1996 sayfa 133)

**Teorem 3.2.2. ( Lyapunov Teoremi )** Verilen bir N boyutlu karesel *A* matrisinin Lyapunov'a göre fark asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^* HA - H + C = 0, \quad C = C^* > 0 \tag{3.3}$$

Lyapunov matris denkleminin pozitif tanımlı simetrik bir $H = H^* > 0$ çözümünün var olmasıdır. (örneğin bak. Akın ve Bulgak 1998, sayfa 114)

*Lyapunov fark asimtotik kararlı* ifadesi yerine *Schur kararlı* ifadesi de kullanılır. (Rohn 1994, Voicu 2006, s. 300).

Ayrıca, Schur kararlı matris ifadesi yerine, Armstrong ve Rublein (1976, sayfa 629-630) makalesinde *discrete anlamda kararlı matris* ( stability matrix in the discrete sense ) ifadesini kullanmıştır.

**Örnek 3.2.2.** Örnek 3.2.1'de verilen fark denklem sisteminin kararlılığını Lyapunov teoremini kullanarak inceleyelim.

$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A^* HA - H + I = 0$ matris denkleminde

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

matrislerini yerine yazarsak

$$H = H^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{116}{27} \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, $H$ matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = 4.542$ ve $\lambda_2 = 1.087$'dir. Bu durumda $H$ matrisi de pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $A$ matrisi de Schur kararlıdır.

Açıktır ki $A$ Schur kararlı bir matris ise $A^*$ da Schur kararlıdır.

### 3.3. Lineer Fark Kararlılığın Şart Sayısı

$A$, N boyutlu bir karesel matris olmak üzere Bulgakov ve Godunov (1988)'de $A$ matrisinin spektrumunun circular dichotomy (spektrumun çembersel ayrılması) parametresini tanıtmışlardır. Schur problemi için bu parametrenin özel hali Bulgakov (1995)'te $w(A)$ parametresi olarak kullanılmıştır. Şöyle ki; $I$, N boyutlu birim matris olmak üzere

$$A^* HA - H + I = 0$$

denklemini sağlayan bir $H = H^* > 0$ pozitif tanımlı matrisi varsa $A$ matrisinin Schur kararlılık parametresi

$$\|H\| = w(A) \qquad (3.4)$$

dir. Eğer sistem Schur kararlı değil ise $w(A) = \infty$ dur. Burada $w(A)$ sayısı (3.1) sisteminin kararlılığının şart sayısıdır.

**Özellik 3.3.1.** (3.4)'te $w(A) < \infty$ ise bu durumda (3.1) sistemi *fark asimtotik kararlı bir sistemdir*, aksi takdirde ise *fark asimtotik kararlı olmayan bir sistemdir.* (Bulgakov 1995)

Verilen bir fark sisteminin asimtotik kararlılığının kalitesinin belirlenmesi gerekir. Bu çerçevede aşağıdaki tanımı verelim.

**Tanım 3.3.1.** Eğer verilen bir $w^* > 1$ sayısı için (3.4)'te $w(A) < w^*$ ise o takdirde (3.1) sistemine *pratik fark asimtotik kararlı (*$w^*$*-kararlı*), aksi takdirde (3.1) sistemine *pratik fark asimtotik kararlı değildir (*$w^*$ *- kararsızdır)* denir.( Godunov ve Bulgakov 1988, Aydın 1995 sayfa 52, Akın ve Bulgak 1998 sayfa 156 )

Bu tanımdan pratik fark kararlı olan sistemin fark kararlı olduğu açıktır. Fakat fark kararlı olan bir sistem pratik fark kararlı olmayabilir.

**Teorem 3.3.1.** Eğer $A$, Schur kararlı bir matris ise keyfi bir $C = C^* > 0$ matrisi için

$$A^* XA - X = -C$$

denkleminin çözümü var, tek ve

$$\| X \| < \| C \| \cdot w(A)$$

eşitsizliğini sağlar (Akın ve Bulgak 1998 s.167-168 ).

**Teorem 3.3.2.** $A$, Schur kararlı bir matris; $\| A \| < 1$ ve $I$ birim matris olmak üzere

$$A^* HA - H = -I$$

denkleminin çözümü vardır, tektir ve $H = H^* > 0$ dır. Buradan $w(A) = \| H \|$ olmak üzere

$$w(A) = \frac{1}{1 - \| A \|^2}$$

dir. (Akın ve Bulgak 1998 sayfa 168).

**Uyarı 3.3.1.** Teorem 3.3.1 ve teorem 3.3.2'ye göre

$$\| X \| \leq \| C \| \cdot \frac{1}{1 - \| A \|^2}$$

olduğu açıktır. Bu bilgilere dayanarak eğer $\| \alpha A^{-1} \| < 1$ ise bu taktirde

$$(\alpha A^{-1})^* H (\alpha A^{-1}) - H = -C \tag{3.5}$$

Lyapunov fark denklemini sağlayan bir $H = H^* > 0$ matrisi vardır ve

$$\| H \| \leq \|C\| \cdot \frac{1}{1 - \|\alpha A^{-1}\|^2} \tag{3.6}$$

dir.

# 4. BİR MATRİSİN REGÜLERLİĞİNİN ŞART SAYISI

## 4.1. Format

Bir problem çözülürken bilgisayar kilitlenebilir. Literatürde verilen problemin, bilgisayarın kilitlenmesini önleyerek, çözülebilmesini gündeme getiren çalışmalara rastlamak mümkündür. Bu çerçevede bazı problemler için başarılı yöntemler verilmiştir (John Von Neumann 1947, Wilkinsonn 1965, Godunov 1993).

Bilgisayarlar sayısal hesaplamaları yaparken en küçük ve en büyük elemanı olan rasyonel sayıların sonlu bir küme ile çalışmaktadır. Bu durum vazgeçilmez yuvarlama hataları getirir.

Format ile ilgili literatürde verilen bazı temel bilgileri verelim (Akın ve Bulgak 1998; Aydın, Bulgak A. ve Bulgak H. 2003).

Rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesini alalım. Bu kümeyi $\gamma$, $p_-$, $p_+$, $k$ parametreleriyle tanımlayalım. Burada $\gamma$, taban (pozitif 1'den büyük bir sayı); $p_-$, negatif tamsayı; $p_+$ ve $k$ ise pozitif tamsayılardır. Bu küme

$$F = F(\gamma, p_-, p_+, k) = \{0\} \cup \{z : z = \mp \gamma^{p(z)} m(z)\},$$

$$m(z) = \frac{a_1}{\gamma} + \frac{a_2}{\gamma^2} + \frac{a_3}{\gamma^3} + \dots + \frac{a_k}{\gamma^k},$$

$$a_1 \neq 0; \quad 0 \leq a_j \leq \gamma - 1, \quad j = 2, \dots, k; \quad p_- \leq p(z) \leq p_+$$

şeklinde yazılabilir. $F = F(\gamma, p_-, p_+, k)$ kümesine **format** denir.

Format kümesi $\gamma$, $p_-$, $p_+$, $k$ parametreleri yerine $\varepsilon_{-\infty}$, $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_\infty$ parametrelerine bağlı olarak da tanımlanabilir. Burada $\varepsilon_{-\infty}$, formatın en küçük elemanı; $\varepsilon_0$, sıfıra yakın en küçük pozitif sayı; $\varepsilon_1$, 1'den $\gamma$ sayısına kadar olan format sayılarının adım ölçüsü; $\varepsilon_\infty$ ise formatın en büyük elemanıdır.

Formatta $(-\infty, \varepsilon_{-\infty})$, $(0, \varepsilon_0)$ ve $(1, 1+\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_\infty, \infty)$ aralığında başka bir format sayısı yoktur.

### 4.2. Bir Matrisin Regülerliğinin Şart Sayısı

Verilen regüler N boyutlu karesel bir $A$ matrisi, elemanlarındaki küçük bir değişme ile regüler olmayan hale dönüşebilir. Bu yüzden $Ax = b$ lineer denklem sisteminin tek çözüme sahip olması için yeni kriterler ortaya konmaktadır. Bu kriterler arasında en çok kullanılan $\mu(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|$ sayısıdır. Bu sayıya $A$ matrisinin **şart sayısı** denir (Golub ve Van Loan 1983).

Bir karesel ve reel $A$ matrisinin formatta regüler olup olmadığını incelemek için $\mu(A)$ şart sayısına ihtiyaç vardır.

$\sigma_1(A)$, $\sigma_N(A)$ regüler $A$ matrisinin en küçük ve en büyük singüler değerleri olmak üzere $\mu(A) = \dfrac{\sigma_N(A)}{\sigma_1(A)}$ dır. $\sigma_1(A) = 0$ durumunda $\mu(A) = \infty$ olarak kabul edilir ve $A$ matrisi regüler olmayan bir matris olur. $\sigma_1(A) > 0$ olduğunda $\mu(A) < \infty$ olur ve $A$ matrisi regüler matris olur.

$\varepsilon_1$, format sayılarının adım ölçüsü ve N ise $A$ matrisinin boyutu olmak üzere $\mu^* = \dfrac{1}{4\varepsilon_1\sqrt{N}}$ alalım. Bu taktirde sıfırdan yeterince uzak olan matrisler için $\mu(A) < \mu^*$ ise bu taktirde Formata yerleşim hatalarını göz önüne alarak yapılan yerleştirme sırasında matris regüler matrisler kısmında kalır. Literatürde $\mu^* \geq 1$ sayısı pratik regülerliğin şart sayısı olarak adlandırılır (Aydın 1995, Bulgak A ve Bulgak H 2001).

Şimdi verilen $A$ matrisinin $\mu^*$-regüler olup olmadığını araştıran ve var ise $A$ matrisinin tersini hesaplayan bir algoritma verelim.

Bu çalışmadaki algoritmalarda verilen adımların sayısal olarak hesaplanması için Dilaver Eminov ve Prof. Dr. Haydar Bulgak tarafından hazırlanan MVC (Matrix Vektor Calculator) bilgisayar yazılımı kullanılmıştır. MVC bilgisayar yazılımının nasıl kullanılacağı her adımdan sonra kutucuklar içinde verilmiştir.

### 4.2.1. Algoritma

**Adım 0. ( Giriş elemanları )** N ve m doğal sayılar olmak üzere;

- N boyutlu, karesel, reel ***A*** matrisi
- $\mu^*$ pratik regülerliğin parametresi ( $\mu^* \geq 1$)
- ***F*** - format elemanları

verilsin.

**Hedef:** $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in F, (i, j = 1,2,...,N)$ olmak üzere $A$ matrisinin $\mu^*$ - regüler olup olmadığını araştırmak ve $\mu^*$ - regüler ise *A* matrisinin tersini bulmaktır.

**Adım 1.** *A* matrisi iki köşegen matris haline getirilir.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & & & \\ & a_2 & b_3 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & a_{N-1} & b_N \\ & & & & a_N \end{pmatrix}$$

| |
|---|
| **1.1.** Bir dikdörtgen matrisi **ddm** fonksiyonu ile sözde iki köşegen matrisi şekline dönüştürülür.<br>**ddm( Matrix A, Vektör D, Vektör B)**<br>**Giriş Parametreleri**<br>**A**: Matrix, Verilen A matrisi<br>**Çıkış Parametreleri**<br>**D:** Vektör, D1, D2, …DN sayıları iki köşegen simetrik matrisin ana köşegeninin elemanlarını verir.<br>**B**: Vektör, B2, B3, … ,BN sayıları iki köşegen simetrik matrisin yan köşegeninin elemanlarını verir.(B1=0) |

**1.2.** İki köşegen matrisin sözde singüler değerleri veya seçilen numaralara karşılık gelen sözde singüler değerleri **sval** fonksiyonu ile hesaplar.

**sval (Vektor D, Vektor B, Vektör LM, Vektor Ind)**

**Giriş Parametreleri**

**D** ve **B** matrisleri 1.1' de elde edilen matrisler

**Ind**: Vektör, istenilen singüler değerlerin numarasını tanımlar

**Çıkış Parametreleri**

Δ: singüler değerlerin hesaplama hatası

**LM**: Vektör, $\hat{\sigma}_1$, j = 1,2, … , N verilen Y matrisinin 1.5Δ hatayla hesaplanan öz değerleri LM[0]= $\hat{\sigma}_1$; …; LM[N-1]= $\hat{\sigma}_N$ olacak şekilde verir.

**Adım 2.** $\sigma_1(\widetilde{A})$ ve $\sigma_N(\widetilde{A})$ değerleri hesaplanır. ($\widetilde{A}$ matrisinin en küçük ve en büyük singüler değerleri hasaplanır.)

**Adım 3.** $\sigma_1(\widetilde{A})\cdot\mu^* > \sigma_N(\widetilde{A})$ ise $A$ matrisi $\mu^*$- regülerdir bu durumda adım 4'e geçilir. Aksi taktirde $\mu^*$- regüler bir matris değildir.

**Adım 4.** $A$ matrisinin tersi hesaplanır.

**inverse** fonksiyonuyla A matrisinin tersi varsa hesaplanır.

**inverse(double Mstar, matrix A, matrix Ain, double E)**

**Giriş parametreleri:**
double Mstar: $\mu^*$ pratik regülerliğin parametresi ($\mu^* \geq 1$)
matrix A : verilen A matrisi

**Çıkış parametreleri:**
matrix Ain : eğer fonksiyon true ile dönüyorsa istenilen matrisi içerir.
double E : hata oranı

**Örnek 4.2.1.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\mu^* = 10^5$ alarak A matrisinin $\mu^*$- regüler olup olmadığını $\mu^*$- regüler ise $A^{-1}$ matrisini hesaplamayı MVC yazılımı ve 4.2.1 algoritması yardımı ile verelim. Burada Ain $A^{-1}$ matrisini göstermektedir.

```
  2,  1
A = 0, 0.5
ddm(A,$D,$B)
Function ddm result = 9.768e-14
B = ( 3.32233e+257, -1 )
D = ( -2, 0.5 )
sval(D,B,LM)
Function sval result = 1.5e-280
LM = ( 0.444903, 2.24768 )
Mstar=100000
Mstar = 100000
0.444903*100000>2.24768
```

A matrisi $\mu^*$ - regülerdir

```
inverse(100000,A,Ain,E)
Function invers result = true
E = 4.44089e-16
      0.5, -1
Ain =   0,  2
```

# 5. MATRİSLER İLE İLGİLİ BAZI TEOREMLER

Bu bölümde 7. bölümde oluşturulan algoritma için gerekli olan matrislerle ilgili bazı bilgiler ile teoremler verilmiştir.

SVD ayrışımı ( Singular Value Decomposition) literatürde iyi bilinmektedir (Golub ve Van Loan 1983, Bulgak A ve Bulgak H 2001)

**Teorem 5.1.** N < m olmak üzere herhangi bir N satır m sütunlu $W$ matrisi için $Q$ ve $P$ ortogonal matrisler olmak üzere $W = Q^{*}\Sigma P^{*}$ biçiminde yazılabilir. Bu biçimdeki gösterime $W$ matrisinin singüler değer ayrışımı denir (Golub ve Van Loan 1983).

Burada

$$\sigma_1(W),\ \sigma_2(W), \ldots,\ \sigma_N(W)$$

ler $W$ matrisinin singüler değerleridir.

Teoremin ispatı ve N=m ile N>m olması durumunda singüler değer ayrışımı için Bulgak (2001)'e bakılabilir.

**Örnek 5.1.** $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ matrisinin singüler değerlerini bulalım.

$$W \cdot W^{*} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan W matrisinin singüler değerleri $\sigma_1(W) = 0$ ve $\sigma_2(W) = \sqrt{70}$ tir.

**Yardımcı Teorem 5.1.** N ve m pozitif doğal sayılar; $H$, N boyutlu, pozitif tanımlı bir matris; $B$, N satır m sütunlu bir matris olmak üzere

$$(I + B^{*}H^{-1}B)^{-1} = I - B^{*}(BB^{*} + H)^{-1}B$$

dir (Armstrong ve Rublein 1976).

Gerçekten Sherman–Morrison–Woodbury formülünden

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1}$$

olduğu bilinmektedir (Golub and Van Loan 1983). Buna göre *A* yerine *H*; *B* yerine $BB^*$ alınırsa

$$(BB^* + H)^{-1} = H^{-1} - H^{-1}BB^*(BB^* + H)^{-1}$$

elde edilir. Eşitlik soldan $B^*$, sağdan $B$ ile çarpılırsa

$$B^*[H^{-1} - (BB^* + H)^{-1} - H^{-1}BB^*(BB^* + H)^{-1}]B = 0$$

olur. Eşitliğin her iki tarafına $I$ birim matrisi eklenirse

$$I + B^*H^{-1}B - B^*(BB^* + H)^{-1}B - B^*H^{-1}BB^*(BB^* + H)^{-1}B = I$$
$$[I - B^*(BB^* + H)^{-1}B] + B^*H^{-1}B[I - B^*(BB^* + H)^{-1}B] = I$$

olur. Buradan

$$(I + B^*H^{-1}B)[I - B^*(BB^* + H)^{-1}B] = I$$

elde edilir.

**Yardımcı Teorem 5.2.** N ve m pozitif doğal sayılar; *H*, N boyutlu, pozitif tanımlı bir matris; *B*, N satır m sütunlu bir matris olmak üzere

$$(I + BB^*H^{-1})^{-1} = I - BB^*(H + BB^*)^{-1}$$

dir (Armstrong ve Rublein 1976).

Gerçekten Sherman–Morrison–Woodbury formülünden

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - (A+B)^{-1}BA^{-1}$$

olduğu bilinmektedir (Golub and Van Loan 1983). Buna göre *A* yerine *H*; *B* yerine $BB^*$ alınırsa

$$(H + BB^*)^{-1} = H^{-1} - (H + BB^*)^{-1} BB^*H^{-1}$$

olur. Buradan

$$H^{-1} - (H + BB^*)^{-1} - (H + BB^*)^{-1} BB^*H^{-1} = 0$$

$$H^{-1} - (H + BB^*)^{-1} (I + BB^*H^{-1}) = 0$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $BB^*$ ile çarpılırsa

$$BB^*[H^{-1} - (H + BB^*)^{-1}(I + BB^*H^{-1})] = 0$$

olur. Eşitliğin her iki tarafına $I$ birim matrisi eklenirse

$$I + BB^*H^{-1} - BB^*(H + BB^*)^{-1}(I + BB^*H^{-1}) = I$$

elde edilir. Buradan

$$I + BB^*H^{-1} - BB^*(H + BB^*)^{-1}(I + BB^*H^{-1}) = I$$

$$[I - BB^*(H + BB^*)^{-1}](I + BB^*H^{-1}) = I$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$(I + BB^*H^{-1})^{-1} = I - BB^*(H + BB^*)^{-1}$$

dır.

**Yardımcı Teorem 5.3.** N ve m doğal sayılar, $H$, N boyutlu pozitif tanımlı bir matris ve $B$, N satır m sütunlu bir matris olmak üzere

$$\lambda_{\min}(H + BB^T) \geq \lambda_{\min}(H)$$

tır (Lutkepohl 1996 sayfa 74).

# 6. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde bir fark denklem sisteminin kontrol edilebilirliğiyle ilgili, çalışmamızı ilgilendiren yönleri esas alınarak, literatürde verilen bilgiler özetlenmiştir. Şöyle ki; **verilen bir fark denklem sisteminde $x(0)=\alpha$'dan başlayıp M'inci (M$>$1) adımda verilen $x(M)=\beta$ vektöründe çözümü tamamlamak için literatürde verilen gerekli şartlar incelenmiştir** (Kwakernaak ve Sivan 1972, Barnet 1975, La Salle 1986 ). Bu durum

$$x(n+1) = Ax(n),\ n = 0,1,2,...,M-1 \qquad (6.1)$$
$$x(0) = \alpha\ ; \quad x(M) = \beta$$

olacak şekilde ifade edilebilir. Örnek 6.1'de görüleceği gibi (6.1) probleminin çözümü olmayabilir.

**Örnek 6.1.**
$$x(n+1) = 3x(n),\ \ n = 0,1,2$$
$$x(0) = 1\ ; \quad x(3) = 25$$

fark denkleminin çözümünü araştıralım.

$$x(1) = 3x(0)$$
$$x(2) = 3x(1) = 3 \cdot 3 = 9$$
$$x(3) = 3x(2) = 3 \cdot 9 = 27 \neq 25$$

olduğu görülür. Bu durumda çözüm yoktur. Bu sistemde ancak dışardan "güç etki ettirilerek" x(0) = 1'den x(3) = 25'e ulaşılabilir.

**Tanım 6.1.** $A$, N boyutlu karesel matris; α, N boyutlu vektör ve $\{f(n)\}$, $n = 0,1,2,...$ N boyutlu bir vektör dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + f(n), n = 0,1,2,... \\ x(0) &= \alpha \end{aligned} \tag{6.2}$$

sistemine **homojen olmayan fark Cauchy problemi** denir (Elaydi 1996, Akın ve Bulgak 1998).

(6.2) Problemininin tek çözümü vardır ve

$$x(n) = A^n \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} f(k)$$

şeklindedir. Kontrol problemlerinde $\{f(n)\}, n = 0,1,2,...$ dışarıdan sisteme uygulanan güç dizisi olarak bilinir (Elaydi 1996, sayfa 259). $\{f(n)\}$ dizisinin değişmesi çözümü de değiştirecektir. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

**Tanım 6.2.** $A$, N boyutlu karesel matris; α ve β ( M >0 ) N boyutlu keyfi seçilen vektörler ve $\{f(n)\}, n = 0,1,...,M-1$, N boyutlu bir vektör dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + f(n), n = 0,1,...,M-1 \\ x(0) &= \alpha\,; \quad x(M) = \beta \end{aligned} \tag{6.3}$$

iki nokta sınır değer problemini sağlayan $\{f(n)\}$, $n = 0,1,...,M-1$, vektör dizisi vardır. Bu tür problemlere **fark kontrol problemi** denir. (Elaydi 1996, sayfa 260)

**Soru:** (6.3) sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında ne söylenebilir?

(6.3) probleminin daima en az bir çözümü vardır. Gerçekten M = 1 için

$$f(0) = \beta - A\alpha$$

bulunur. Yine *f(0)* herhangi bir keyfi vektör olmak üzere M = 2 için

$$f(1) = \beta - A^2\alpha - Af(0)$$

olarak bulunur. Yani M = 2 için istenilen sayıda ve istenilen amaca uygun *f(0)* ve *f(1)* vektörleri bulunabilir.

**Örnek 6.2.** $x(n+1)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}x(n)+f(n),\ n=0,1$

$$x(0)=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ x(2)=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$$

iki nokta sınır değer problemini sağlayan $f(0)$ ve $f(1)$ güç vektörlerini bulalım.

$$x(1)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}x(0)+f(0)$$

$$f(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \text{ için } x(1)=\begin{pmatrix}3\\ -3\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$x(2)=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}x(1)+f(1);\quad f(1)=\begin{pmatrix}-6\\ 8\end{pmatrix}$$

bulunur. Bu durumda verilen problemi sağlayacak şekilde istenilen kadar güç vektörü bulunabileceği açıktır.

(6.3) sisteminde her bir $\{x_j(n)\},\ n=0,1,...,M-1$; $f(n)$ vektör dizisini direk olarak etkilemektedir. Ancak verilen bir kontrol sisteminde, sisteme dışarıdan uygulanabilecek güç sınırlı olabilir. Yani, verilen sistemin kontrol dizisi, genellikle bazı sınırlamalara bağlıdır.

Örneğin, $\{f(n)\},\ n=0,1,...,M-1$ kontrol dizisi; $\{u(n)\},\ n=0,1,...,M-1$ vektör dizisi ve $B$, N satır m sütunlu bir matris olmak üzere

$$f(n)=Bu(n),\ n=0,1,...,M-1$$

olarak verilebilir. Bu durumda (6. 3) sistemi

$$x(n+1)=Ax(n)+Bu(n), n=0,1,...,M-1 \tag{6.4}$$
$$x(0)=\alpha;\quad x(M)=\beta$$

olur. Şimdi (6.4) kontrol sistemini ana başlıklar altında inceleyelim.

### 6.1. Tek Girişli Kontrol

$b$, N boyutlu bir vektör ve $\{f(n)\}$, $n = 0,1,...,M-1$ kontrol dizisi olsun.

$$f(n) = u(n)b, \;\; n = 0,1,2,...,M-1$$

olacak şekilde $\{u(n)\}$, $n = 0,1,...,M-1$ reel vektör dizisi, verilen tek bir $b$ vektörüne bağlı olabilir. Bu durumu aşağıdaki kontrol problemi tanımı ile verelim.

**Tanım 6.1.1.** $A$, N boyutlu, karesel bir matris; $b$, N boyutlu bir vektör ve $\alpha$, β ( M > 0, yeterince büyük bir tamsayı ), keyfi seçilen N boyutlu vektörler olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n) + u(n)b, n = 0,1,...,M-1 \tag{6.5}$$

$$x(0) = \alpha\,; \quad x(M) = \beta$$

denklem sistemini sağlayacak şekilde bir $\{u(n)\}$, $n = 0,1,...,M-1$, kontrol dizisi aranıyorsa bu tür problemlere **tek girişli fark kontrol problemi** denir ( La Salle 1986 sayfa 98, Elaydi 1996, sayfa 263 ).

**Örnek 6.1.1.** N = 1, ( M > 0 ) $a$, $b$, $\alpha$ ve β (b ≠ 0) reel sayılar olmak üzere

$$x(n+1) = ax(n) + bu(n), \; n = 0,1,...,M-1$$

$$x(0) = \alpha; \quad x(M) = \beta$$

denklemini sağlayan $u(0)$, $u(1)$, ... , $u(M-1)$, $n = 0,1,...,M-1$ kontrol dizileri varsa bulalım.

$$\begin{aligned} x(n+1) &= ax(n) + bu(n) \\ &= a[ax(n-1) + bu(n-1)] = a^2x(n-1) + abx(n-1) + bu(n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= a^{n+1}x(0) + a^nbu(0) + \ldots + a^2bu(n-2) + abu(n-1) + bu(n) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$x(M) = a^Mx(0) + a^{M-1}bu(0) + \ldots + a^2bu(M-3) + abu(M-2) + bu(M-1)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$u(0) = 0, \; u(1) = 0, \ldots, u(M-2) = 0, \; u(M-1) = [\beta - a^M\alpha]/b$$

dizisi denklemin çözümlerinden biridir.

**Örnek 6.1.2.** $$x(N+1) = 2x(n) + 3u(n)$$

$$x(0) = 1; \quad x(5) = 35$$

kontrol sistemi için $u(0),\ u(1),\ u(2),\ u(3)\ ve\ u(4)$ kontrol dizisi varsa bulalım.

$$x(5) = 35 = 2^5x(0) + 2^4bu(0) + 2^3bu(1) + 2^2bu(2) + 2bu(3) + bu(4)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u(2) = 0, \quad u(3) = 0, \quad u(4) = 3 / b = 3/3 = 1$$

çözümü problemin çözümlerinden biridir.

**Örnek 6.1.3.** $x(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x(n) + u(n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; \quad x(M) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

sistemi için $u(0), u(1), \ldots, u(M-1),\ n = 0,1,\ldots, M-1$ kontrol dizilerinin varlığını araştıralım.

$$x_2(n+1) = 3x_2(n),\ n = 0,1,\ldots, M-1$$

$$x_2(0) = \alpha_2; \quad x_2(M) = \beta_2$$

iki nokta sınır değer probleminin $x_2(1) \neq 3x_2(0)$, $x_2(2) \neq 3^2 x_2(0)$,…, $x_2(M-1) \neq 3^{M-1} x(0)$ durumunda hiçbir kontrol dizisi yoktur.

**Tanım 6.1.2.** (6.5) denklem sistemini sağlayacak şekilde bir $\{u(n)\},\ n = 0,1,\ldots, M-1$ kontrol dizisi varsa $(A,b)$ çiftine **kontrol edilebilir çift** denir (Elaydi 1996, sayfa 262).

**α'dan β'ya ulaşmak için M (gerekli adım sayısı) ne kadar büyük olmalıdır?** Yani sistemin "*ısınma*" zamanına ihtiyacı var mıdır? Sorusunun cevabını Haydar Bulgak ders notları çerçevesinde bir örnek üzerinde verelim.

**Örnek 6.1.4.** $x(n+1) = Ax(n) + u(n)b,\ n = 0,1,2,...,M-1$ kontrol sistemi için

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olsun. $(A,b)$ çiftinin kontrol edilebilir bir çift olması için $M$ nin en az kaç olması gerektiğini bulalım. Verilen kontrol sistemini

$$x_1(n+1) = x_1(n) + u(n),\ n = 0,1,2,...,M-1$$

$$x_1(0) = \alpha_1,\ x_1(M) = \beta_1$$

$$x_2(n+1) = 2x_2(n) - u(n)$$

$$x_2(0) = \alpha_2,\ x_2(M) = \beta_2$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan $M = 1$ için

$$x_1(1) = x_1(0) + u(0),$$

$$x_1(0) = \alpha_1,\ x_1(1) = \beta_1$$

$$x_2(1) = 2x_2(0) - u(0)$$

$$x_2(0) = \alpha_2,\ x_2(1) = \beta_2$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + u(0)$$

$$\beta_2 = 2\alpha_2 - u(0)$$

olur. Genel durumda bu eşitlikleri sağlayacak $u(0)$ bulunamaz. M = 2 için

$$x_1(2) = x_1(0) + u(0) + u(1),$$

$$x_1(0) = \alpha_1,\ x_1(2) = \beta_1$$

$$x_2(2) = 4x_2(0) - 2u(0) - u(1)$$

$$x_2(0) = \alpha_2,\ x_2(2) = \beta_2$$

olur. Buradan

$$u(0) + u(1) = \beta_1 - \alpha_1$$

$$2u(0) + u(1) = 4\alpha_2 - \beta_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan verilen sistemin tek çözümü $\alpha,\ \beta$ vektörleri için mevcut olup herhangi $M \geq 2$ için $(A,b)$ kontrol edilebilir bir çifttir. M = 3 için

$$x_1(3) = x_1(0) + u(0) + u(1) + u(2),$$

$$x_1(0) = \alpha_1,\ x_1(3) = \beta_1$$

$$x_2(3) = 8x_2(0) - 4u(0) - 2u(1) - u(2)$$

$$x_2(0) = \alpha_2\,,\ \ x_2(3) = \beta_2$$

olur. Buradan

$$u(0) + u(1) + u(2) = \beta_1 - \alpha_1$$

$$4u(0) + 2u(1) + u(2) = 8\alpha_2 - \beta_2$$

olur. Bu durumda problemin çözümü parametreye bağlı olarak elde edilir. **Genel olarak (6.5) sisteminin kontrol edilebilir olup olmadığına karar verebilmek için $M \geq N$ alınmalıdır.**

**Teorem 6.1.1.** Eğer $(A,b)$ kontrol edilebilir bir çift ise (6.5) sistemini sağlayacak şekilde bir $\{u(n)\}$, $n = 0,1,2,...,N-1$ kontrol dizisi vardır ( Elaydi 1996, sayfa 262 ).

**Örnek 6.1.5.** $$x(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(n) + u(n)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

kontrol sistemi için $u(0)$ ve $u(1)$ kontrollerini bulalım. M = 2 için

$$x(2) - A^2x(0) = u(0)Ab + u(1)b$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) + u(0) \end{pmatrix}$$

buradan $u(0) = -1$ ve $u(1) = 1.2$ olarak bulunur.

### 6.2. Çok Girişli Kontrol

Bazen verilen lineer fark denklem sistemini kontrol etmek için tek girişli kontrol yetmeyebilir. Yani, $\{f(n)\}$, $n = 0,1,...,M-1$ kontrol dizisi

$$f(n) = u_1(n)b_1 + u_2(n)b_2 + ... + u_m(n)b_m\,, \quad n = 0,1,...,M-1$$

olacak şekilde $\{u_j(n)\}$, $j = 0,1,...,m$; $n = 0,1,...,M-1$ reel vektör dizisi ve verilen $b_j, j = 0,1,...,m$ vektörlerine bağlı olabilir. Bu durumda aşağıdaki kontrol problemi tanımı ile verilebilir.

**Tanım 6.2.1.** $M$ yeterince büyük pozitif bir tamsayı; $A$, N boyutlu kare matris; $\alpha$, $\beta$ ve $b_1, b_2, ..., b_m$ ler N boyutlu vektörler olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n) + u_1(n)b_1 + u_2(n)b_2 + ... + u_m(n)b_m\,, \quad n = 0,1,...,M-1 \qquad (6.6)$$
$$x(0) = \alpha\,; \quad x(M) = \beta$$

denklem sistemini sağlayan bir $\{u(n)\}$, $n = 0,1,2,...,M-1$ kontrol dizisi şeklinde bir çözümü vardır. Bu problemlere **çok girişli fark kontrol problemi** denir (La Salle 1986 sayfa 97).

Eğer problemin çözümü varsa o zaman $b_1, b_2, ..., b_m$ vektörleri $B$ matrisinin sütunları olmak üzere $(A,B)$ çiftine **kontrol edilebilir (controllable) çift** denir (Barnet 1975 ). Bu çok girişli kontrol sistemi

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),\ n = 0,1,...,M-1 \qquad (6.7)$$
$$x(0) = \alpha\,, \quad x(M) = \beta$$

olarak yazılır. (6.7) sisteminin çözümü

$$x(n) = A^n x(0) + A^{n-1}Bu(0) + ... + A^2 Bu(n-3) + ABu(n-2) + Bu(n-1)$$
$$x(n) = A^n\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1}Bu(k) \qquad (6.8)$$

şeklindedir. Burada

$$
\begin{aligned}
&W(1) = B \\
&W(2) = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(1) & AB \end{pmatrix} \\
&W(3) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(2) & A^2B \end{pmatrix} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&W(n) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(n-1) & A^{n-1}B \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

olsun. Bu durumda (6.8) çözümü

$$
x(n) = A^n \alpha + W(n)\widetilde{u}(n), \quad \widetilde{u}(n) = \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} \tag{6.9}
$$

olur. Burada sadece $W(n)$ matrisinin lineer bağımsız sütun sayısının N olup olmadığı üzerinde duracağız. Çünkü sistem N adımda kontrol edilebilir değil ise hiçbir zaman kontrol edilebilir olamaz. **Bu durumda *B* regüler bir matris ise n = 1 için sistem kontrol edilebilirdir** (Barnett 1975, La Salle 1986).

**Tanım 6.2.2.** (6.7) kontrol sistemini alalım. Eğer $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çift ise $B$ m sütunlu bir matris olmak üzere

$$L(b_1, b_2, \ldots, b_m) = span\{ b_1, b_2, \ldots, b_m \}$$

alt vektör uzayına, *B*'ye bağlı *A* matrisinin **kontrol uzayıdır**, denir. Burada

$$dimL( b_1, b_2, \ldots, b_m ) \le m$$

dir (Elaydi 1996).

**Teorem 6.2.1.** (6.7) kontrol sisteminde *A* matrisi *B* matrisinin $b_1, b_2, \ldots, b_m$ vektörleri ile $\boldsymbol{R}^N$ de bir minimal invaryant alt uzayı oluşturuyor ise $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çifttir. Yani $(A, B = (b_1, b_2, \ldots, b_m))$ kontrol çifti için

$$rank\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{N-1}B \end{pmatrix} = N$$

şartı sağlanıyorsa $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çifttir ( Elaydi 1996 ).

**Örnek 6.2.1.** $x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),\ n = 0, 1$

$$x(0) = \alpha; \quad x(2) = \beta$$

kontrol sistemi için $(A, B)$ çifti kontrol edilebilir ise $rank(A, B) = 2$ olduğunu gösterelim.

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

$$\beta - A^2\alpha = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

olur. Burada $W(2) = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$ dir. Eğer $rank W(2) = 2$ ise $\dim W(2) = R^2$ dir. Buradan $\beta - A^2\alpha \in \dim W(2) = R^2$ dir. (6.10) çözümünden

$$\beta - A^2\alpha = W(2)\tilde{u}(2)$$

yazılabilir. $\tilde{u}(2) \in R^2$ olacak şekilde bir $\tilde{u}(2)$ vektörü bulunabilir.

**Sonuç 6.2.1.** (6.7) sistemini sağlayacak şekilde bir $\{u(n)\}$, $(n = 0,1,\ldots,M-1)$ kontrol dizisinin var olabilmesi için $M \geq N-1$ olmalıdır. Aksi halde

$$rank\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^M B \end{pmatrix} = N$$

olma şartı ile çelişki olur. Çünkü denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla olur ve genel durumda çözüm kümesi elde edilemeyebilir.

Şimdi kontrol edilebilirliğin bazı özelliklerini verelim.

**a)** (6.7) sisteminin kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart $W(N) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{N-1}B \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$Y = W(N)W(N)^T$$

matrisinin simetrik ve pozitif tanımlı olması gerekir (La Salle 1986, sayfa 103).

**Örnek 6.2.3.** (6.7) sisteminde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olsun. $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çifttir. Gerçekten

$$Y = W(2)W(2)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -11 & 37 \end{pmatrix}$$

olur. Verilen özellik gereği $Y$ matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olduğundan (6.7) sistemi kontrol edilebilirdir.

**b)** $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çift olduğu halde $(A^T, B)$ kontrol edilebilir bir çift olmayabilir. Özelliğin doğruluğunu bir örnek ile gösterelim.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

için

$$W(2) = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ve

$$Y = W(2) \cdot W(2)^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlı bir matristir. a)'da verilen özellikten $(A, B)$ kontrol edilebilir bir çifttir. Ancak

$$W(2) = \begin{pmatrix} B & A^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ve

$$Y = W(2) \cdot W(2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlı bir matris değildir. b)'de verilen özellikten $(A^T, B)$ kontrol edilebilir bir çift değildir. Bu

$(A, B)$ kontrol edilebilir bir çift ise $\alpha \neq 0$ olmak üzere $(\alpha A^{-1}, \sqrt{2}A^{-1}B)$ de kontrol edilebilir çifttir (Armstrong ve Rublein 1976). Bu durumun özel bir halini teorem 6.2.1 ile verelim.

**Yardımcı teorem 6.2.1.** $A$, N boyutlu regüler bir matris; B, N satır m sütunlu bir matris olmak üzere $(A^{-1}, B)$ kontrol edilebilir bir çift ise $(A, B)$ de kontrol edilebilir bir çifttir.

Gerçekten $A$ regüler bir matris olmak üzere $(A^{-1}, B)$ kontrol edilebilir bir çift ise

$$W(N) = \begin{pmatrix} B & A^{-1}B & A^{-2}B & \ldots & A^{-N+1}B \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı N'dir (Teorem 6.2.2. ii). A matrisi regüler olduğundan $rankA = N$ dir (Lipshutz 1978, sayfa112). $W(N)$ matrisi $A^{N-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} A^{N-1}W(N) &= \begin{pmatrix} A^{N-1}B & \ldots & A^2B & AB & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{N-1}B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. $A^{N-1}W(N)$ matrisinin rankı da N dir (Horn 1985, sayfa 13). Buradan teorem 6.2.1'den $(A, B)$ çifti de kontrol edilebilirdir.

**Teorem 6.2.2.** $v$, N boyutlu bir sütun vektör olmak üzere (6.7) denklem sisteminde

$$W(n) = \begin{pmatrix} B \ AB \ A^2B \ \ldots \ A^{n-1}B \end{pmatrix} \text{ ve } \ Y = W(n)W(n)^T, \ \ n = 0,1,2,\ldots$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

**i)** (6.7) sistemi kontrol edilebilirdir.

**ii)** $rankW(n) = N$, $n \geq N$ dir.

**iii)** $v^T W(n) = 0$, $n \geq 0$ eşitliği $v = 0$ durumunda sağlanır.

**iv)** $Y$ matrisi pozitif tanımlıdır ( La Salle 1986, sayfa 104).

Şimdi verilen $(A, B)$ çiftinin $\rho$-kontrol edilebilir ($\rho > 0$) olup olmadığını araştıran bir algoritma verelim. $\rho$-kontrol edilebilirlik kavramı Prof. Dr. Haydar Bulgak tarafından bu çalışma için ortaya konmuştur. Yapılan literatür taramasında böyle tanımlanmış bir kavrama rastlanmamıştır.

**Algoritma 6.2.1**

**Adım 0. ( Giriş elemanları )** N ve m doğal sayılar olmak üzere;

- N boyutlu, karesel, reel ***A*** matrisi
- Sütunları lineer bağımsız olan, N satır, m sütunlu, reel ***B*** matrisi
- $\rho > 0$ olacak şekilde bir reel sayı
- ***F*** - format elemanları

verilsin.

**Hedef:** $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{il})$, $a_{ij}, b_{il} \in F, (i, j = 1,2,..., N;\ l = 1,2,...m)$ olmak üzere $(A, B)$ çiftinin $\rho$-kontrol edilebilir olup olmadığını araştırmaktır.

**Adım 1.** $W(N) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{N-1}B \end{pmatrix}$ hesaplanır.

**Adım 2.** Y=$W(N) \cdot W(N)^T$ hesaplanır.

**Adım 3.** $\lambda_1(Y)$, Y matrisinin en küçük öz değeri bulunur.

**3.1.** Bir simetrik matrisin simetrik üç köşegen şekline getirilmesi **tredm** fonksiyonu ile yapılır.

**tredm(Matrix Y, Vektör D, Vector B)**

**Giriş parametreleri**

**Y**: matris, N boyutlu simetrik Y matrisi

**Çıkış parametreleri**

**D**: Vektör, D1, D2, …DN sayıları üç köşegen simetrik matrisin ana köşegeninin elemanlarını verir.

**F**: Vektör, F2, F3, … ,FN sayıları üç köşegen simetrik matrisin yan köşegeninin elemanlarını verir.

**3.2.** Simetrik üç köşegen matrisin sözde öz değerleri veya seçilen numaralara karşılık gelen sözde öz değerleri **eival** fonksiyonu ile hesaplar.

**eival (Vektor D, Vektor F, Vektör LM, Vektor Ind)**

**Giriş Parametreleri**

**D** ve **F** matrisleri 3.1' de elde edilen matrisler

**Ind**: Vektör, istenilen öz değerlerin numarasını tanımlar

**Çıkış Parametreleri**

Δ: öz değerlerin hesaplama hatası

**LM**: Vektör, $\hat{\lambda}_1$, j = 1,2, … , N verilen Y matrisinin 1.5Δ hatayla hesaplanan öz değerleri LM[0]= $\hat{\lambda}_1$; …; LM[N-1]= $\hat{\lambda}_N$ olacak şekilde verir.

**Adım 4.** $\lambda_1(Y) > \rho$, $\rho > 0$ ise $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çifttir. Aksi halde $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift değildir.

Şimdi bu algoritmaya bir örnek verelim.

**Örnek**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ matrislerini alalım. $\rho > 0$ olmak üzere $(A,B)$ çiftinin $\rho$-kontrol edilebilir bir çift olup olmadığını MVC yazılımı yardımı ile bulalım.

```
      1,   3
W = 1, 0.5
Y=W*!W
      10,  2.5
Y = 2.5, 1.25
tredm(Y,$D,$F)
Function tredm result = 9.768e-14
F = ( 0, 2.5 )
D = ( 10, 1.25 )
eival(D,F,LM)
Function eival result = 1.5e-280
LM = ( 0.586089, 10.6639 )
```

$\lambda_1(Y) > \rho$, $\rho > 0$ olduğundan $(A,B)$, $\rho$-kontrol edilebilir bir çifttir.

### 6.3. Kontrol Edilebilirlik ile Kararlılık Arasındaki İlişki

Kontrol edilebilirlik ile kararlılık arasındaki ilişkiyi ortaya koyan ve literatürde iyi bilinen aşağıdaki teoremi ele alalım.

**Teorem 6.3.1.** $A$, N boyutlu karesel bir matris ve $B$, N satır m sütunlu bir matris ve $(A,B)$ kontrol edilebilir bir çift olsun.

$$AHA^T - H = -BB^T$$

denkleminin pozitif tanımlı bir $H$ matrisine sahip olması için gerek ve yeter şart $A$ matrisinin Schur kararlı bir matris olmasıdır. ( Armstrong ve Rublein 1976, Discrete Lyapunov Teoremi)

Teorem 6.3.1, yardımcı teorem 5.1 ve 5.2'yi kullanarak Armstrong ve Rublein (1976)'da verilen teorem 2'yi çalışmamıza uygun bir şekilde düzenleyerek verelim.

**Teorem 6.3.2.** $A$, $\mu^*$-regüler bir matris; $\alpha$ pozitif bir reel sayı; $(A,B)$, $\rho$- kontrol edilebilir bir çift; $\alpha A^{-1}$ Schur kararlı bir matris ve $H = H^T > 0$ matrisi

$$AHA^T = \alpha^2 H + 2BB^T \tag{6.10}$$

denkleminin çözümü olsun. Bu taktirde

$$K = -B^T(BB^T + H)^{-1}A$$

matrisi için $A + BK$ matrisi Schur kararlıdır.

**İspat:** $A$, $\mu^*$ - regüler bir matris olduğundan (6.10) denklemi

$$(\alpha A^{-1})H(\alpha A^{-1})^T - H = -(\sqrt{2}A^{-1}B)(\sqrt{2}A^{-1}B)^T$$

biçiminde yazılabilir. Yardımcı teorem 6.2.1'den $(A,B)$ $\rho$- kontrol edilebilir bir çift ise $(\alpha A^{-1}, \sqrt{2}A^{-1}B)$ $\rho$- kontrol edilebilir bir çifttir. Ayrıca $\alpha A^{-1}$ matrisi, Schur kararlı bir matristir. Bu yüzden (6.10) eşitliğini sağlayacak bir $H = H^T > 0$ matrisi bulunur (Armstrong 1976). Yardımcı teorem 5.2'de verilen eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned} A + BK &= A - BB^T(BB^T + H)^{-1}A \\ &= [I - BB^T(BB^T + H)^{-1}]A \\ &= [(I + BB^T H^{-1})A \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$H - (A + BK)H(A + BK)^T = H - (I + BB^T H^{-1})^{-1} AHA^T[(I + BB^T H^{-1})^{-1}]^T$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &(A + BK)H(A + BK)^T - H \\ &\quad = -(I + BB^T H^{-1})^{-1}[(1-\alpha^2)H + BB^T H^{-1} BB^T](I + H^{-1}BB^T)^{-1} \end{aligned} \qquad (6.11)$$

olur.

(6.11)'de keyfi seçilen $\mu^*$ - regüler bir $A$ matrisi için $w(\alpha A^{-1}) < w^*$, $(w^* > 1)$ olacak şekilde bir α pozitif reel sayısı vardır. Bu α sayısını bulmak için $\alpha = \frac{1}{2^k}$, $(k = 1,2,...,s)$ seçilebilir. (6.11), α seçimi ve $H = H^T > 0$ dan

$$H - (A + BK)H(A + BK)^T > 0 \qquad (6.12)$$

dır. $A + BK$ matrisinin Schur kararlı bir matris olduğu görülmektedir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} K &= -(I + B^T H^{-1} B)^{-1} B^T H^{-1} A \\ &= -[I - B^T(BB^T + H)^{-1}B]B^T H^{1} A \\ &= -B^T(BB^T + H)^{-1}A \end{aligned}$$

olacak şekilde seçilecek bir $K$ matrisi için $A + BK$ matrisi Schur kararlı bir matris olur. Bu ise istenendir. Teoremde α seçimi öz değerlere bağlı olmadan seçilmiş oldu.

(1.3) sistemini alalım. $A+BK$ matrisinin fark kararlı olması için gerek ve yeter şart (6.11) Lyapunov fark matris denklem sisteminin pozitif tanımlı, simetrik bir $H=H^T>0$ çözümünün var olmasıdır. $A+BK$ matrisinin pratik fark asimtotik kararlılığının şart sayısının

$$(A+BK)Y(A+BK)^T-Y=-I$$

eşitliği için

$$w((A+BK)^T)=\|Y\| \tag{6.13}$$

olduğunu teorem 3.3.2'den biliyoruz. (6.11)'de verilen eşitlik ve teorem 3.3.1'den

$$\|H\| \le \|(I+BB^TH^{-1})^{-1}[(1-\alpha^2)H+BB^TH^{-1}BB^T](I+H^{-1}BB^T)^{-1}\|\cdot\|Y\|$$

$$=\|(I+BB^TH^{-1})^{-1}\|\cdot\|[(1-\alpha^2)H+BB^TH^{-1}BB^T]\|\cdot\|(I+H^{-1}BB^T)^{-1}\|\cdot\|Y\|$$

$$=\sigma_1(I+BB^TH^{-1})\cdot\|(1-\alpha^2)H+BB^TH^{-1}BB^T\|\cdot\sigma_1(I+H^{-1}BB^T)\cdot\|Y\|$$

yazılabilir. Buradan

$$\sigma_1(I+BB^TH^{-1})=\sigma_1(I+H^{-1}BB^T)=1$$

olduğundan

$$\|H\|\le\|(1-\alpha^2)H+BB^TH^{-1}BB^T\|\cdot\|Y\|$$

elde edilir.

Şimdi (6.10) denkleminin pozitif tanımlı çözümünün varlığını gösteren yardımcı teorem ile $H$ pozitif tanımlı bir matris ve $B$ bir dikdörtgen matris olmak üzere $H+BB^T$ matrisinin şart sayısının üst sınırı ile ilgili iki yardımcı teorem verelim. Bu yardımcı teoremlerin ispatları Prof. Dr. Haydar Bulgak tarafından yapıldı.

**Yardımcı Teorem 6.3.1.** A, N boyutlu karesel ve $\mu^*$-regüler bir matris; B, N satır m sütunlu bir matris; $\alpha$ bir reel sayı öyle ki; $\alpha A^{-1}$ Schur kararlı bir matris ve $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift olmak üzere

$$(\alpha A^{-1})H(\alpha A^{-1})^T-H=-(\sqrt{2}A^{-1}B)(\sqrt{2}A^{-1}B)^T$$

Lyapunov fark denklem sisteminin çözümü vardır tektir ve $H=H^T>0$ dır.

**İspat:** $\alpha A^{-1}$ Schur kararlı olduğundan

$$(\alpha A^{-1})H(\alpha A^{-1})^T - H = -(\sqrt{2}A^{-1}B)(\sqrt{2}A^{-1}B)^T$$

Lyapunov fark denklem sisteminin çözümü vardır, tektir ve

$$H = \sum_{j=0}^{\infty}(\alpha A^{-1})^j(\sqrt{2}A^{-1}B)(\sqrt{2}A^{-1}B)^T((\alpha A^{-1})^j)^T$$

ile verilir ( Elaydi 1996 sayfa 216, Akın ve Bulgak 1998 sayfa 169). Dolayısıyla

$$(Hx,x) = \sum_{j=0}^{\infty}\|((\alpha A^{-1})^j(\sqrt{2}A^{-1}B))^T x\|^2 \geq \sum_{j=0}^{N-1}\|((\alpha A^{-1})^j(\sqrt{2}A^{-1}B))^T x\|^2$$

olduğu açıktır. Burada $x$ – keyfi N elemanlı reel vektördür.

$$(Hx,x) \geq \sum_{j=0}^{N-1}\|((\alpha A^{-1})^j(\sqrt{2}A^{-1}B))^T x\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}(\sqrt{2}A^{-1}B)^T \\ ((\alpha A^{-1})(\sqrt{2}A^{-1}B))^T \\ \vdots \\ ((\alpha A^{-1})^{N-1}(\sqrt{2}A^{-1}B))^T\end{pmatrix} x\right\|^2$$

$(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift olduğundan

$$G = \begin{pmatrix}(\sqrt{2}A^{-1}B)^T \\ ((\alpha A^{-1})(\sqrt{2}A^{-1}B))^T \\ \vdots \\ ((\alpha A^{-1})^{N-1}(\sqrt{2}A^{-1}B))^T\end{pmatrix} \tag{6.14}$$

matrisinin boyutu N dir. Elde edilen son eşitsizliğe göre

$$\lambda_{min}(H) \geq \sigma^2_{\min}(G) > \rho, \quad \rho > 0 \tag{6.15}$$

Yani elde edilen $H$ matrisi pozitif tanımlıdır.

**Uyarı 6.3.1.** Burada bazı yardımcı ifadeler verilebilir.

$$W = \begin{pmatrix} B^T \\ (\alpha A^{-1}B)^T \\ \vdots \\ ((\alpha A^{-1})^{N-1}B)^T \end{pmatrix}$$

için

$$G = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}A^{-1}B)^T \\ ((\alpha A^{-1})(\sqrt{2}A^{-1}B))^T \\ \vdots \\ ((\alpha A^{-1})^{N-1}(\sqrt{2}A^{-1}B))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T \\ (\alpha A^{-1}B)^T \\ \vdots \\ ((\alpha A^{-1})^{N-1}B)^T \end{pmatrix} (\sqrt{2}A^{-1})^T = W(\sqrt{2}A^{-1})^T$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\sigma_{\min}(G) \geq \sigma_{\min}(W)\sigma_{\min}(\sqrt{2}A^{-1})$$

elde edilir.

**Yardımcı teorem 6.3.2.** $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift olacak şekilde A, N boyutlu karesel ve $\mu^*$-regüler bir matris; B, N satır m sütunlu bir matris ($\| BB^T \| = 1$); G, (6.14)'te verilen matris; H, (6.10) denkleminin pozitif tanımlı çözümü olmak üzere

$$\mu(H + BB^T) \leq \frac{2\| A^{-1} \|^2 \cdot w(\alpha A^{-1}) + 1}{\rho}$$

dir.

**İspat.** (6.10) Lyapunov fark denkleminden

$$H = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha A^{-1})^j (\sqrt{2}A^{-1}B)(\sqrt{2}A^{-1}B)^T ((\alpha A^{-1})^j)^T$$

dır. Teorem 3.3.1' göre

$$\| H \| \leq 2\| A^{-1} \|^2 \cdot \| BB^T \| \cdot w((\alpha A^{-1})^T) \tag{6.16}$$

yazılabilir. Ayrıca şart sayısı tanımından

$$\mu(H + BB^T) = \| H + BB^T \| \cdot \| (H + BB^T)^{-1} \|$$

olduğu bilinmektedir (Golub, Van Loan 1983). Buradan

$$\| H + BB^T \| \leq \| H \| + \| BB^T \|$$

$$\| (H + BB^T)^{-1} \| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(H + BB^T)} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(H)}$$

dır (Yardımcı teorem 4.3). Bu durumda

$$\mu(H + BB^T) \leq \frac{\| H \| + \| BB^T \|}{\lambda_{\min}(H)}$$

(6.15) eşitsizliği kullanılarak

$$\leq \frac{(2 \| A^{-1} \|^2 \cdot w((\alpha A^{-1})^T) \cdot \| BB^T \| + \| BB^T \|}{\lambda_{\min}(H)}$$

$$\leq \frac{2 \| A^{-1} \|^2 \cdot w((\alpha A^{-1})^T) + 1}{\sigma_1^2(G)}$$

$$\leq \frac{2 \| A^{-1} \|^2 \cdot w((\alpha A^{-1})^T) + 1}{\rho} \qquad (6.17)$$

elde edilir.

# 7. LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLI HALE GETİRİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA

Bu bölümde, lineer fark denklem sistemlerinin kararlı hale getirilmesi için bir algoritma verilmiştir. Bu algoritma literatür özetinde verilen Sima (1981) algoritması esas alınarak güncel kavramlara uygun hale getirilmeye çalışılmıştır.

## 7.1. Algoritma

**Adım 0. ( Giriş elemanları )** N ve m doğal sayılar olmak üzere;

- Pratik Schur kararlılığı gösteren bir $w^*$ reel sayısı ( $w^* > 1$ )
- $\mu^*$ pratik regülerliğin parametresi ( $\mu^* \geq 1$)
- $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift olacak şekilde N boyutlu, karesel, reel $\mu^*$ **-**regüler $A$ matrisi; N satır, m sütunlu, reel $B$ matrisi ( $\rho$>0)
- $A^{-1}$, $A$ matrisinin tersi
- $F$ - format elemanları

**Hedef:** $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{il})$**,** $a_{ij}, b_{il} \in F, (i, j = 1,2,\ldots,N;\ l = 1,2,\ldots m)$ **;** $A$ **,** $\mu^*$ **-** regüler bir matris ve $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift olmak üzere

$$w(A + BK) < w^*$$

şartını sağlayan $K$ matrisinin varlığını araştırmak ve var ise bulmaktır.

**Adım 1.** $A$ matrisinin $w^*$ - Schur kararlılığı incelenir. $w(A) < w^*$ ise adım 5.2'ye geçilir.

| |
|---|
| **QdaStab** fonksiyonu ile A matrisinin pratik Schur kararlılığının şart sayısı hesaplanır.<br>**QdaStab(double Mstar, Matrix A, Matrix H, double Omega, double E)**<br>**Giriş parametreleri**<br>**Mstar:** double, $w^*$ değerini içerir ( $w^* > 1$ )<br>**A:** Matris, verilen A matrisi<br>**Çıkış parametreleri**<br>Eğer fonksiyonun sonucu true ise bu taktirde aşağıdaki bilgiler verilir.<br>**Z:** Matris, $A^*ZA - Z + I = 0$ Lyapunov fark denkleminin çözümünü içerir aksi halde belirsizdir.<br>**Omega:** double, w(A) parametresini içine alır.<br>**E:** double, hata oranı |

**Adım 2.** $w(\frac{1}{2}A^{-1}) < w^*$ olup olmadığı kontrol edilir. Eşitsizlik sağlanıyor ise $\alpha = \frac{1}{2}$ olarak tanımlanır. Aksi taktirde

$$w(\frac{1}{2^s}A^{-1}) < w^* < w(\frac{1}{2^{s-1}}A^{-1})$$

şartını sağlayan bir s bulunur ve $\alpha = \frac{1}{2^s}$, $(s = 2,3,...)$ alınır. Bu durumda $w(\alpha A^{-1}) < w^*$ dır.

**QdaStab** fonksiyonu ile bir matrisin pratik Schur kararlılığının şart sayısı hesaplanır.

**QdaStab(double Mstar, Matrix F1, Matrix H, double Omega, double E)**

**Giriş parametreleri**

**Mstar:** double, $w^*$ değerini içerir ( $w^* > 1$ )

**Alpha**=0.5

**F1:** Matris, alpha*Ain

**Çıkış parametreleri**

Eğer fonksiyonun sonucu true ise bu taktirde aşağıdaki bilgiler verilir.

**Z:** Matris, F1$^*$ZF1 – Z + I = 0 Lyapunov fark denkleminin çözümünü içerir aksi halde belirsizdir.

**Omega:** double, w(F1) parametresini içine alır.

**E:** double, hata oranı

Z matrisi bulunuyorsa bu durumda alpha = 0.5 alınır. Aksi halde fonksiyonun sonucu true olana kadar Fk=alpha^k*Ain, k=2,3,…,s alınarak **QdaStab** fonksiyonu yeniden çalıştırılır. Bu durumda **alpha** yerine **alpha^k** ve F1 yerine Fk alınır.

**Adım 3.** Adım 2'ye göre $\alpha A^{-1}$ Schur kararlı bir matristir. Giriş elemanlarına göre $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çifttir dolayısıyla yardımcı teorem 6.2.1'e göre $(\alpha A^{-1}, \sqrt{2}A^{-1}B)$ kontrol edilebilir bir çifttir. Bu durumda teorem 6.3.1'e göre

$$(\alpha A^{-1})H(\alpha A^{-1})^T - H = -(\sqrt{2}A^{-1}B)(\sqrt{2}A^{-1}B)^T$$

eşitliğinden $H = H^T > 0$ olacak şekilde $H$ matrisi vardır. Bu $H$ matrisi bulunur.

**dmleSolver** fonksiyonu ile H matrisi hesaplanır.

AA = alpha*Ain
D = 2*Ain*B*!B*!Ain

**dmleSolver(double Mstar, matrix !AA, matrix D, matrix H, double E)**

**Giriş parametreleri:**
double Mstar : $w^*$ değerini içerir ( $w^* > 1$ )
matrix !AA : Bulunan AA matrisinin eşlenik transpozu
matrix D : Hesaplanan D matrisi

**Çıkış parametreleri:**
matrix H : Eğer fonksiyon true ile dönüyorsa istenilen matrisi içerir.
double E : Hata oranı

**Adım 4.** $C = BB^T \geq 0$ ve $H = H^T > 0$ olmak üzere

$$X = (H + C)^{-1} B$$

denkleminden $X$ bulunur. (Yardımcı teorem 6.3.2)

Adım 1 de tanıtılan **inverse** fonksiyonuyla H+C matrisinin tersi hesaplanır.

**inverse(double Mstar, matrix (H+C), matrix (H+C)in, double E)**

**X = ( H + C )in * B**

**Giriş Parametreleri**

**H+C:** matris

**B:** matris

**MStar:** $\dfrac{(2 \| A^{-1} \|^2 \cdot w^* + 1) \| BB^T \|}{\rho}$

**Çıkış parametreleri:**
matrix X : Eğer fonksiyon true ile dönüyorsa istenilen matrisi içerir.

**Adım 5.1. (Çıkış elemanı)** $K = -X^T A$ hesaplanır.

**Adım 5.2.** $K = 0$ dır.

Bu durumda $A + BK$ matrisi Schur kararlı olur (Teorem 6.3.2).

Adım1'de verilen **QdaStab** fonksiyonu ile $A+BK$ matrisinin fark asimtotik kararlılığının şart sayısı hesaplanır. $w(A+BK) < w^*$ ise $A+BK$, $w^*$-Schur asimtotik kararlıdır. Aksi taktirde $A+BK$, $w^*$- Schur asimtotik kararlı değildir.

$w(A+BK)$ için bir üst sınır bulmaya ilerideki çalışmalarda devam edilecektir.

**Örnek 7.5.1.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w^* = 100\,000, \; \mu^* = 100\,000$$

olmak üzere $w(A+BK) < w^*$ şartını sağlayan $K$ matrisinin varlığını araştıralım ve var ise bulalım.

Bu örneği çözmek için 4.2.1, 6.2.1 ve 7.1 algoritmalarını kullanacağız. Algoritma 4.2.1'den $A$ matrisinin $\mu^*$**-**regüler olduğunu, algoritma 6.2.1'den $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift olduğunu biliyoruz. Şimdi Algoritma 7.1'in adımlarını inceleyelim.

**Adım 0.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w^* = 100\,000$

**Adım 1.** $w(A) > w^*$

**Adım 2.** $\alpha = \dfrac{1}{4}$

**Adım 3.** $(\alpha A^{-1})H(\alpha A^{-1})^T - H = -2(A^{-1}B)(A^{-1}B)^T$

eşitliğinden

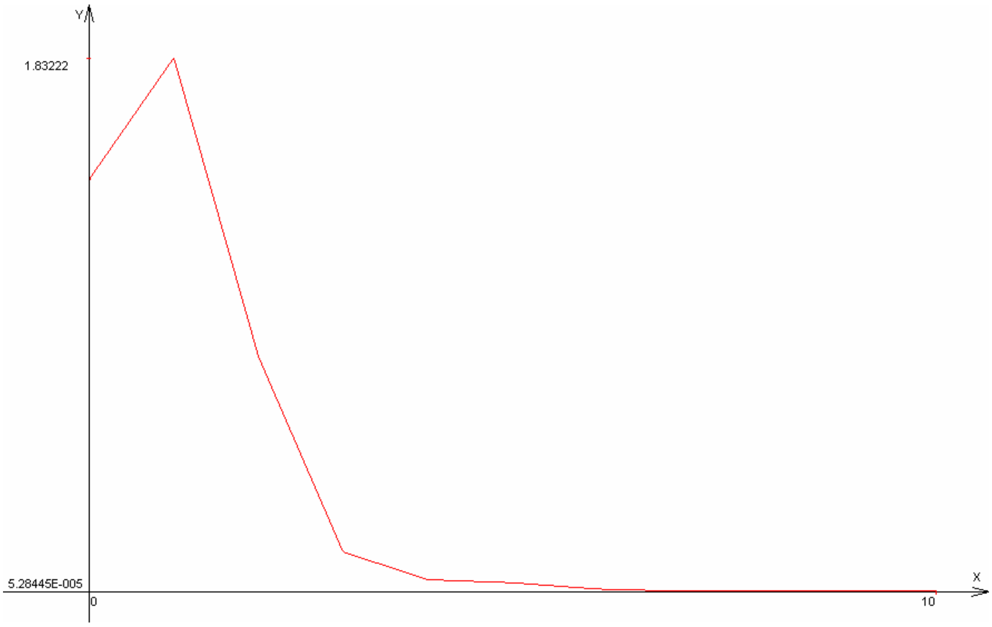
$$H = \begin{pmatrix} 1.41093 & -3.55556 \\ -3.55556 & 10.6667 \end{pmatrix}$$

$H = H^T > 0$ matrisi bulunur.

**Adım 4.** $X = (H+C)^{-1}B$ denkleminden $X = \begin{pmatrix} 0.658538 \\ 0.229965 \end{pmatrix}$

**Adım 5.** $K = -X^T A = \begin{pmatrix} -1.31708 & -0.77352 \end{pmatrix}$

$$A+BK = \begin{pmatrix} 0.682924 & 0.22648 \\ -1.31708 & -0.27352 \end{pmatrix}$$




Şekil-7.1

$A + BK$ matrisinin şekil 7.1'den $w^*$ - Schur kararlı olduğu görülmektedir.

Verilen örneğin MVC bilgisayar yazılımı ile hesaplanmasını verelim.

2, 1

A = 0, 0.5

1

B = 1

**Adım 1.**

QdaStab(100000,A,Z,Omega,Error)

Function QdaStab result = false

Error = 8.59024e-306

Omega = 2.29772

1.13427e+38, 7.56183e+37

Z = 7.56183e+37, 5.04122e+37

**Adım 2.**

Alpha=0.5 için Floating point overflow

Alpha = 0.25 için $w$ (alpha*Ain) < $w^*$

**Adım 3.**

AA=Alpha*Ain

0.125, -0.25

AA = 0, 0.5

D=2*(Ain*B)*!(Ain*B)

0.5, -2

D = -2, 8

dmleSolver(100000,!AA,D,$H,E)

Function dmleSolver result = true

E = 0

1.41093, -3.55556

H = -3.55556, 10.6667

**Adım 4.**

$C = B^*!B$

1, 1

C = 1, 1

Y=H+C

2.41093, -2.55556

Y = -2.55556, 11.6667

Smax=SpNorma(Ain,$Smax)

Mstar= (2*Smax*Smax*100000+1)/ro

2.02083e+06

inverse(2.02083e+06,Y,$Yin,E)

Function invers result = true

E = 2.55004e-16

0.540207, 0.118331

Yin = 0.118331, 0.111634

$X=Yin^*B$

0.658538

X = 0.229965

**Adım 5.**

$K= –!X^*A$

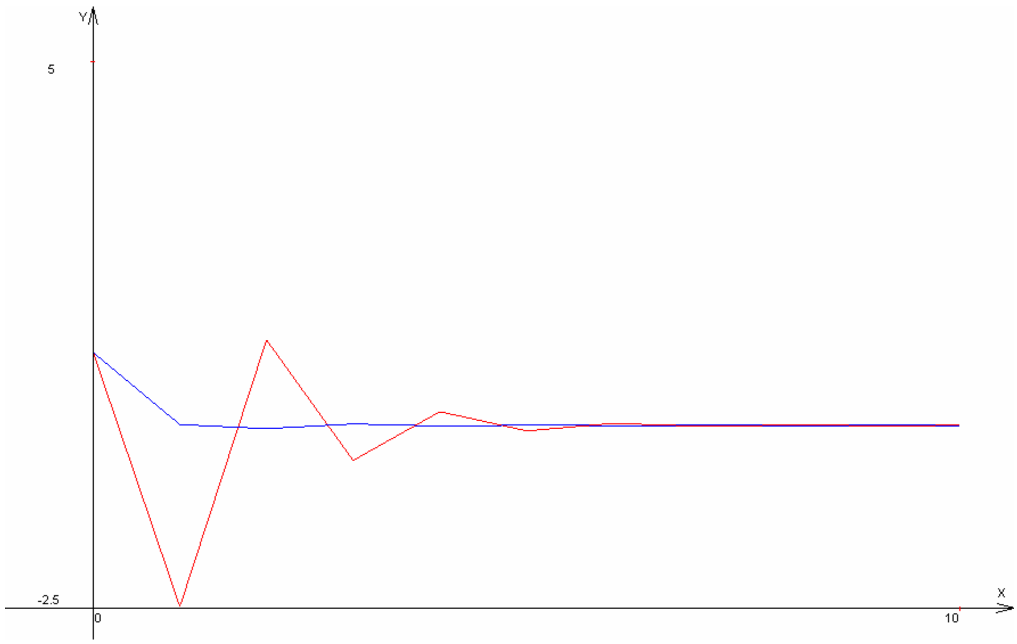
K = –1.31708, –0.77352

$A+B^*K$

0.682924, 0.22648

–1.31708, –0.27352

Şimdi $A+BK$ matrisinin grafiğini Discrete Cauchy Solver bilgisayar yazılımı ile verelim. Şekil 7.2'den $A+BK$ matrisinin Schur kararlı olduğu görülmektedir.




Şekil-7.2

Bu çalışmada; Sima (1981)'de verilen algoritma esas alınmıştır. Şöyle ki; $A$, N boyutlu, $\mu^*$- regüler, karesel, reel bir matris; $B$, N satır, m sütunlu, sütunları lineer bağımsız vektörler olan reel bir matris ve $\{x(n)\}$, $(n=0,1,2,...)$ N boyutlu bir sütun vektör dizisi olsun. $(A,B)$ $\rho$-kontrol edilebilir bir çift ise literatürde m noktadan kontrol sistemi olarak adlandırılan

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),\ n = 0,1,2,... \tag{7.1}$$

fark denklem sistemi için

$$n \to \infty,\ \ \| x(n) \| \to 0$$

şartını sağlayan bir $u(n) = Kx(n), (n = 0,1,2,...)$ kontrol dizisinde $K$ matrisini varlığını araştıran varsa bu $K$ matrisini hesaplayan bir algoritma ele alınmıştır.

Ancak bu şartların dışında kaldığı halde kararlı hale getirilebilen sistemlerde vardır.

**a)** A matrisi regüler olmayan bir matris olduğu halde (7.1) sistemi kararlı hale getirilebilir.

**Örnek 7.1.2** $x(n+1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}x(n)+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u(n),\ n=0,1,2,...$

denklem sistemi için

$$K=\begin{pmatrix}-0.8140 & -1.6279\end{pmatrix}$$

ve $u(n)=Kx(n),\ n=1,2,...$ biçiminde alınarak (7.1) kararlı hale getirilebilir.

**b)** $(A,B)$ kontrol edilebilir bir çift olmadığı halde (7.1) sistemi kararlı hale getirilebilir.

**Örnek 7.1.3.** $x(n+1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}x(n)+u(n)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\ n=0,1,2,...$

denklem sistemi için

$$K=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}$$

ve $u(n)=Kx(n),\ n=1,2,...$ biçiminde alınarak (7.1) kararlı hale getirilebilir.

Bu durumları da kapsayan algoritmalar üzerinde doktora sonrasında çalışılmaya devam edilecektir.

# KAYNAKLAR

**1.** Akın Ö. ve Bulgak H., 1998, *Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi*, Sel-Ün Yayınları, Konya.

**2.** Armstrong E.S., 1975, *An Extension of Bass' Algorithm for Stabilizing Linear Continuous Constant Systems*, IEEE Trans. Automat. Control, vol AC – 20, pp. 153-154.

**3.** Armstrong E.S., 1976, Rublein G.T., *A Stabilization Algorithm for Linear Discrete Constant Systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, pp.629-631.

**4.** Aydın, K., 1995, *Adi Lineer Periyodik Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Asimptotik Kararlılığı için Şart Sayısı*, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

**5.** Aydın K., Bulgak A., Bulgak H., 2003, *Bilgisayarla Matematik Analiz*, Sel-Ün yayınları, Konya.

**6.** Barnett, S., 1975, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Clarendon Press, Oxford.

**7.** Bronson R.,1970, *Matrix Methods An Introduction*, Fairleigh Dickinson Unv.

**8.** Bronson R., ( çeviri Hacısalihoğlu H.), 1989, *Matris İşlemleri Teori ve Problemleri*, Nobel Yayın Dağıtım Ltd. Şti. Ankara.

**9.** Bulgak H., 1995, *Algoritm for Solving the Lur'e-Riccati Matrix Equation with Guaranteed Accuracy*, Siberian Adv. in Mathematics, V.5,N:4, pp. 1-49.

**10.** Bulgakov A.Y., Godunov S.K., 1988, Circular Dichotomy of The Matrix Spectrum, Sibirsk. Mat. Zh., 29, No:5, 59-70.

**11.** Bulgak A., Bulgak H., 2001, *Lineer Cebir*, Sel- Ün yayınları, Konya.

**12.** Chatelin F., 1993, *Eigenvalues of Matrices*, John Wiley & Sons Ltd, England.

**13.** Elaydi S.N.,1996, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York.

**14.** Gantmaher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*, vol. 1-2, Chelsea, New York.
.

**15.** Godunov S.K., Antonov A.G., Kiriluk O.P., Kostin V.I., 1993, *Guaranteed Accuracy in Numerical Linear Algebra*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands.

**16.** Golub G.H., 1983, Van Loan C.F., *Matrix Computations*, The John Hopkins University Press.

**17.** Horn R., 1985, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

**18.** Kleinman D.L., 1970, *An Easy Way to Stabilize a Linear Constant System*, IEEE Trans. Automat. Control, vol AC-15, p.692.

**19.** Kleinman D.L., 1974, *Stabilizing a Discrete, Constant, Linear System with Application to Iterative Methods for Solving the Riccati Equation*, IEEE Trans. Automat. Control, vol AC-19, pp. 252- 254.

**20.** Kuo, B.C., (çeviren ve uyarlayan Prof. Dr. Atilla Bir), 2002, *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Yedinci Baskı, Literatür Yayınları, İstanbul.

**21.** Kwakernak H., Sivan R., 1972, *Lineear Optimal Control Systems*, New York.

**22.** La Salle J.P., 1986, *The Stability and Control of Discrete Processes*, Springer-Verlag.

**23.** Langenhop C.E., 1964 *On The Stabilization of Linear Systems*, Proc. Amer. Math. Soc. V. 15, no:5. P. 97-108.

**24.** Lipschutz S., 1978, *Theory and Problems of Linear algebra*, McGraw-Hill Int. Book Com. New York.

**25.** Lutkepohl H., 1996, *Handbook of Matrices*, John Wiley and Sons Ltd. Chichester, England.

**26.** Marcus M. and Minc H., 1964, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon Inc., Boston.

**27.** Rohn J., 1994, *Positive Defineteness and Stability of Interval Matrices*, Siam Journal on Matrix Analysis and Applications, 15(1), 175-184.

**28.** Sima V., 1981, *An Efficient Schur Method to Solve the Stabilizing Problem*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26, no 3, pp. 724-725

**29.** Son Y.I., Shim H., Park K., Seo J. H., 2000, *Stabilization of Linear Systems via Low Order Dynamic Output Feedback: A Passification Approach, Proceeding of the American Control Conference*, pp. 3822-3826, Chicago.

***30.*** Voicu M., Pastravanu O., *Generalized Matrix Diagonal Stability and Linear Dynamical Systems*, Linear Algebra and Its Applications 419(2006) 299–310.

**31.** Von Neumann I., Goldstine H., 1947, *Numerical Inverting of Matrices of High Order*, Bull. Amer. Math Soc., v.53, no:11, 1021-1099.

**32.** Wilkinson J.H., 1965, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendom Press Oxford.