T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# GENELLEŞTİRİLMİŞ *k*-HORADAM DİZİSİ ve MATRİS TEMSİLLERİ

**Yasin YAZLIK**

**DOKTORA TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Mart-2013**
**KONYA**

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

## GENELLEŞTİRİLMİŞ *k*-HORADAM DİZİSİ ve MATRİS TEMSİLLERİ


**Yasin YAZLIK**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA**



**2013, 69 Sayfa**

**Jüri**
**Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA**
**Prof. Dr. Durmuş BOZKURT**
**Prof. Dr. Aşır GENÇ**
**Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK**
**Doç. Dr. Bünyamin AYDIN**



Bu tezde öncelikle başlangıç şartları $H_{k,0}=a,\ H_{k,1}=b$ olmak üzere genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi, $H_{k,n+2}=f(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanmış ve bu dizinin temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu dizinin bazı kısmi toplam formülleri elde edilmiştir. Yine genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu farklı metotlarla elde edilmiştir. Daha sonra negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizileri tanımlanmış, bu sayılar ile pozitif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları arasındaki bağıntı verilmiştir.

Son bölümde ise elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından oluşan circulant matrisi, $\forall\, i,j=1,2,\ldots,n$ için, $C(H)=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}=\left(H_{k,(\mathrm{mod}(j-i,n))}\right)_{n\times n}$ şeklinde tanımlanmıştır. Daha sonra bu matrisin özdeğerleri, determinantı, tersi ve normları hesaplanmıştır. Son olarak, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından oluşan *r*-circulant matris tanımlanmış, bu matrisin normları için alt ve üst sınırlar verilerek determinant ve özdeğerleri hesaplanmıştır.



**Anahtar Kelimeler:** Circulant Matris, Determinant, Genelleştirilmiş *k*-Horadam Dizisi, Norm, Özdeğer.

# ABSTRACT

## Ph.D THESIS

## GENERALIZED *k*-HORADAM SEQUENCE and MATRIX REPRESENTATIONS

**Yasin YAZLIK**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELCUK UNIVERSITY DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**Advisor: Assist. Prof. Dr. Necati TASKARA**

**2013, 69 Pages**

**Jury**
**Advisor Assist. Prof. Dr. Necati TASKARA**
**Prof. Dr. Durmus BOZKURT**
**Prof. Dr. Asir GENC**
**Prof. Dr. Ahmet Sinan CEVIK**
**Assoc. Prof. Bunyamin AYDIN**

In this thesis, the generalized *k*-Horadam sequence $H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n}$ is defined by the recurrence relation with given its initial values $H_{k,0} = a,\ H_{k,1} = b,$ and then the main features of this sequence are analyzed. In addition, some of the partial sum formulas of this sequence are obtained. Moreover, the generating function of a generalized *k*-Horadam sequence is obtained via various methods. After that, by defining the generalized *k*-Horadam sequence having negatively subscripted, the correlation between negatively and positively subscripted the generalized *k*-Horadam sequences are presented.

In the last chapter, the circulant matrix whose entries are consisting of generalized *k*-Horadam numbers is defined by $C(H) = \left(c_{ij}\right)_{n\times n} = \left(H_{k,(\mathrm{mod}(j-i,n))}\right)_{n\times n}$, for $\forall\, i, j = 1,2,\ldots,n.$ Then, the eigenvalues, determinants, inverse, and norms of this matrix are calculated. Finally, the *r*-circulant matrix whose entries are consisting of generalized *k*-Horadam numbers is defined. The lower and upper bounds of the norms of this matrix are given. Also, the determinant and eigenvalues of this matrix are calculated.

**Keywords:** Circulant Matrix, Determinant, Generalized *k*-Horadam Sequence, Norm, Eigenvalue.

# ÖNSÖZ

Genelleştirilmiş *k*-Horadam Dizisi ve Matris Temsilleri adlı bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Yapılan tüm çalışmalarda bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA'aya saygı ve şükranlarımı sunarım. Hayatım boyunca emeklerini benden esirgemeyen ve bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Derya Özlem YAZLIK'a sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Doktora öğrenimim süresince burs desteği sağlayan TÜBİTAK- Bilim Adamı Yetiştirme Grubuna (BAYG) teşekkür ederim.

Yasin YAZLIK
KONYA-2013

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : reel sayılar kümesi, |
| $F_n$ | : $n$. Fibonacci sayısı, |
| $L_n$ | : $n$. Lucas sayısı, |
| $P_n$ | : $n$. Pell sayısı, |
| $Q_n$ | : $n$. Pell-Lucas saysı, |
| $q_n$ | : $n$. Modified Pell sayısı, |
| $J_n$ | : $n$. Jacobsthal saysı, |
| $j_n$ | : $n$. Jacobsthal Lucas sayısı, |
| $W_n$ | : $n$. Horadam sayısı, |
| $F_{k,n}$ | : $n$. $k$-Fibonacci sayısı, |
| $F_p(n)$ | : $n$. Fibonacci sayısı, |
| $F_{p,m}$ | : n. Fibonacci ve Lucas $p$-sayılarının $m$-genişlemesi |
| $g_n^i$ | : $i$. dizinin $n$. terimi, |
| $L_{k,n}$ | : $n$. $k$-Lucas sayısı, |
| $G_{k,n}$ | : $n$. Genelleştirilmiş $k$-Fibonacci sayısı, |
| $H_{k,n}$ | : $n$. Genelleştirilmiş $k$-Horadam sayısı, |
| $\|A\|_E$ | : $A$ matrisinin Euclidean (Frobenius) normu, |
| $\|A\|_2$ | : $A$ matrisinin spectral normu, |
| $\|A\|_1$ | : $A$ matrisinin maksimum sütun toplam normu, |
| $\|A\|_\infty$ | : $A$ matrisinin maksimum satır toplam normu, |
| $\|A\|_p$ | : $A$ matrisinin $l_p$ normu, |
| $c_1(A)$ | : $A$ matrisinin maksimum sütun uzunluk normu, |
| $r_1(A)$ | : $A$ matrisinin maksimum satır normu, |
| $\rho(A)$ | : $A$ matrisinin spectral yarıçapı, |
| $A_n$ | : $a_{ij}$ elemanlarına sahip genel bir $n$-kare matris, |
| $\overline{A}_n$ | : $A_n$ matrisinin eşleniği, |
| $A_n^T$ | : $A_n$ matrisinin transpozesi, |
| $A_n^*$ | : $A_n$ matrisinin eşlenik transpozesi, |
| $A_n^{-1}$ | : $A_n$ matrisinin tersi, |
| $I_n$ | : birim matris, |
| $A \oplus B$ | : $A$ ile $B$ matrislerinin direkt toplamı, |
| $A \circ B$ | : $A$ ile $B$ matrislerinin hadamard çarpımı, |

| | |
|---|---|
| $\lambda_k$ | : $A_n$ matrisinin *k*. öz değeri, |
| $w_k$ | : birimin *n*. dereceden *k*. kökü, |
| $C(x)$ | : $c_{ij}$ elemanlarına sahip genel bir *n*-kare circulanat matris |
| $C_r(x)$ | : $c_{ij}$ elemanlarına sahip genel bir *n*-kare *r*-circulant matris |

# 1. GİRİŞ

İnsanlık tarihinin başlangıcından beri, evrendeki düzeni keşfetme güdüsü devamlı var olmuştur. Geçen on binlerce yıl içinde yapılan tüm çalışmalar, evrenin alelâde bir düzen içinde yaratılmadığını, insan aklının alamayacağı kadar sistematik bir ölçü içerisinde yaratıldığını ortaya koymuştur. Evrenin bu sistemi, kuşkusuz sayılar üzerine oturtulmuştur. Var olan her şey, bir sayıya karşılık gelmektedir. Felsefik boyutta düşünüldüğünde, varoluşun ve doğa yasalarının temelinde de bu sayılar bulunmaktadır. Bu anlamda evrene hâkim olan sayıların yasası, kuşkusuz bizleri yaratanın matematik düzenini ortaya koyacaktır. İşte bu düzeni görmemize yardımcı olacak en önemli ipuçlarından biri altın orandır. Sanatta ve matematikte çok kez karşılaşabileceğimiz bu oran, aslında basit bir kural üzerine oturtulmuştur. Fakat gözlemleyebildiğimiz bütün varlık aleminde bu oranın geçerli ve tutarlı olarak göze çarpması, insanları şaşkına çevirecek kadar ciddi bir sistemi ortaya koymaktadır. Evrenin var oluşundan bu yana tutarlı olarak bütün varlıklarda 1,618…′e karşılık gelen bir oranın bulunması, dünyaca ünlü matematikçilerin de hayranlıkla incelediği ve kendi çalışmalarında kullandıkları bir konu alanı olmuştur. Bu şekilde sayı dizilerini incelemek; Toros Dağları'nın kıvrımından, Leanardo da Vinci tarafından yapılan Mona Lisa tablosunun boyu ile eni arasındaki orana, kaşımızla gözümüz arasındaki uzaklığın birbirine oranına, dipten başlayarak uca doğru ilerleyen kıvrımları bulunan deniz kabuğuna, kozalağın içindeki merkez noktadan dışarıya doğru spiral biçiminde uzayan her bir tanenin eğrilik açısına, DNA'nın düşey doğrultusunda iç içe açılmış iki ayrı sarmalların uzunlukları 34 angström, genişlikleri 21 angtröm olup, bunların birbirine oranında olduğu gibi, tıpkı fillerin dişlerindeki sarmal yapılarından, geyiklerin boynuzlarındaki çıkıntılara kadar bizleri saran yalın şeylerin sayısız büyüleyici gizemlerine götürebilmektedir(Kutlu, 2011). Bununla birlikte sayı dizileri, günümüz bilim dünyasında yaklaşım teoride, şifre biliminde, bilgisayar ile grafik çizimlerinde (Mcllory, 1992), zaman serileri analizinde (Box ve Jenkins, 1970) vb. alanda sıkça kullanılmaktadır.

Son yıllarda, sayı dizilerinden yararlanarak elde edilen özel matrisler üzerine araştırmalar yapılmaktadır. Bunlardan en önemlilerinden birisi circulant matrislerdir. Bu matrislerin sayısal analiz, matris ayrışımı, optimizasyon, kontrol teori, sayısal görüntü işleme, yapısal bilgisayar, fizik teori, matematiksel istatistik, kod teorisi gibi modern teknoloji alanlarında geniş uygulamaları vardır (Lu ve Ark., 2010).

## 1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, elemanları keyfi bir parametrenin polinomları olan genelleştirilmiş $k$-Horadam dizisini tanımlayarak, bu dizinin özelliklerini araştırmaktır. Ayrıca bu sayı dizileri kullanılarak, elemanları genelleştirilmiş $k$-Horadam sayıları olan circulant matrislerin normları, öz değerleri, determinantı ve tersini hesaplamaktır. Çalışma sonunda elde edilen tüm veriler aslında literatürde yer alan ikinci mertebeden özel sayı dizilerinin bir genellemesidir.

## 1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmanın bu kısmında, birçok matematikçinin çalışma konusu olmuş ve uygulama alanları geniş olan rekürans ilişkili sayı dizileri ve sayı dizileri yardımıyla tanımlanan circulant matrislerin normları üzerine literatürde yapılmış olan çalışmalardan bahsedilecektir.

**Horadam (1965),** "*Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*" isimli çalışmasında Horadam dizisini tanımlamış, tanımlanan dizinin genel özelliklerini incelemiştir.

**Lind (1970),** *"A Fibonacci circulant"* isimli çalışmasında elemanları Fibonacci sayıları olan circulant ve ters circulant matrisleri tanımlayarak, bu matrislerin determinantlarını birimin $n$. dereceden pirimitif kökünü kullanarak elde etmiştir.

**Davis (1979),** *"Circulant Matrices" isimli kitabında* circulant matrislerle ilgili genel bilgiler verilerek, circulant matris çeşitlerini, onların özelliklerini ve bazı geometrik uygulamaları ele alınmıştır.

**Horadam (1994),** *"Applications of Modified Pell Numbers to Representations"* isimli çalışmasında Modified Pell dizisini tanımlayarak, Modified Pell dizilerinin özelliklerini incelemiştir. Pozitif ve negatif tamsayıların Modified Pell dizileri ile temsilleri bulunmuştur. Ayrıca Modified Pell dizisi için MinMax dizisini elde etmiş ve bu dizinin özelliklerini incelemiştir.

**Horadam (1996),** *"Jacobsthal Representation Numbers"* isimli çalışmasında Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarını tanımlamış ve bu sayıların önemini, birbirleri arasındaki ilişkiyi vermiştir. Ayrıca, bu dizilerin bazı özellikleri de elde edilmiştir.

**Karner ve ark. (2003),** "*Spectral Decomposition of Real Circulant Matrices*" isimli makalesinde sağ circulant matris, sol circulant matris, ters sağ circulant matris ve ters sol circulant matris olarak tanımlanan, circulant matrislerin dört tipi için singüler değer ayrışımını ve spektral ayrışımını incelemişlerdir.

**Mansour (2004),** "*A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence*" isimli çalışmasında Horadam sayılarının kuvvetlerinin üreteç fonksiyonları için bir formül elde etmiştir. Yani; $H_k\left(x;p,q,a,b\right)=H_k(x)=\sum_{n\geq 0} W_n^k x^n$ ifadesini formülize etmiştir.

**Solak (2005)**, "*On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*" isimli makalesinde elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral ve Euclidean normları için sınırlar elde etmiştir.

**Kocer (2007)**, "*Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Jacobstahal and Jacobsthal-Lucas numbers*" isimli makalesinde modified Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının bazı özelliklerini vermiştir. Ayrıca bu dizilerin circulant, negacyclic ve semicirculant matrisleri tanımlayıp, bu matrislerin normlarını, öz değerlerini ve determinantlarını elde etmiştir.

**Cerin and Gianella (2007),** "*On Sums of Pell Numbers*" isimli çalışmalarında Pell sayılarının; çift ve tek çarpımlarının toplamları, çift ve tek kareleri toplamları, çift, tek ve ardışık toplamlar için açık formüller vermişlerdir.

**Falcon ve Plaza (2007)**, *"On the Fibonacci k-numbers"* isimli çalışmalarında Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak *k*-Fibonacci sayı dizisini tanımlamışlardır. Bu tanımlanan dizi, klasik Fibonacci ve Pell sayılarının her ikisininde genelleştirilmesidir. $\left\{F_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *n*. *k*-Fibonacci sayısı 4-triangle longest-edge (4TLE) paylaşımı yönteminde kullanılan iki geometriksel uygulama üzerinde çalışma yapılırken bulunmuştur. Ayrıca, bu sayıların çoğu özellikleri direkt olarak buradan oluşturulan matris kullanılarak elde edilmiştir.

**Yalciner (2008),** "*Spectral Norms of Some Special Matrices*" isimli çalışmasında elemanları Catalan sayılarından oluşan circulant matrisi tanıplayıp, bu matrisin spectral normları için sınırlar elde etmiştir.

**Falcon ve Plaza (2009)**, "*On k-Fibonacci numbers of arithmetic indexes*" isimli çalışmalarında indisleri aritmetik dizi olan *k*-Fibonacci sayılarının toplamları elde edilmiştir. Böylece bu tür sayıların toplamları için çeşitli formüller elde edilmesine olanak sağlamışlardır.

**Horzum ve Kocer (2009)**, "*On some properties of Horadam polynomials*" isimli çalışmalarında Horadam polinom dizisini tanımlamışlardır. Ayrıca Horadam polinomlarının bazı özelliklerini sunmuşlardır.

**Taskara ve Ark. (2010)**, "*On the properties of Lucas numbers with binomial coefficients*" isimli çalışmalarında yeni bir yolla binomial katsayılı Lucas sayılarının bazı yeni özelliklerini Lucas sayılarını yazarak elde etmişlerdir.

**Shen ve Cen (2010)**, "*On the bounds fort he norms of r-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*" isimli çalışmada elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan $A = C_r\left(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}\right)$ ve $B = C_r\left(L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}\right)$ *r*-circulant matrislerin spektral normları için sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca *A* ve *B* matrislerinin Kronecker ve Hadamard çarpımlarının spectral normları için bazı sınırlar elde edilmiştir.

**Shen ve Cen (2010)**, "*On the spectral norms of r-circulant matrices with the k-Fibonacci and k-Lucas numbers*" isimli çalışmada ise elemanları *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarından oluşan $A = C_r\left(F_{k,0}, F_{k,1}, \ldots, F_{k,n-1}\right)$ ve $B = C_r\left(L_{k,0}, L_{k,1}, \ldots, L_{k,n-1}\right)$ *r*-circulant matrislerin spektral normları için sınırlar elde edilmiştir.

**Falcon (2011)**, "*On the k-Lucas numbers*" isimli çalışmasında *k*-Lucas dizisini tanımlamış, tanımlanan dizinin özelliklerini incelemiş ve bu dizinin, *k*-Fibonacci sayıları ile arasındaki ilişkilerini sunmuştur.

**Uslu ve Ark. (2011),** "*The generalized k-Fibonacci and k-Lucas numbers*" isimli çalışmalarında genelleştirilmiş *k*-Fibonacci dizisini tanımlamış ve bu dizinin özelliklerini incelemişlerdir.

**Yayenie (2011),** "*A note a generalized Fibonacci sequences*" isimli çalışmasında kuadratik irrasyonellerin sürekli kesirleri ve kelimeler üzerindeki kombinatorikler veya dinamik sistemler teorisinin çalışılmasında doğal bir yolla ortaya çıkan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $a, b \neq 0$ olmak üzere

$$\mathrm{q}_0 = 0,\ \mathrm{q}_1 = 1 \text{ için } \mathrm{q}_{n+2} = \begin{cases} \mathrm{aq}_{n+1} + \mathrm{q}_n & \text{n çift ise} \\ \mathrm{bq}_{n+1} + \mathrm{q}_n & \text{n tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlamış ve bu dizilerin genel özelliklerini incelemiştir.

**İpek (2011),** "*On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries*" isimli çalışmasında [Solak, S., 2005, On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computations* 160, 125-132] yaptığı çalışmayı geliştirerek elemanları

Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral normlarını hesaplamıştır.

**Uslu ve Ark. (2011),** "*The relations among k-Fibonacci, k-Lucas and generalized k-Fibonacci and k-Lucas numbers and the spectral norms of the matrices of involving these numbers*" isimli makalede $k$-Fibonacci, $k$-Lucas ve genelleştirilmiş $k$-Fibonacci sayıları arasında ki ilişkiyi elde etmişlerdir. Daha sonra $k$-Lucas ve genelleştirilmiş $k$-Fibonacci sayılarını içeren circulant matrisleri tanımlamışlardır. Son olarakta bu matrislerin spectral normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir.

**Shen ve Ark. (2011),** "*On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers*" isimli çalışmada elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin determinantlarını ve terslerini, Fibonacci ve Lucas sayılarıyla elde etmişlerdir.

**Yazlik ve Taskara (2012)**, "*A note on generalized k-Horadam sequence*" isimli çalışmada Genelleştirilmiş $k$-Horadam dizilerini tanımlamışlar, bu dizinin bazı özelliklerini determinant yardımıyla ispat etmişlerdir.

**Yazlik ve Taskara (2012)**, "*Spectral norm, eigenvalues and determinant of circulant matrix involving generalized k-Horadam numbers*" isimli çalışmarında elemanları genelleştirilmiş $k$-Horadam sayılarından oluşan circulant matrisi tanımlamışlar, bu matrisin spectral normunu, öz değerlerini ve determinantını hesaplamıştır.

**Bozkurt ve Tam (2012)**, "*Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers*" isimli çalışmalarında elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin determinantlarını ve terslerini, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarıyla elde etmişlerdir.

### 1.3. Temel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmanın temel sonuçlarıyla ilgili 2. ve 3. bölümde yararlanılacak temel kavramlar verilecektir.

#### 1.3.1. Sayı dizileri

Literatürde çalışılan sayı dizileri, başlangıç değerleri, mertebesi ve rekürans bağıntısının katsayılarına göre dört farklı şekilde sınıflandırılabilir. Burada II., III. ve IV. tip sayı dizileri, I. tip sayı dizilerinin birkaçının ya da hepsinin bazı kurallar sağlatılarak genellemeleri olarak elde edilebilir. Fakat bazı durumlarda bu genellemeler elde edilemeyebilir. Örneğin; $n \in \mathbb{N}$ için başlangıç şartları $P_{-2} = 0, P_{-1} = 0, P_0 = 1$ olmak üzere $P_{n+1} = P_{n-1} + P_{n-2}$ ile verilen Padovan sayıları(Shannon ve Ark., 2006) 3. mertebeden rekürans bağıntısına sahip iken I. tip sayı dizilerinin bir genellemesi değildir.

### 1.3.1.1. I. Tip sayı dizileri

Bu tür sayı dizileri başlangıç şartları ve rekürans bağıntısının katsayıları sabit olan ve ikinci mertebeden rekürans bağıntısı ile ifade edilebilen sayı dizilerdir. Şimdi bu sayı dizilerinden iyi bilinen birkaç tanesini açıklayalım.

**Tanım 1.3.1.1.1** (Vajda,1989; Koshy, 2001) $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ olmak üzere,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad (1.3.1.1.1)$$

ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Fibonacci dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Fibonacci sayıları* denir.

$(1.3.1.1.1)$ ile verilen denklem, sabit katsayılı 2. mertebeden bir fark denklemi olup, karakteristik denklemi $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$'dir. Karakteristik denklemin kökleri ise $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ‘dır. *n*. Fibonacci sayısı, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklinde bir formül ile ifade edilmekte ve bu formüle de Fibonacci sayılarının Binet Formülü denilmektedir. Binet formülünden hareketle, $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$ olduğu kolayca görülmektedir. Birçok matematikçi ve bilim insanının yıllar boyu ilgisini çeken ve araştırmalara konu olan $\alpha = 1{,}618033988749894...$ sayısı “*Altın oran*”, “*Kutsal oran*”, “*Mükemmel oran*” gibi isimler atfedilmektedir. Bunun nedeni bu orana göre yapılan ve oluşturulan resimlerin, mimari eserlerin, bir dikdörtgenin veya doğada bulunan bir çiçeğin yapraklarının insanın algılayabildiği en güzel göz nizamı olmasındandır. Tabiattaki canlılarda, insan vücudunda ve mimari yapılarda altın oranı görmek mümkündür.

**Tanım 1.3.1.1.2** (Koshy, 2001) $L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

şeklinde tanımlanan $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Lucas dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Lucas sayıları* denir.

Rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Lucas sayıları $L_{-n} = (-1)^n L_n$ formülü ile verilebilir. Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir. Üreteç fonksiyonu yardımıyla $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere Lucas sayılarına ait Binet Formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde elde edilir.

Fibonacci sayıları ile Lucas sayıları arasında $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ ve $F_{2n} = F_n L_n$ gibi birçok bağıntı mevcuttur.

**Tanım 1.3.1.1.3** (Horadam, 1971) $P_0 = 0,\ P_1 = 1$ olmak üzere,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

ile tanımlanan $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Pell dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Pell sayıları* denir.

Pell dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Pell sayıları $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ formülü ile verilebilir. Pell sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

şeklindedir. Üreteç fonksiyonu yardımıyla $\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere Pell sayılarının Binet Formülü

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

şeklinde verilir.

**Tanım 1.3.1.1.4** (Horadam, 1971) $Q_0 = 2,\ Q_1 = 2$ olmak üzere,

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$$

şeklinde tanımlanan $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Pell-Lucas dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Pell-Lucas sayıları* denir.

Pell-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Pell sayıları $Q_{-n}=(-1)^n Q_n$ formülü ile verilebilir. Pell-Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$$

şeklindedir. Üreteç fonksiyonu yardımıyla $\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere Pell sayılarının Binet Formülü

$$Q_n = \gamma^n + \delta^n$$

şeklinde verilir. Pell sayıları ile Pell-Lucas sayıları arasında

$$Q_n = \frac{P_{n+1}+P_{n-1}}{2}$$

bağıntısı mevcuttur.

**Tanım 1.3.1.1.5** (Horadam, 1994) $q_0=1,\ q_1=1$ olmak üzere,

$$q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$$

şeklinde tanımlanan $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *modified Pell dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *modified Pell sayıları* denir.

Modified Pell dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Pell sayıları $q_{-n}=(-1)^n q_n$ formülü ile verilebilir. Modified Pell sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \frac{1-x}{1-2x-x^2}$$

şeklindedir. Üreteç fonksiyonu yardımıyla $\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere modified Pell sayılarının Binet Formülü

$$q_n = \frac{\gamma^n+\delta^n}{\gamma+\delta}$$

şeklinde verilir. Modified Pell sayıları ile Pell sayıları arasında ki bağıntı

$$q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

modified Pell sayıları ile Pell-Lucas sayıları arasında ki bağıntı ise

$$q_n = Q_n - Q_{n-1}$$

Şeklindedir.

**Tanım 1.3.1.1.6** (Horadam, 1996) $J_0 = 0,\ J_1 = 1$ olmak üzere,

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

şeklinde tanımlanan $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Jacobsthal dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Jacobsthal sayıları* denir.

Jacobsthal dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Jacobsthal sayıları $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_n$ formülü ile verilebilir. Jacobsthal sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklindedir. $\phi = 2$ ve $\varphi = -1$ olmak üzere Jacobsthal sayılarının Binet Formülü

$$J_n = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\phi - \varphi}$$

şeklinde verilir.

**Tanım 1.3.1.1.7** (Horadam, 1996) $j_0 = 2,\ j_1 = 1$ olmak üzere,

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$$

şeklinde tanımlanan $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Jacobsthal-Lucas dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Jacobsthal-Lucas sayıları* denir.

Jacobsthal-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Jacobsthal sayıları $j_{-n} = \frac{(-1)^n}{2^n} j_n$ formülü ile verilebilir. Jacobsthal sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklindedir. $\phi = 2$ ve $\varphi = -1$ olmak üzere Jacobsthal sayılarının Binet Formülü

$$j_n = \phi^n + \varphi^n$$

şeklinde verilir. Jacobsthal sayıları ile Jacobsthal-Lucas sayıları arasında $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$ ve $j_n J_n = J_{2n}$ gibi birçok bağıntı mevcuttur.

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, modified Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının ilk birkaç terimi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | … |
| $L_n$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | … |
| $P_n$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 | 2378 | … |
| $Q_n$ | 2 | 2 | 6 | 14 | 34 | 82 | 198 | 478 | 1154 | 2786 | 6726 | … |
| $q_n$ | 1 | 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | 239 | 577 | 1393 | 3363 | … |
| $J_n$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 | 11 | 21 | 43 | 85 | 171 | 341 | … |
| $j_n$ | 2 | 1 | 5 | 7 | 17 | 31 | 65 | 127 | 257 | 511 | 1025 | … |

### 1.3.1.2. II. Tip sayı dizileri

Bu tür sayı dizilerinde başlangıç koşulları keyfi reel ya da kompleks sayılar ya da rekürans bağıntısının katsayılarından en az biri bilinmeyen olan ve ikinci mertebeden rekürans bağıntısı ile ifade edilebilen sayı dizilerdir. Yani, bu tür sayı dizilerinin elemanları en az bir bilinmeyene bağlıdır. Şimdi bu sayı dizilerinden iyi bilinen birkaç tanesini açıklayalım.

**Tanım 1.3.1.2.1** (Horadam, 1965) $a,b,p,q \in \mathbb{Z}$ ve $W_0 = a, W_1 = b$ olmak üzere,

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n \qquad (1.3.1.2.1)$$

şeklinde tanımlanan $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Horadam dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Horadam sayıları* denir.

$(1.3.1.2.1)$'de verilen rekürens bağıntısında, *p, q, a* ve *b* uygun değerler verilirse, I. tip sayı dizileri elde edilir. Örneğin $p = q = 1, a = 0, b = 1$ için Fibonacci dizisi elde edilir. Horadam sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = \frac{a + x(b - pa)}{1 - px + qx^2}$$

şeklindedir. $\psi = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ve $\eta = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ olmak üzere $A = \dfrac{b - a\eta}{\psi - \eta}$ ve $B = \dfrac{b - a\psi}{\psi - \eta}$ için Horadam sayılarının Binet Formülü

$$W_n = A\psi^n + B\eta^n$$

şeklinde verilir.

**Tanım 1.3.1.2.2** (Falcon & Plaza, 2007) $\forall k > 0$ reel sayısı için $F_{k,0} = 0,\ F_{k,1} = 1$ olmak üzere,

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n} \qquad (1.3.1.2.2)$$

ile tanımlanan $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *k-Fibonacci dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *k-Fibonacci sayıları* denir.

*k*-Fibonacci, Fibonacci dizisininin bir genellemesi olup, $k \geq 1$ tamsayısı için farklı diziler elde edilir. Eğer $(1.3.1.2.2)$'de $k = 1$ alınırsa, Fibonacci dizisi, $k = 2$ alınırsa Pell dizisi, $k = 3$ alınırsa başlangıç şartları $F_{3,0} = 0,\ F_{3,1} = 1$ olmak üzere

$$F_{3,n+2} = 3F_{3,n+1} + F_{3,n}$$

$\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi elde edilir. $(1.3.1.2.2)$'nin rekürans bağıntısının karakteristik denklemi, $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri, $\alpha_k = \dfrac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_k = -\dfrac{1}{\alpha_k} = \dfrac{k - \sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere *k*-Fibonacci saylarının Binet formülü

$$F_{k,n} = \frac{\alpha_k^n - \beta_k^n}{\alpha_k - \beta_k}$$

şeklindedir. Burada karakteristik denklemin pozitif kökü olan $\alpha_k$'ya *k-altın oran* adı verilir. $k = 1,2,3$ değerleri için $\alpha_k$ özel olarak isimlendirilmiştir. Yani, $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran, $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ gümüş oran ve $\alpha_3 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ bronz oran olarak tanımlamıştır.

**Tanım 1.3.1.2.3** (Falcon, 2011) $\forall k > 0$ reel sayısı için $L_{k,0} = 2,\ L_{k,1} = k$ olmak üzere,

$$L_{k,n+2} = kL_{k,n+1} + L_{k,n} \qquad (1.3.1.2.3)$$

ile tanımlanan $\{L_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *k-Lucas dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *k-Lucas sayıları* denir.

*k*-Lucas, Lucas sayılarının bir genellemesi olup, $k \geq 1$ tamsayısı için farklı diziler elde edilecektir. $(1.3.1.2.3)$'de $k = 1$ alınırsa Lucas dizisi, $k = 2$ alınırsa Pell-

Lucas dizisi elde edilir. $\alpha_k=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_k=-\dfrac{1}{\alpha_k}=\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere $k$-Lucas saylarının Binet formülü

$$L_{k,n}=\alpha_k^n+\beta_k^n$$

şeklindedir.

**Tanım 1.3.1.2.4** (Uslu & Ark, 2011) $\forall k>0$ reel sayısı için $G_{k,0}=a,\ G_{k,1}=b$ olmak üzere,

$$G_{k,n+2}=kG_{k,n+1}+G_{k,n}$$

ile tanımlanan $\left\{G_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *genelleştirilmiş k-Fibonacci dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *genelleştirilmiş k-Fibonacci sayıları* denir.

$$\alpha_k=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},\quad \beta_k=-\frac{1}{\alpha_k}=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2},\quad C=b-a\beta_k \quad \text{ve} \quad D=b-a\alpha_k$$

olmak üzere genelleştirilmiş $k$-Fibonacci saylarının Binet formülü

$$G_{k,n}=\frac{C\alpha_k^n-D\beta_k^n}{\alpha_k-\beta_k}$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş $k$-Fibonacci sayıları, $k$-Fibonacci ve $k$-Lucas sayıları yardımıyla ifade edilebilmektedir. Örneğin, $k$-Fibonacci dizisi ile; $n\geq 1$ için $G_{k,n}=aF_{k,n-1}+bF_{k,n}$, $k$-Lucas dizisi ile de $G_{k,n}=\dfrac{a\left(2L_{k,n}-L_{k,n-1}\right)+b\left(2L_{k,n+1}-L_{k,n}\right)}{2k+3}$ ifade edilmektedir.

### 1.3.1.3. III. Tip sayı dizileri

Bu tür sayı dizileri başlangıç şartları ve rekürans bağıntısının katsayıları sabit olan ve $k$. $(k>2)$ mertebeden rekürans bağıntısı ile ifade edilebilen sayı dizileridir. Şimdi bu sayı dizilerine aşağıdaki örnekleri verelim.

**Tanım 1.3.1.3.1** $p=1,2,\ldots$ ve $n>p$ için $F_p(0)=0,\ F_p(1)=F_p(2)=\ldots=F_p(p)=1$ olmak üzere

$$F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-p-1)$$

ile tanımlanan $\{F_{p,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *Fibonacci p-dizisi* bu dizinin elemanlarına da diziye *Fibonacci p-sayıları* denir. $p=1$ için Fibonacci $p$-sayıları, geleneksel Fibonacci dizisine indirgenir (Stakhov, 1977).

**Tanım 1.3.1.3.2** $1\le j\le k$ için $c_j$ katsayı sabiti olmak üzere başlangıç koşulları

$$g_n^i=\begin{cases}1, & n=1-i\\ 0, & diğer\end{cases}, 1-k\le n\le 0$$

olmak üzere

$$g_n^i=\sum_{j=1}^{k}c_j g_{n-j}^i,\ n>0,\ 1\le i\le k$$

ile tanımlanan diziye *Genelleştirilmiş k-mertebeden Fibonacci sayılarının k dizisi* denir. $g_n^i$, *i.* dizinin *n.* terimidir. $k=2,\ c_j=1$ için genelleştirilmiş $k$-mertebeden Fibonacci sayılarının $k$ dizisi, geleneksel Fibonacci dizisine indirgenir (Er, 1984).

### 1.3.1.4. IV. Tip sayı dizileri

Bu tür sayı dizilerinde başlangıç koşulları keyfi reel ya da kompleks sayılar ya da rekürans bağıntısının katsayılarından en az biri bilinmeyen olan ve *k.* $(k>2)$ mertebeden rekürans bağıntısı ile ifade edilebilen sayı dizilerdir. Yani, bu tür sayı dizilerinin elemanları en az bir bilinmeyene bağlıdır. Şimdi bu sayı dizilerine aşağıdaki örneği verelim.

**Tanım 1.3.1.4.1** $p\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{R}^+$ için $a_i,\ i=1,2,\ldots,p+1$ reel ya da kompleks değerler olmak üzere başlangıç koşulları $F_{p,m}(1)=a_1,\ F_{p,m}(2)=a_2,\ldots,F_{p,m}(p+1)=a_{p+1}$ olan

$$F_{p,m}(n)=mF_{p,m}(n-1)+F_{p,m}(n-p-1)$$

ile tanımlanan sayı dizisine *Fibonacci ve Lucas p-sayılarının m-genişlemesi* denir (Gokcen ve Ark., 2009).

### 1.3.2. Matris normları

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonu ile; dizilerin yakınsaklığı, fonksiyonların sürekliliği, limitleri ve verilen bir reel sayı için bu sayıya en yakın tamsayıyı bulma gibi yaklaşım problemleri çözülebilir. Aynı şeyler $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı üzerinde tanımlanan norm için de geçerlidir. Normlar, singüler değer ayrışımında(SVD), ***Ax=b*** probleminin analizinde, vektör dizilerinin yakınsaklığında, dönüşümlerin sürekliliği ve limitlerinde, kararlılık teorisinde, yaklaşım problemlerinde (bu tür problemler genellikle karşımıza analiz, Lie teori, nümerik analiz, diferansiyel denklemler, Markov zincirleri, ekonometri, biyoloji ve sosyolojide popülasyon modelleme, fizik ve kimyada denge durumları gibi) ortaya çıkar.

Bu bölümde öncelikle vektör normları üzerinde, daha sonra da çalışmamızda kullanacağımız matris normları ile ilgili tanımlar, teoremler ve bazı temel kavramlar verilecektir.

**Tanım 1.3.2.1** $F$ reel ya da kompleks sayılar cismi ve $V$, $F$ cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olmak üzere $\|.\|: V \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ şeklinde ifade edilen ve

**i)** $\forall v \in V$ için $\|v\| \geq 0$ ve $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

**ii)** $\alpha \in F$ ve $v \in V$ için $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,

**iii)** $u, v \in V$ için $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

aksiyomlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşümüne, *vektör normu*, üzerinde norm tanımlanmış bir vektör uzayına da *normlu uzay* denir (Horn & Johnson, 1985).

**Tanım 1.3.2.2** $M_{mn}(F)$, elemanları $F$ cisminden alınan $m \times n$ matrislerin kümesi ve $A, B \in M_{mn}(F)$, $\alpha \in F$ olmak üzere,

**i)** $0 \leq \|A\|$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

**ii)** $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ $(\alpha \in F)$

**iii)** $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

**iv)** $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

aksiyomlarını sağlayan $\|.\|: M_{mn}(F) \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ dönüşüme *matris normu* denir. Bir $A$ matrisini normu genel anlamda $\|A\|$ ile gösterilir. Eğer bu aksiyomlardan ilk üçü sağlanıyorsa norma *genelleştirilmiş matris normu* denir (Horn & Johnson, 1985).

$x$ herhangi bir vektör olmak üzere matris normları ile vektör normları arasında $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ şeklinde bir ilişki vardır. Bu eşitsizliği sağlayan $\|A\|$ matris normuna, $\|x\|$ *vektör normu ile uygundur* denir (Horn & Johnson, 1985).

**Tanım 1.3.2.3** *A,* $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere

**i)** $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ifadesine *A* matrisinin *Euclidean (Frobenius) normu,*

**ii)** $A^* = (\overline{A})^T$ için, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)} = \sigma_{max}(A)$ ifadesine ise *A* matrisinin *Spectral normu,*

**iii)** $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ ifadesine *A* matrisinin *maximum sütun toplam normu,*

**iv)** $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ ifadesine *A* matrisinin *maximum satır toplam normu,*

***v)*** $1 \le p < \infty$ için, $\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{1/p}$ ifadesine *A* matrisinin $l_p$ *normu,*

**vi)** $c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ifadesine *A* matrisinin *maksimum sütun uzunluk normu*,

**vii)** $r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ifadesine *A* matrisinin *maksimum satır uzunluk normu,*

denir(Horn & Johnson, 1985).

*A,* $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere Tanım 1.3.2.3'de verilen normlar arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

**i)** $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$ $\quad(1.3.2.1)$

**ii)** $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$ $\quad(1.3.2.2)$

**iii)** $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$ $\quad(1.3.2.3)$

**iv)** $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$ $\quad(1.3.2.4)$

**Tanım 1.3.2.4** $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $\lambda_i$'ler *A* matrisinin öz değerleri olmak üzere *A* matrisinin mutlak değerce en büyük öz değerine *A* matrisinin *spectral yarıçapı* denir ve $\rho(A) = \max_{1\le i\le n}(|\lambda_i|)$ şeklinde gösterilir(Horn & Johnson, 1985).

**Teorem 1.3.2.5** $\rho(A)$, bir $A$ matrisinin spectral yarıçapı ve $\|A\|$ herhangi bir matris normu olmak üzere $\rho(A) \leq \|A\|$ 'dır(Horn & Johnson, 1985).

**Tanım 1.3.2.6** $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{ij}\right]$, $n\times n$ tipinde matrisler olmak üzere $A \circ B=\left[a_{ij}.b_{ij}\right]$ şeklinde verilen çarpıma $A$ ve $B$ matrislerinin *Hadamard çarpımı* denir(Horn & Johnson, 1985).

**Teorem 1.3.2.7** $A$, $B$ ve $C$, $n\times n$ tipinde matrisler olmak üzere, eğer $A=B\circ C$ ise,

$$\|A\|_2 \leq r_1(B)c_1(C)$$

dir (Mathias, 1990).

### 1.3.3. Circulant matrisler

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız circulant ve *r*-circulant matrisler ile ilgili tanımlar ve teoremler verilecektir.

**Tanım 1.3.3.1** $x=\left(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\right)^T$ olsun. $ij-$elemanı $c_{ij}=x_{j-i(\bmod n)}$ olan $n\times n$ tipindeki $C(x)$ matrisine *circulant matris* denir. $n\times n$ tipindeki $C(x)$ circulant matrisi

$$C(x)=\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \tag{1.3.3.1}$$

şeklindedir. Circulant matrislerde her bir satırın elemanları aynıdır. Satırlar arasındaki tek fark ise elemanların sağa doğru bir adım kaymasıdır. Bu nedenle tüm circulant matrisler ilk satır (ya da sütun) tarafından tanımlanabilir (P. J. Davis, 1979).

**Tanım 1.3.3.2** *r*-circulant matris ise, $x=\left(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\right)^T$ olmak üzere, $i,j=1,2,\ldots,n$ için, $ij-$elemanı $c_{ij}=\begin{cases} x_{j-i}, & j\geq i \\ rx_{n+j-i}, & j<i \end{cases}$ olan $n\times n$ tipindeki $C_r(x)=\left(c_{ij}\right)$ matrisine *r-Circulant matris* denir ve

$$C_r(x)=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ rx_{n-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ rx_{n-2} & rx_{n-1} & x_0 & \dots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rx_1 & rx_2 & rx_3 & \dots & x_0 \end{pmatrix} \qquad (1.3.3.2)$$

şeklinde gösterilir. Tanımdan da görüldüğü gibi, *r*-circulant matrislerde *r=1* alınırsa, circulant matrisler elde edilir (Shen,2010).

**Tanım 1.3.3.3** $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $i^2=-1$ olmak üzere $w^n=1$ denkleminin

$$w_k=e^{\frac{2i\pi k}{n}},\ \left(k=0,1,2,\dots,n-1\right)$$

köklerine *birimin n. mertebeden kökleri* denir. Eğer *k* ile *n* aralarında asal ise $w_k$ köküne *birimin primitif kökü* denir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe $k=1$ durumu $w_1=w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ primitif kökü ele alınacaktır.

**Teorem 1.3.3.4** $w=e^{2\pi i/n}$ birimin *n*. dereceden primitif kökü ve $C(x)$ 'de $(1.3.3.1)$ 'de tanımlanan circulant matris olsun. $C(x)$ circulant matrisinin öz değerleri

$$\lambda_j\left(C(x)\right)=\sum_{i=0}^{n-1}x_iw^{-ji},\ j=0,1,2,\dots,n-1$$

ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler de

$$y^{(j)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1,w^{-j},w^{-2j},\dots,w^{-(n-1)j}\right)$$

dir (R. M. Gray, 2002).

**Teorem 1.3.3.5** $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ve birimin *n*. dereceden primitif kökü $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olsun. O zaman

$$\prod_{i=0}^{n-1}\left(x-yw_i\right)=y^n\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{x}{y}-w_i\right)=y^n\left[\left(\frac{x}{y}\right)^n-1\right]=x^n-y^n$$

dir (D. Lind, 1970).

**Teorem 1.3.3.6** $C(x)$, $n\times n$ tipinde bir circulant matris ve birimin *n*. dereceden primitif kökü $w_k=e^{2k\pi i/n}$ olsun. $j=0,1,2,\dots,n-1$ için

$$\det\left(C(x)\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}x_jw_k{}^j\right)$$

dir (D. Lind, 1970).

**Teorem 1.3.3.7** $A$, öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olan $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $A$'nın normal matris olması için gerek ve yeter şart $AA^*$ matrisinin öz değerlerinin $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2$ olmasıdır. Burada $A^*$, $A$ matrisinin eşlenik transpozesidir (Horn & Johnson, 1985).

**Teorem 1.3.3.8** Birimin $n$. dereceden primitif kökü $w_k = e^{2k\pi i/n}$ ve $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ olsun. $b_s = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} g(w^r)^{-1} w^{-rs}$ $(s = 0,1,2,\ldots,n-1)$ olmak üzere $A = Circ(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ tekil olmayan circulant matrisin tersi $A^{-1} = Circ(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ dir (Good, 1950).

**Teorem 1.3.3.9** $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1}$ ve $w = e^{2\pi i/n}$ olsun $A$ circulant matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart $f(w^k) \neq 0$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ olmasıdır (Good,1950).

# 2. GENELLEŞTİRİLMİŞ *k*-HORADAM DİZİSİ

Bu bölümde, genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi tanımlanarak, bu dizi için elde edilen özellikler sunulmuştur.

## 2.1. Genelleştirilmiş *k*-Horadam Dizisi ve Genel Özellikleri

**Tanım 2.1.1** $k>0,$ $f(k)$ ve $g(k)$ *k*'nin skaler değerli polinomları olsun. $f^2(k)+4g(k)>0$ , $H_{k,0}=a,\ H_{k,1}=b$ olmak üzere

$$H_{k,n+2}=f(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n} \tag{2.1.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\left\{H_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *genelleştirilmiş k-Horadam dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *genelleştirilmiş k-Horadam sayıları* denir (Yazlik & Taskara, 2012).

$(2.1.1)$ ile verilen denklem, 2. mertebeden bir fark denklemi olup karakteristik denklemi

$$r^2-f(k)r-g(k)=0 \tag{2.1.2}$$

şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri

$$r_1=\frac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2} \text{ ve } r_2=\frac{f(k)-\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2}\ ;\ r_1>r_2$$

olmak üzere, kökler arasında

$$r_1+r_2=f(k),\ r_1-r_2=\sqrt{f^2(k)+4g(k)},\ r_1r_2=-g(k) \tag{2.1.3}$$

bağıntıları elde edilir.

$(2.1.1)$'de verilen rekürans bağıntısında, $f(k),\ g(k),\ a$ ve *b*'nin özel değerleri için $\left\{H_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi literatürde yer alan diğer sayı dizilerine indirgenir. Örneğin; $\left\{H_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinde;

- $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $\left\{F_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{0,1,1,2,3,\ldots\right\}$ Fibonacci dizisine,
- $f(k)=g(k)=1,\ a=2,\ b=1$ için, $\left\{L_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{2,1,3,4,7,\ldots\right\}$ Lucas dizisine,
- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $\left\{P_n\right\}=\left\{0,1,2,5,12,\ldots\right\}$ Pell dizisine,

- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=2,\ b=2$ için, $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2,2,6,14,34,\ldots\}$ Pell-Lucas dizisine,
- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=1,\ b=1$ için, $q_{n\in\mathbb{N}}=\{1,1,3,7,17,\ldots\}$ Modified-Pell dizisine,
- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0,\ b=1$ için, $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,1,3,5,\ldots\}$ Jacobsthal dizisine,
- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=2,\ b=1$ için, $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2,1,5,7,17,\ldots\}$ Jacobsthal-Lucas dizisine,
- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,k,k^2+1,k^3+2k,\ldots\}$ $k$-Fibonacci dizisine,
- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=2,\ b=k$ için, $\{L_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2,k,k^2+2,k^3+3k,\ldots\}$ $k$-Lucas dizisine,
- $f(k)=k,\ g(k)=1$ için, $\{G_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{a,b,bk+a,bk^2+ak+b,\ldots\}$ genelleştirilmiş $k$-Fibonacci dizisine,
- $f(k)=p,\ g(k)=-q$ için, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{a,b,bp-aq,bp^2-aqp-bq,\ldots\}$ Horadam dizisine indirgenir.

**Teorem 2.1.2** $r_1$ ve $r_2$, $(2.1.2)$ denkleminin kökleri olsun. O zaman

$$H_{k,n}=r_1H_{k,n-1}+\left(H_{k,1}-r_1H_{k,0}\right)r_2^{n-1} \qquad (2.1.4)$$

dir (Yazlik & Taskara, 2012).

**İspat.** (2.1.3)' deki eşitlikler göz önüne alınır ve $(2.1.1)$ denklemi yeniden düzenlenirse,

$$H_{k,n}=\left(r_1+r_2\right)H_{k,n-1}-\left(r_1r_2\right)H_{k,n-2},$$

$$H_{k,n}-r_1H_{k,n-1}=r_2\left(H_{k,n-1}-r_1H_{k,n-2}\right) \qquad (2.1.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde $H_{k,n-1}$ sayısı için, $(2.1.3)$' deki eşitlikler göz önüne alınır ve $(2.1.1)$ denklem yeniden düzenlenirse,

$$H_{k,n-1} = r_1 H_{k,n-2} + r_2 H_{k,n-2} - \left(r_1 r_2\right) H_{k,n-3} \tag{2.1.6}$$

bulunur. $\left(2.1.6\right)$ denklemi $\left(2.1.5\right)$ denkleminin sağ tarfında yerine yazılırsa,

$$H_{k,n} - r_1 H_{k,n-1} = r_2^2\left(H_{k,n-2} - r_1 H_{k,n-3}\right)$$

elde edilir. İndirgeme işlemine bu şekilde devam edilirse,

$$H_{k,n} = r_1 H_{k,n-1} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n-1}$$

elde edilir.■

**Teorem 2.1.3 (Binet Formülü)** $X = b - ar_2$ ve $Y = b - ar_1$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$H_{k,n} = \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2} \tag{2.1.7}$$

dir (Yazlik & Taskara, 2012).

**İspat.** $\left(2.1.4\right)$ eşitliğinin her iki tarafını $r_2^n$ ile bölersek,

$$\frac{H_{k,n}}{r_2^n} = \frac{r_1}{r_2}\frac{H_{k,n-1}}{r_2^{n-1}} + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2}$$

elde edilir. $\dfrac{H_{k,n}}{r_2^n} = v_n$ olsun. O zaman aşağıda verilen

$$v_n = \frac{r_1}{r_2} v_{n-1} + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2}$$

1. mertebeden lineer fark denklemi elde edilir. Bu fark denkleminin $v_0$ başlangıç değerine karşılık gelen çözümü ise,

$$\begin{aligned} v_n &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n v_0 + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^i \\ &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n v_0 + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2}\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n - 1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - 1} \\ &= \frac{1}{r_2^n}\left(r_1^n v_0 + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_1 - r_2}\left(r_1^n - r_2^n\right)\right) \end{aligned}$$

dir. Öte yandan $v_n = \dfrac{H_{k,n}}{r_2^n}$ eşitliği son denklemde yerine yazılır ve yeniden düzenlenirse

$$H_{k,n}=\left(\frac{H_{k,1}-r_2H_{k,0}}{r_1-r_2}\right)r_1^n-\left(\frac{H_{k,1}-r_1H_{k,0}}{r_1-r_2}\right)r_2^n$$

olur. $X=H_{k,1}-H_{k,0}r_2=b-ar_2$ ve $Y=H_{k,1}-H_{k,0}r_1=b-ar_1$ olduğundan

$$\begin{aligned}H_{k,n}&=\frac{(b-ar_2)r_1^n-(b-ar_1)r_2^n}{r_1-r_2}\\&=\frac{Xr_1^n-Yr_2^n}{r_1-r_2}\end{aligned}$$

elde edilir.■

**Teorem 2.1.4** $X_n=\begin{pmatrix}H_{k,n-1}&H_{k,n}\\H_{k,n}&H_{k,n+1}\end{pmatrix}$ elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan $2\times 2$ tipinde bir matris olmak üzere, $\forall n\geq 1$ için,

$$|X_n|=(-g(k))^{n-1}\left(a^2g(k)+abf(k)-b^2\right)\qquad(2.1.8)$$

dir (Yazlik & Taskara, 2012).

**İspat.** İspatı *n* üzerinden tümevarımla yapalım.

$n=1$ için,

$$\begin{aligned}|X_1|&=\begin{vmatrix}H_{k,0}&H_{k,1}\\H_{k,1}&H_{k,2}\end{vmatrix}=H_{k,0}H_{k,2}-H_{k,1}^2\\&=a\left(bf(k)+ag(k)\right)-b^2\\&=(-g(k))^0\left(abf(k)+a^2g(k)-b^2\right).\end{aligned}$$

$n=2$ için,

$$\begin{aligned}|X_2|&=\begin{vmatrix}H_{k,1}&H_{k,2}\\H_{k,2}&H_{k,3}\end{vmatrix}=H_{k,1}H_{k,3}-H_{k,2}^2\\&=b\left(bf^2(k)+ag(k)f(k)+bg(k)\right)-\left(bf(k)+ag(k)\right)^2\\&=(-g(k))\left(a^2g(k)+abf(k)-b^2\right).\end{aligned}$$

$n=s$ için doğru olsun. Yani,

$$|X_s|=\begin{vmatrix}H_{k,s-1}&H_{k,s}\\H_{k,s}&H_{k,s+1}\end{vmatrix}=(-g(k))^{s-1}\left(a^2g(k)+abf(k)-b^2\right)\qquad(2.1.9)$$

olsun. $n=s+1$ için,

$$\left|X_{s+1}\right| = \begin{vmatrix} H_{k,s} & H_{k,s+1} \\ H_{k,s+1} & H_{k,s+2} \end{vmatrix} = \left(-g\left(k\right)\right)^{s}\left(a^{2}g\left(k\right)+abf\left(k\right)-b^{2}\right) \qquad (2.1.10)$$

ifadesinin doğruluğunu gösterelim. $(2.1.9)$'da determinant özellikleri kullanılarak, 3 adımda $(2.1.9)$'dan $(2.1.10)$ elde edilir. Yani, $(2.1.9)$'daki determinantın, ilk olarak; birinci sütunu $g(k)$ ile çarpılır. İkinci olarak; ikinci sütunu $f(k)$ ile çarpıp birinci sütuna eklenir ve son olarak ta iki sütun yer değiştirilirse istenilen $(2.1.10)$ eşitliği elde edilir.■

**Teorem 2.1.5** $Y_r = \begin{pmatrix} H_{k,n+r} & H_{k,n} \\ H_{k,n+r+1} & H_{k,n+1} \end{pmatrix}$ elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan $2\times 2$ tipinde bir matris olmak üzere, $\forall r \geq 0$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

**i)** $\left|Y_{r+2}\right| = f(k)\left|Y_{r+1}\right| + g(k)\left|Y_r\right|,$

**ii)** $\left|Y_r\right| = \left(-g\left(k\right)\right)^{n}\left(bH_{k,r} - aH_{k,r+1}\right),$

dir (Yazlik & Taskara, 2012).

**İspat.** Öncelikle (i)' nin doğruluğunu gösterelim.

**i)** $A = f\left(k\right)\left|Y_{r+1}\right| + g\left(k\right)\left|Y_r\right|$ olsun. $\forall r \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} A &= f\left(k\right)\begin{vmatrix} H_{k,n+r+1} & H_{k,n} \\ H_{k,n+r+2} & H_{k,n+1} \end{vmatrix} + g\left(k\right)\begin{vmatrix} H_{k,n+r} & H_{k,n} \\ H_{k,n+r+1} & H_{k,n+1} \end{vmatrix} \\ &= f\left(k\right)\left(H_{k,n+1}H_{k,n+r+1} - H_{k,n}H_{k,n+r+2}\right) + g\left(k\right)\left(H_{k,n+r}H_{k,n+1} - H_{k,n}H_{k,n+r+1}\right) \\ &= H_{k,n+1}\left[f\left(k\right)H_{k,n+r+1} + g\left(k\right)H_{k,n+r}\right] - H_{k,n}\left[f\left(k\right)H_{k,n+r+2} + g\left(k\right)H_{k,n+r+1}\right] \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $(2.1.1)$ göz önüne alınır ve yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} f\left(k\right)\left|Y_{r+1}\right| + g(k)\left|Y_r\right| &= H_{k,n+1}H_{k,n+r+2} - H_{k,n}H_{k,n+r+3} \\ &= \left|Y_{r+2}\right| \end{aligned}$$

elde edilir.■

**ii)** İspatı *r* üzerinden tümevarımla yapalım.

$r = 0$ için,

$$|Y_0| = \begin{vmatrix} H_{k,n} & H_{k,n} \\ H_{k,n+1} & H_{k,n+1} \end{vmatrix}$$
$$= H_{k,n}H_{k,n+1} - H_{k,n}H_{k,n+1}$$
$$= \left(-g\left(k\right)\right)^n \left(bH_{k,0} - aH_{k,1}\right)$$

eşitlik sağlanır.

$r = 1$ için,

Teorem 2.1.4 göz önüne alınırsa,

$$|Y_1| = \left(-g\left(k\right)\right)^n \left(b^2 - a^2 g\left(k\right) - abf\left(k\right)\right)$$
$$= \left(-g\left(k\right)\right)^n \left(bH_{k,1} - aH_{k,2}\right)$$

elde edilir ki eşitlik sağlanır.

$r = p$ için doğru olsun. Yani,

$$\left|Y_p\right| = \left(-g(k)\right)^n \left(bH_{k,p} - aH_{k,p+1}\right) \qquad (2.1.11)$$

olsun. O zaman $r = p+1$ için

$$\left|Y_{p+1}\right| = \left(-g(k)\right)^n \left(bH_{k,p+1} - aH_{k,p+2}\right)$$

olduğunu gösterelim. Teorem 2.1.5-(i) ve $(2.1.11)$ göz önüne alınırsa,

$$\left|Y_{p+1}\right| = f\left(k\right)\left|Y_p\right| + g\left(k\right)\left|Y_{p-1}\right|$$
$$= f\left(k\right)\left(-g\left(k\right)\right)^n \left(bH_{k,p} - aH_{k,p+1}\right) + g(k)\left(-g\left(k\right)\right)^n \left(bH_{k,p-1} - aH_{k,p}\right)$$
$$= \left(-g\left(k\right)\right)^n \left[b\left(f\left(k\right)H_{k,p} + g(k)H_{k,p-1}\right) - a\left(f\left(k\right)H_{k,p+1} + g(k)H_{k,p}\right)\right]$$
$$= \left(-g\left(k\right)\right)^n \left(bH_{k,p+1} - aH_{k,p+2}\right)$$

bulunur ki teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 2.1.5'de $n+r$ yerine $m$ alınırsa, genelleştirilmiş $k$-Horadam dizisi için, d'Ocagne eşitliği

$$H_{k,m}H_{k,n+1} - H_{k,m+1}H_{k,n} = \left(-g\left(k\right)\right)^n \left(bH_{k,m-n} - aH_{k,m-n+1}\right) \qquad (2.1.12)$$

elde edilir.

**Teorem 2.1.6** $Z_s = \begin{pmatrix} H_{k,n} & H_{k,n-r} \\ H_{k,n+s} & H_{k,n-r+s} \end{pmatrix}$ elemanları genelleştirilmiş $k$-Horadam sayıları olan $2 \times 2$ tipinde bir matris olmak üzere, $\forall s \geq 0$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

**i)** $\left|Z_{s+2}\right| = f\left(k\right)\left|Z_{s+1}\right| + g\left(k\right)\left|Z_s\right|,$

**ii)** $|Z_s| = \left(-g(k)\right)^{n-r} \dfrac{\left(bH_{k,r} - aH_{k,r+1}\right)\left(bH_{k,s} - aH_{k,s+1}\right)}{b^2 - a^2 g(k) - abf(k)}$

dir (Yazlik & Taskara, 2012).

**İspat.** Teoremin ispatı, Teorem 2.1.5'in ispatına benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir.■

Teorem 2.1.6'da *s*'nin yerine $m-n+r$ alınırsa,

$$H_{k,m}H_{k,n} - H_{k,m+r}H_{k,n-r} = \frac{\left(-g(k)\right)^{n-r}\left(bH_{k,r} - aH_{k,r+1}\right)\left(bH_{k,m-n+r} - aH_{k,m-n+r+1}\right)}{b^2 - a^2 g(k) - abf(k)} \quad (2.1.13)$$

elde edilir. $(2.1.13)$ denklemi genelleştirilmiş *k*-Horadam dizileri için bazı eşitliklerin genellemesidir. Örneğin;

- $(2.1.13)$ eşitliğinde $r=1$ ve *n*'nin yerine $n+1$ alınırsa, $(2.1.12)$'deki d' Ocagne eşitliği elde edilir.
- $(2.1.13)$ eşitliğinde *m*'nin yerine *n* alınırsa, genelleştirilmiş *k*-Horadam dizileri için Catalan eşitliği elde edilir.
- $(2.1.13)$ eşitliğinde $r=1$ ve $m=n$ alınırsa, Teorem 2.1.4'deki Cassini eşitliği elde edilir.

## 2.2. Genelleştirilmiş *k*-Horadam Dizisinin Kısmi Toplamları

Bu bölümde, genelleştirilmiş *k*-Horadam dizilerinin toplamsal özellikleri incelenmiştir.

**Teorem 2.2.1.** $n \geq 1$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır.

**i)** $f(k) + g(k) - 1 \neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i} = \frac{H_{k,n} + g(k)H_{k,n-1} - H_{k,1} + \left(f(k) - 1\right)H_{k,0}}{f(k) + g(k) - 1} \quad (2.2.1)$$

**ii)** $1 + f(k) - g(k) \neq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i} H_{k,i}=\frac{(-1)^{n} H_{k,n+1}-H_{k,1}+\left(1+f(k)\right)\left[(-1)^{n-1} H_{k,n}+H_{k,0}\right]}{1+f(k)-g(k)} \qquad (2.2.2)$$

dir.

**İspat.**

**i)** $(2.1.1)$ eşitliği yeniden düzenlenirse

$$-g(k)H_{k,i}=-H_{k,i+2}+f(k)H_{k,i+1} \qquad (2.2.3)$$

elde edilir. $(2.2.3)$ eşitliği $i=0,1,2,\ldots,n-1$ için yazılırsa

$$\begin{aligned}-g(k)H_{k,0}&=-H_{k,2}+f(k)H_{k,1}\\ -g(k)H_{k,1}&=-H_{k,3}+f(k)H_{k,2}\\ &\vdots\\ -g(k)H_{k,n-1}&=-H_{k,n+1}+f(k)H_{k,n}\end{aligned}$$

olur. Elde edilen son eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$-g(k)\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}=\left(f(k)-1\right)\left(H_{k,2}+H_{k,3}+\ldots+H_{k,n}\right)-H_{k,n+1}+f(k)H_{k,1} \qquad (2.2.4)$$

elde edilir. Öte yandan eşitliğin her iki tarafına $\left(1-f(k)\right)\left(H_{k,0}+H_{k,1}\right)$ eklenip yeniden düzenlenirse

$$\left(f(k)+g(k)-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}=H_{k,n}+g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+\left(f(k)-1\right)H_{k,0}$$

elde edilir.

**ii)** $(2.2.3)$ eşitliği hipotezin sol tarafına uygun olacak şekilde $i=0,1,2,\ldots,n-1$ için yazılırsa

$$\begin{aligned}-g(k)H_{k,0}&=-H_{k,2}+f(k)H_{k,1}\\ g(k)H_{k,1}&=H_{k,3}-f(k)H_{k,2}\\ -g(k)H_{k,2}&=-H_{k,4}+f(k)H_{k,3}\\ &\vdots\\ -g(k)\left(-1\right)^{n-1}H_{k,n-1}&=(-1)^{n}H_{k,n+1}+(-1)^{n-1}f(k)H_{k,n}\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\left.\begin{aligned}-g(k)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i H_{k,i} &= \big(f(k)+1\big)\Big(-H_{k,2}+H_{k,3}-\ldots+(-1)^{n-1}H_{k,n}\Big)\\ &\quad +(-1)^n H_{k,n+1}+f(k)H_{k,1}\end{aligned}\right) \qquad (2.2.5)$$

elde edilir. Öte yandan eşitliğin her iki tarafına $\big(1+f(k)\big)\big(H_{k,0}-H_{k,1}\big)$ eklenip yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\big(1+f(k)-g(k)\big)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i H_{k,i} &= (-1)^n H_{k,n+1}-H_{k,1}\\ &\quad +\big(1+f(k)\big)\Big((-1)^{n-1}H_{k,n}+H_{k,0}\Big)\end{aligned}$$

olur ki ispat tamamlanır.■

**Teorem 2.2.2** $(g(k)-1)^2-(f(k))^2\neq 0$ ve $H_{k,-1}=\dfrac{H_{k,1}-f(k)H_{k,0}}{g(k)}$ olmak üzere, $n\geq 1$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

**i)** $$\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,2i}=\frac{(g(k)-1)(H_{k,2n}-H_{k,0})-f(k)g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1})}{(g(k)-1)^2-(f(k))^2},$$

**ii)** $$\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,2i+1}=\frac{(g(k)-1)g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1})-f(k)(H_{k,2n}-H_{k,0})}{(g(k)-1)^2-(f(k))^2}.$$

**İspat.** $A=\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,2i}$ ve $B=\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,2i+1}$ olsun. $(2.2.4)$ ve $(2.2.5)$ eşitliklerinde $n$ yerine $2n$ alınarak önce taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}-2g(k)(H_{k,0}+H_{k,2}+\ldots+H_{k,2n-2}) &= 2f(k)(H_{k,1}+H_{k,3}+\ldots+H_{k,2n-1})\\ &\quad -2(H_{k,0}+H_{k,2}+H_{k,4}+\ldots+H_{k,2n-2})-2H_{k,2n}+2H_{k,0}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse,

$$\big(1-g(k)\big)A=f(k)B-\big(H_{k,2n}-H_{k,0}\big) \qquad (2.2.6)$$

bulunur. Daha sonra $(2.2.4)$’den $(2.2.5)$ çıkartılırsa,

$$\begin{aligned}-2g(k)(H_{k,1}+H_{k,3}+\ldots+H_{k,2n-1}) &= 2f(k)(H_{k,2}+H_{k,4}+\ldots+H_{k,2n-2})\\ &\quad -2(H_{k,3}+H_{k,5}+\ldots+H_{k,2n-1})-2H_{k,2n+1}+2f(k)H_{k,2n}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik yeniden düzenlenir ve $H_{k,-1}=\dfrac{H_{k,1}-f(k)H_{k,0}}{g(k)}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(1-g(k))B=f(k)A-g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1}) \qquad (2.2.7)$$

elde edilir. $(2.2.6)$ ve $(2.2.7)$ eşitliklerinden,

$$(g(k)-1)A+f(k)B=H_{k,2n}-H_{k,0}$$
$$f(k)A+(g(k)-1)B=g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1})$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülecek olursa,

$$A=\frac{\begin{vmatrix} H_{k,2n}-H_{k,0} & f(k) \\ g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1}) & g(k)-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(k)-1 & f(k) \\ f(k) & g(k)-1 \end{vmatrix}}$$
$$=\frac{(g(k)-1)(H_{k,2n}-H_{k,0})-f(k)g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1})}{(g(k)-1)^2-(f(k))^2}$$

ve

$$B=\frac{\begin{vmatrix} g(k)-1 & H_{k,2n}-H_{k,0} \\ f(k) & g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(k)-1 & f(k) \\ f(k) & g(k)-1 \end{vmatrix}}$$
$$=\frac{(g(k)-1)g(k)(H_{k,2n-1}-H_{k,-1})-f(k)(H_{k,2n}-H_{k,0})}{(g(k)-1)^2-(f(k))^2}$$

elde edilir.■

**Teorem 2.2.3** $q>p\geq 0$ için**,**

$$\sum_{i=0}^{n} H_{k,pi+q}=\frac{\left(-g(k)\right)^p\left(H_{k,pn+q}-H_{k,q-p}\right)-H_{k,pn+p+q}+H_{k,q}}{\left(-g(k)\right)^p-r_1^p-r_2^p+1} \tag{2.2.8}$$

dir (Yazlik & Taskara, 2012).

**İspat.** Teoremi genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi için Binet formülünü kullanarak ispatlayalım.

$$\sum_{i=0}^{n} H_{k,pi+q}=\sum_{i=0}^{n}\frac{Xr_1^{pi+q}-Yr_2^{pi+q}}{r_1-r_2}$$
$$=\frac{Xr_1^q}{r_1-r_2}\sum_{i=0}^{n} r_1^{pi}-\frac{Yr_2^q}{r_1-r_2}\sum_{i=0}^{n} r_2^{pi}$$
$$=\frac{Xr_1^q}{r_1-r_2}\left(\frac{r_1^{pn+p}-1}{r_1^p-1}\right)-\frac{Yr_2^q}{r_1-r_2}\left(\frac{r_2^{pn+p}-1}{r_2^p-1}\right)$$

olur. Öte yandan $(2.1.3)$ ve $(2.1.7)$ göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n} H_{k,pi+q} = \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\frac{\left(Xr_1^{pn+p+q} - Xr_1^{q}\right)\left(r_2^{p}-1\right) - \left(Yr_2^{pn+p+q} - Yr_2^{q}\right)\left(r_1^{p}-1\right)}{\left(r_1^{p}-1\right)\left(r_2^{p}-1\right)}\right]$$

$$= \frac{\left(-g(k)\right)^{p}\left(H_{k,pn+q} - H_{k,q-p}\right) - H_{k,pn+p+q} + H_{k,q}}{\left(-g(k)\right)^{p} - r_1^{p} - r_2^{p} + 1}$$

bulunur.■

**Teorem 2.2.4** $S = \left(b - af(k)\right)^2 - a^2 - 2XY\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right)$, $X = b - ar_2$, $Y = b - ar_1$ ve $H_{k,-1} = \dfrac{b - af(k)}{g(k)}$ olsun. $f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1 \neq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i}^2 = \frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1} \tag{2.2.9}$$

dir.

**İspat.** $A = \sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i}^2$ olsun. O takdirde genelleştirilmiş $k$ -Horadam dizisinin tanımından

$$A = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{H_{k,i+1} - g(k)H_{k,i-1}}{f(k)}\right)^2$$

olur. Yukarıdaki eşitlik düzenlenirse

$$f^2(k)A = \sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i+1}^2 - 2g(k)\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i+1}H_{k,i-1} + g^2(k)\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i-1}^2$$

bulunur. Teorem 2.1.4 göz önüne alınır ve bu eşitlik yeniden düzenlenirse

$$f^2(k)A = \left(A + H_{k,n}^2 - H_{k,0}^2\right) + g^2(k)\left(A - H_{k,n-1}^2 + H_{k,-1}^2\right) - 2g(k)\sum_{i=0}^{n-1}\left(H_{k,i}^2 - XY(-g(k))^{i-1}\right)$$

$$= \left(A + H_{k,n}^2 - H_{k,0}^2\right) + g^2(k)\left(A - H_{k,n-1}^2 + H_{k,-1}^2\right) - 2g(k)A - 2XY\sum_{i=0}^{n-1}(-g(k))^{i}$$

$$= A(1 + g^2(k) - 2g(k)) + H_{k,n}^2 - a^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + (b - af(k))^2 - 2XY\frac{1-(-g(k))^n}{1+g(k)}$$

olur. Buradan

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i}^2 = \frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + \left(b - af(k)\right)^2 - a^2 - 2XY\dfrac{1-(-g(k))^n}{1+g(k)}}{f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1}$$

elde edilir.■

## 2.3. Genelleştirilmiş *k*-Horadam Dizisinin Üreteç Fonksiyonu

Bu bölümde, genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu verilmiştir. Üreteç fonksiyonundan yararlanarak ta farklı metotlarla genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisinin Binet Formülü yeniden elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş $k$-Horadam sayıları bir kuvvet serisi yardımıyla elde edilebilir. Yani;

$$H(x)=H_{k,0}+H_{k,1}x+H_{k,2}x^2+\ldots+H_{k,n}x^n+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}H_{k,i}x^i \qquad (2.3.1)$$

dir. $(2.3.1)$ denkleminin her iki tarafını öncelikle $f(k)x$ daha sonrada $g(k)x^2$ ile çarpıp düzenlersek,

$$f(k)xH(x)=f(k)xH_{k,0}+f(k)x^2H_{k,1}+\ldots+f(k)x^{n+1}H_{k,n}\ldots \qquad (2.3.2)$$

$$g(k)x^2H(x)=g(k)x^2H_{k,0}+g(k)x^3H_{k,1}+\ldots+g(k)x^{n+2}H_{k,n}\ldots \qquad (2.3.3)$$

elde edilir. $(2.3.1)$ eşitliğinden $(2.3.2)$ ve $(2.3.3)$ eşitlikleri çıkartılırsa

$$\left(1-f(k)x-g(k)x^2\right)H(x)=H_{k,0}+x\left(H_{k,1}-f(k)H_{k,0}\right) \qquad (2.3.4)$$

bulunur. Buradan genelleştitilmiş k-Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu

$$H(x)=\frac{H_{k,0}+x\left(H_{k,1}-f(k)H_{k,0}\right)}{1-f(k)x-g(k)x^2} \qquad (2.3.5)$$

olarak elde edilir. (Yazlik & Taskara, 2012).

$(2.3.5)$ denkleminde $f(k),\ g(k),\ a$ ve $b$'ye uygun değerler verilirse, literatürde yer alan 2. mertebeden diğer sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları elde edilir. Örneğin;

- $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu $H\left(x\right)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$,
- $f(k)=g(k)=1,\ a=2,\ b=1$ için, Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x)=\dfrac{2-x}{1-x-x^2}$,
- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, Pell dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x)=\dfrac{x}{1-2x-x^2}$,
- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0,\ b=1$ için, Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x)=\dfrac{x}{1-x-2x^2}$,
- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=2,\ b=1$ için, Jacobsthal-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x)=\dfrac{2-x}{1-x-2x^2}$,
- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $k$-Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x)=\dfrac{x}{1-kx-x^2}$,

- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=2,\ b=k$ için, $k$-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$$H(x)=\frac{2-kx}{1-kx-x^2},$$
- $f(k)=k,\ g(k)=1$ için, genelleştirilmiş $k$-Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu
$$H(x)=\frac{a+x(b-ak)}{1-kx-x^2},$$

elde edilir.

Şimdi de genelleştirilmiş $k$-Horadam dizisinin Binet formülünü üreteç fonksiyonları yardımıyla yeniden elde edelim. Bunun için de $(2.3.5)$ eşitliğinin sağ tarafı için polinomlar da basit kesirlere ayırma işlemi yapılırsa, yani

$$\begin{aligned}\frac{H_{k,0}+x\left(H_{k,1}-f(k)H_{k,0}\right)}{1-f(k)x-g(k)x^2}&=\frac{A}{1-r_1x}+\frac{B}{1-r_2x}\\&=\frac{1}{r_1-r_2}\left(\frac{H_{k,1}+H_{k,0}r_1-H_{k,0}f(k)}{1-r_1x}-\frac{H_{k,1}+H_{k,0}r_2-H_{k,0}f(k)}{1-r_2x}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan seri açılımına geçilirse

$$\begin{aligned}\left(r_1-r_2\right)H(x)&=\left(H_{k,1}+H_{k,0}r_1-H_{k,0}f(k)\right)\left[1+r_1x+(r_1x)^2+\ldots+(r_1x)^n+\ldots\right]\\&\quad-\left(H_{k,1}+H_{k,0}r_2-H_{k,0}f(k)\right)\left[1+r_2x+(r_2x)^2+\ldots+(r_2x)^n+\ldots\right]\\&=\left(H_{k,1}+H_{k,0}r_1-H_{k,0}f(k)\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(r_1x\right)^i-\left(H_{k,1}+H_{k,0}r_2-H_{k,0}f(k)\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(r_2x\right)^i\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $H_{k,1}+H_{k,0}r_1-H_{k,0}f(k)=H_{k,1}-H_{k,0}r_2=X$ ve $H_{k,1}+H_{k,0}r_2-H_{k,0}f(k)=H_{k,1}-H_{k,0}r_1=Y$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}H(x)&=\frac{X\sum_{i=0}^{\infty}\left(r_1x\right)^i-Y\sum_{i=0}^{\infty}\left(r_2x\right)^i}{r_1-r_2}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{Xr_1^i-Yr_2^i}{r_1-r_2}x^i\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde genelleştirilmiş $k$-Horadam dizisinin Binet formülü diferansiyel denklemlerden yararlanarak ta elde edilebilir. Bunun içinde öncelikle

$$y''-f(k)y'-g(k)y=0,\ y(0)=a,\ y'(0)=b \qquad (2.3.6)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem olup karakteristik denklemi $r^2-f(k)r-g(k)=0$'dır. Bu denklemin kökleri, $(2.1.2)$'de ki karakteristik denklemin kökleri ile aynıdır. O zaman bu denklemin genel çözümü $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ olur. Bu denkleme başlangıç şartları uygulanırsa,

$$y = \frac{(b - ar_2)e^{r_1 x} - (b - ar_1)e^{r_2 x}}{r_1 - r_2} = \frac{Xe^{r_1 x} - Ye^{r_2 x}}{r_1 - r_2} \qquad (2.3.7)$$

bulunur. $e^{r_1 x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n x^n}{n!}$, $e^{r_2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n x^n}{n!}$ eşitlikleri $(2.3.7)$'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left( X\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n x^n}{n!} - Y\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{k,n}}{n!} x^n \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak görülür ki $\frac{H_{k,n}}{n!}$ için genel çözüm üreteç fonksiyonu olur.■

## 2.4. Negatif İndisli Genelleştirilmiş *k*-Horadam Dizisi

Burada negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi tanımlanarak, pozitif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi ile arasındaki bağıntı elde edilmiştir.

**Tanım 2.4.1** $k > 0$, $f(k)$ ve $g(k)$ $k$'nın skaler değerli polinomları olsun. $f^2(k) + 4g(k) > 0$ olmak üzere $H_{k,0} = a$, $H_{k,1} = b$ ve

$$H_{k,-n} = \frac{1}{g(k)} H_{k,-n+2} - \frac{f(k)}{g(k)} H_{k,-n+1} \qquad (2.4.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{H_{k,-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *negatif indisli genelleştirilmiş k-Horadam dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *negatif indisli genelleştirilmiş k-Horadam sayıları* denir.

Bu tanıma göre, negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisinin son birkaç terimi

$$\{H_{k,-n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \ldots, \frac{bg(k) - 2af(k)g(k) + bf^2(k) - af^3(k)}{g^3(k)}, \frac{ag(k) - bf(k) + af^2(k)}{g^2(k)}, \frac{b - af(k)}{g(k)}, a \right\}$$

şeklindedir.

Burada $f(k), g(k), a, b$'nin özel değerleri için $\{H_{k,-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi literatürde yer alan bazı negatif indisli diğer sayı dizilerine indirgenebilir. Örneğin $\{H_{k,-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinde;

- $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $F_{-n}=F_{-n+2}-F_{-n+1}$ negatif indisli Fibonacci dizisi,
- $f(k)=g(k)=1,\ a=2,\ b=1$ için, $L_{-n}=L_{-n+2}-L_{-n+1}$ negatif indisli Lucas dizisi,
- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $P_{-n}=P_{-n+2}-2P_{-n+1}$ negatif indisli Pell dizisi,
- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=2,\ b=2$ için, $Q_{-n}=Q_{-n+2}-2Q_{-n+1}$ negatif indisli Pell-Lucas dizisi,
- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0,\ b=1$ için, $2J_{-n}=J_{-n+2}-J_{-n+1}$ negatif indisli Jacobsthal dizisi,
- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=2,\ b=1$ için, $2j_{-n}=j_{-n+2}-j_{-n+1}$ negatif indisli Jacobsthal-Lucas dizisi,
- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $F_{k,-n}=F_{k,-n+2}-kF_{k,-n+1}$ negatif indisli *k*-Fibonacci dizisi,
- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=2,\ b=k$ için, $L_{k,-n}=L_{k,-n+2}-kL_{k,-n+1}$ negatif indisli *k*-Lucas dizisi,
- $f(k)=k,\ g(k)=1$ için, $G_{k,-n}=G_{k,-n+2}-kG_{k,-n+1}$ negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Fibonacci dizisine,
- $f(k)=p,\ g(k)=-q$ için, $qW_{-n}=-W_{-n+2}+pW_{-n+1}$ negatif indisli Horadam dizisi elde edilir.

Negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi ile pozitif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi arasındaki bağıntıyı elde etmek için öncelikle aşağıdaki diziyi tanımlayalım.

Genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisinde $a=0, b=1$ için $\{U_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$U_{k,n+2}=f(k)U_{k,n+1}+g(k)U_{k,n} \qquad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlanır. $(2.1.7)$ denklemin de $a=0, b=1$ alınırsa $\{U_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Binet formülü

$$U_{k,n}=\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2} \tag{2.4.3}$$

olarak elde edilir.

**Teorem 2.4.2 (Binet Formülü)** $X=b-ar_2$ ve $Y=b-ar_1$ olmak üzere, $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$H_{k,-n}=\frac{Xr_1^{-n}-Yr_2^{-n}}{r_1-r_2}=\left(-g\left(k\right)\right)^{-n}\left(aU_{k,n+1}-bU_{k,n}\right) \tag{2.4.4}$$

dir.

**İspat.** $(2.1.7)$ ve $(2.4.3)$'den ispat açıktır.■

**Teorem 2.4.3** $\left\{U_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $\left\{H_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$H_{k,n}=aU_{k,n+1}+\left(b-af\left(k\right)\right)U_{k,n} \tag{2.4.5}$$

bağıntısı geçerlidir.

**İspat.** $(2.4.5)$ eşitliğinin sağ tarafında $(2.4.3)$ göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
aU_{k,n+1}+\left(b-af\left(k\right)\right)U_{k,n}&=a\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_1-r_2}+\left(b-af(k)\right)\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}\\
&=\frac{\left(ar_1+b-a\left(r_1+r_2\right)\right)r_1^n-\left(ar_2+b-a\left(r_1+r_2\right)\right)r_2^n}{r_1-r_2}\\
&=\frac{\left(b-ar_2\right)r_1^n-\left(b-ar_1\right)r_2^n}{r_1-r_2}\\
&=H_{k,n}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 2.4.4** $\forall n\in\mathbb{N}$ için,

$$H_{k,-n}=\left(-g\left(k\right)\right)^{-n}\frac{aU_{k,n+1}-bU_{k,n}}{aU_{k,n+1}+\left(b-af(k)\right)U_{k,n}}H_{k,n}$$

dir.

**İspat.** $(2.4.4)$ eşitliğinin sağ tarafını $H_{k,n}$ ile çarpıp bölersek

$$H_{k,-n}=\left(-g\left(k\right)\right)^{-n}\frac{aU_{k,n+1}-bU_{k,n}}{H_{k,n}}H_{k,n} \tag{2.4.6}$$

olur. $(2.4.6)$ eşitliğinde $H_{k,n}$ yerine $(2.4.5)$ eşitliği yazılırsa

$$H_{k,-n}=\left(-g\left(k\right)\right)^{-n}\frac{aU_{k,n+1}-bU_{k,n}}{aU_{k,n+1}+\left(b-af(k)\right)U_{k,n}}H_{k,n}$$

bulunur.■

# 3. CİRCULANT MATRİSLER

Bu bölümde, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan circulant matris tanımlanarak bu matrisle ilgili bazı özellikler incelenmiştir. Ayrıca, bu circulant matrisin tersi elde edilmiştir. Daha sonra, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan *r*-circulant matris tanımlanarak, bu matris ile ilgili bazı temel özellikler incelenmiştir.

## 3.1. Genelleştirilmiş *k*-Horadam Sayıları ile Tanımlı Circulant Matrisler

Daha önce tanımlanan $C(x)$ circulant matrisin elemanları genelleştirilmiş $k$-Horadam dizisinin ardışık terimleri olacak şekilde $C(H)$ circulant matrisini tanımlayalım.

**Tanım 3.1.1** $H_{k,n}$, $n.$ genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısı olsun. $\forall i,j=1,2,\ldots,n$ için $j-i\equiv s(\bmod n)$ olmak üzere $c_{ij}=H_{k,s}$ şeklinde tanımlanan $n\times n$ tipindeki $C(H)=(c_{ij})$ matrisine *genelleştirilmiş k-Horadam sayıları ile tanımlı circulant matris* denir ve

$$C(H)=\begin{pmatrix} H_{k,0} & H_{k,1} & H_{k,2} & \cdots & H_{k,n-1} \\ H_{k,n-1} & H_{k,0} & H_{k,1} & \cdots & H_{k,n-2} \\ H_{k,n-2} & H_{k,n-1} & H_{k,0} & \cdots & H_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k,1} & H_{k,2} & H_{k,3} & \cdots & H_{k,0} \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

şeklinde gösterilir (Yazlık & Taskara, 2012).

Örneğin, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan $3\times 3$ tipindeki circulant matris

$$C(H)=\begin{pmatrix} a & b & bf(k)+ag(k) \\ bf(k)+ag(k) & a & b \\ b & bf(k)+ag(k) & a \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

**Teorem 3.1.2** $C(H)$, genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları ile tanımlı $n\times n$ tipinde circulant matris ve $w$, birimin $n.$ dereceden primitif kökü olmak üzere

$$\lambda_j\left(C\left(H\right)\right)=\frac{H_{k,n}-H_{k,0}+\left(g\left(k\right)H_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)w^{-j}}{g(k)w^{-2j}+f(k)w^{-j}-1} \tag{3.1.2}$$

dir (Yazlık & Taskara, 2012).

**İspat:** Teorem 1.3.3.4'den genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları ile tanımlı circulant matrisin özdeğerleri

$$\lambda_j(C(H))=\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}w^{-ji} \tag{3.1.3}$$

şeklindedir. Öte yandan $(2.1.7)$ formülü $(3.1.3)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}w^{-ji}&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{Xr_1^{\,i}-Yr_2^{\,i}}{r_1-r_2}\right)w^{-ji}\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left(X\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_1w^{-j}\right)^i-Y\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_2w^{-j}\right)^i\right)\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left(\frac{Xr_1^{\,n}-X}{r_1w^{-j}-1}-\frac{Yr_2^{\,n}-Y}{r_2w^{-j}-1}\right)\\
&=\frac{\left(Xr_1^{\,n}-X\right)\left(r_2w^{-j}-1\right)-\left(Yr_2^{\,n}-Y\right)\left(r_1w^{-j}-1\right)}{\left(r_1-r_2\right)\left(r_1w^{-j}-1\right)\left(r_2w^{-j}-1\right)}\\
&=\frac{H_{k,n}-H_{k,0}+\left(g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)w^{-j}}{g(k)w^{-2j}+f(k)w^{-j}-1}
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.1.2'den faydalanılarak $(3.1.2)$ denklemi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=1,\ b=1$ için, elemanları Modified-Pell sayıları olan circulant matrisin özdeğerleri

  $$\lambda_j\left(C\left(q\right)\right)=\frac{q_n-1+\left(q_{n-1}+1\right)w^{-j}}{w^{-2j}+2w^{-j}-1}$$

  dir (Kocer, 2007).
- $f(k),\ g(k),\ a$ ve $b$'ye uygun değerler verilirse, literatürde yer alan 2. mertebeden diğer özel sayı dizileri için circulant matrislerin öz değerleri benzer şekilde elde edilir.

**Teorem 3.1.3** $C\left(H\right),\ (3.1.1)$'de tanımlı $n\times n$ tipinde circulant matris olsun. $f(k)+g(k)-1\neq 0$ olmak üzere $C\left(H\right)$ matrisinin spectral normu,

$$\left\|C(H)\right\|_2 = \frac{H_{k,n} - H_{k,0} + g(k)H_{k,n-1} - H_{k,1} + f(k)H_{k,0}}{f(k) + g(k) - 1} \tag{3.1.4}$$

dir (Yazlık & Taskara, 2012).

**İspat.** Spektral normun tanımı ve Teorem 1.3.3.7 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|C(H)\right\|_2 &= \sqrt{\max_{0\le j\le n-1} \lambda_j\left(C(H)C^*(H)\right)} \\ &= \sqrt{\max_{0\le j\le n-1} \left|\lambda_j C(H)\right|^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan $j=0$ için $C(H)$ matrisinin öz değerleri maksimum değerini alır. Bu nedenle, $\left\|C(H)\right\|_2 = \left|\lambda_0\left(C(H)\right)\right|$' dir. Ayrıca, Teorem 3.1.2 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\left\|C(H)\right\|_2 &= \frac{H_{k,n} - H_{k,0} + g(k)H_{k,n-1} - H_{k,1} + f(k)H_{k,0}}{f(k) + g(k) - 1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i}\end{aligned}$$

dir.■

Teorem 3.1.3'den faydalanılarak $(3.1.4)$ denklemi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- $f(k) = g(k) = 1,\ a = 0,\ b = 1$ için, elemanları Fibonacci sayıları olan circulant matrisin spectral normu,

  $$\left\|C(F)\right\|_2 = F_{n+1} - 1$$

  dir (İpek, 2011).
- $f(k) = g(k) = 1,\ a = 2,\ b = 1$ için, elemanları Lucas sayıları olan circulant matrisin spectral normu,

  $$\left\|C(L)\right\|_2 = L_{n+1} - 1$$

  dir (İpek, 2011).
- $f(k) = 2,\ g(k) = 1,\ a = 1,\ b = 1$ için, elemanları Modified-Pell sayıları olan circulant matrisin spectral normu, $P_n$ $n$. Pell sayısı olmak üzere

  $$\left\|C(q)\right\|_2 = P_n$$

  dir (Kocer, 2007).

- $f(k)$, $g(k)$, $a$ ve $b$'ye uygun değerler verilirse, literatürde yer alan 2. mertebeden diğer özel sayı dizileri için circulant matrislerin spectral normları benzer şekilde elde edilir.

**Teorem 3.1.4** $C(H)$, $(3.1.1)$'de tanımlı $n\times n$ tipinde circulant matris olsun. $f(k)+g(k)-1\neq 0$ olmak üzere, $C(H)$ matrisinin maksimum sütun(satır) toplam normu

$$\left\|C(H)\right\|_1=\left\|C(H)\right\|_\infty=\frac{H_{k,n}+g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+\left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1}.$$

**İspat.** Maximum sütun toplam normun tanımından,

$$\begin{aligned}\left\|C(H)\right\|_1&=\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}H_{k,\text{mod}(j-i,n)}\right)\\&=\max_{1\leq j\leq n}\left(H_{k,\text{mod}(j-1,n)}+H_{k,\text{mod}(j-2,n)}+\ldots+H_{k,\text{mod}(j-n,n)}\right)\\&=\sum_{t=0}^{n-1}H_{k,t}\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $(2.2.1)$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\left\|C(H)\right\|_1=\frac{H_{k,n}+g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+\left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1}$$

elde edilir. Maximum satır toplam normu da benzer şekilde hesaplanabilir.■

**Teorem 3.1.5** $S=\left(b-af(k)\right)^2-a^2-2XY\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right)$, $X=b-ar_2$, $Y=b-ar_1$

olsun. $f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1\neq 0$ olmak üzere $C(H)$ matrisinin Euclides normu,

$$\left\|C(H)\right\|_E=\sqrt{\frac{n\left(H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S\right)}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}}\qquad(3.1.5)$$

dir.

**İspat.** Euclides normun tanımından,

$$\left\|C(H)\right\|_E^2=n\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^2\qquad(3.1.6)$$

elde edilir. Öte yandan

$$S=\left(b-af(k)\right)^2-a^2-2XY\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right),\quad X=b-ar_2,\ Y=b-ar_1$$

olmak üzere $(2.2.9)$, $(3.1.6)$'da yerine yazılırsa

$$\|C(H)\|_E^2 = n\frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}$$

dir. Buradan

$$\|C(H)\|_E = \sqrt{\frac{n\left(H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S\right)}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}}$$

bulunur.■

Teorem 3.1.5'den faydalanılarak $(3.1.5)$ denklemi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, elemanları Fibonacci sayıları olan circulant matrisin Euclides normu,

  $$\|C(F)\|_E = \sqrt{nF_nF_{n-1}}$$

  dir (Solak, 2005).
- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=1,\ b=1$ için, elemanları Modified-Pell sayıları olan circulant matrisin Euclides normu,

  $$\|C(q)\|_E = \sqrt{\frac{n\left(q_{2n-1}-(-1)^n+2\right)}{4}}$$

  dir (Kocer, 2007).
- $f(k),\ g(k),\ a$ ve $b$'ye uygun değerler verilirse, literatürde yer alan 2. mertebeden diğer özel sayı dizileri için circulant matrislerin Euclides normları benzer şekilde elde edilir.

**Teorem 3.1.6** $C(H)$, genelleştirilmiş $k$-Horadam sayıları ile tanımlı $n\times n$ tipinde circulant matris olsun. $C(H)$ circulant matrisinin determinantı,

$$\det(C(H)) = \frac{\left(-H_{k,n}+H_{k,0}\right)^n - \left(g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)^n}{\left(-g(k)\right)^n - r_1^n - r_2^n + 1} \tag{3.1.7}$$

dır (Yazlik & Taskara, 2012).

**İspat.** Teorem 1.3.3.6'dan $C(H)$, matrisinin determinantı

$$\det\left(C\left(H\right)\right)=\prod_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}H_{k,j}w_s{}^j\right) \tag{3.1.8}$$

dir. Öte yandan $(3.1.8)$'de $(2.1.7)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\det\left(C\left(H\right)\right)&=\prod_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Xr_1^j-Yr_2^j}{r_1-r_2}w_s{}^j\right)\\
&=\prod_{s=0}^{n-1}\frac{1}{r_1-r_2}\left(X\sum_{j=0}^{n-1}\left(r_1w_s\right)^j-Y\sum_{j=0}^{n-1}\left(r_2w_s\right)^j\right)\\
&=\prod_{s=0}^{n-1}\frac{1}{r_1-r_2}\left(X\frac{r_1^n-1}{r_1w_s-1}-Y\frac{r_1^n-1}{r_1w_s-1}\right)\\
&=\prod_{s=0}^{n-1}\frac{1}{\left(r_1-r_2\right)}\left(X\frac{r_1^n-1}{r_1w_s-1}-Y\frac{r_2^n-1}{r_2w_s-1}\right)\\
&=\prod_{s=0}^{n-1}\frac{\left(-H_{k,n}+H_{k,0}\right)-w_s\left(g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)}{\left(1-r_1w_s\right)\left(1-r_2w_s\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 1.3.3.5'de $x=-H_{k,n}+H_{k,0}$ ve $y=g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}$ eşitlikleri yerine yazılır ve

$$\begin{aligned}
\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-r_1w_s\right)\left(1-r_2w_s\right)&=\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-r_1w_s\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-r_1w_s\right)\\
&=(1-r_1^n)(1-r_2^n)\\
&=(-g(k))^n-r_1^n-r_2^n+1
\end{aligned}$$

ifadesi dikkate alınırsa,

$$\det(C(H))=\frac{\left(-H_{k,n}+H_{k,0}\right)^n-\left(g(k)H_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)^n}{\left(-g(k)\right)^n-r_1^n-r_2^n+1}$$

elde edilir.■

Teorem 3.1.6'dan faydalanılarak $(3.1.7)$ denklemi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, elemanları Fibonacci sayıları olan circulant matrisin determinantı,

  $$\det\left(C\left(F\right)\right)=\frac{\left(-F_n\right)^n-\left(F_{n-1}-1\right)^n}{\left(-1\right)^n-L_n+1}$$

  dir (Lind, 1970).
- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=1,\ b=1$ için, elemanları Modified-Pell sayıları olan circulant matrisin Euclides normu,

$$\det\left(C\left(q\right)\right)=\frac{\left(1-q_n\right)^n-\left(1+q_{n-1}\right)^n}{\left(-1\right)^n-2q_n+1}$$

dir (Kocer, 2007).

- $f(k)$, $g(k)$, $a$ ve $b$'ye uygun değerler verilirse, literatürde yer alan 2. mertebeden diğer özel sayı dizileri için circulant matrislerin detetminantları benzer şekilde elde edilir.

## 3.2. Genelleştirilmiş *k*-Horadam Sayıları ile Tanımlı Circulant Matrislerin Tersi

Bu bölümde Bölüm 3.1 de tanımlanan $C\left(H\right)$ circulant matrislerin tersi elde edilmiştir.

Bu bölüm boyunca $C\left(H\right)$ circulant matrisi, $C\left(H\right)=\left(H_{k,1},H_{k,2},\dots,H_{k,n}\right)$ olarak ele alınacaktır. Öncelikle $C\left(H\right)$ matrisinin determinantını, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir.

**Teorem 3.2.1** $M=g\left(k\right)\left(H_{k,n}-H_{k,0}\right)$, $N=H_{k,1}-H_{k,n+1}$ olsun. $n>2$ için, $C\left(H\right)$ circulant matrisinin determinantı

$$\det\left(C\left(H\right)\right)=H_{k,1}N^{n-1}+H_{k,1}M^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{N}{M}\right)^{i-1} \qquad (3.2.1)$$

dir.

**İspat.** $M=g\left(k\right)\left(H_{k,n}-H_{k,0}\right)$, $N=H_{k,1}-H_{k,n+1}$ olsun. Teoremi ispatlamak için, öncelikle aşağıda verilen $P$ ve $Q_1$ matrislerini tanımlayalım.

$$P=\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & 0 & 0 & 0\\
\frac{-H_{k,2}}{H_{k,1}} & 0 & & & 0 & 0 & 1\\
-g(k) & 0 & & & 0 & 1 & -f(k)\\
0 & 0 & & & 1 & -f(k) & -g(k)\\
\vdots & \vdots & & & \iddots & \iddots & -g(k)\\
0 & 0 & & \iddots & \iddots & \iddots & \\
0 & 0 & 1 & -f(k) & \iddots & 0 & \\
0 & 1 & -f(k) & -g(k) & & &
\end{pmatrix} \qquad (3.2.2)$$

ve

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{M}{N}\right)^{n-2} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{M}{N}\right)^{n-3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{M}{N} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.3}$$

alalım. $P, C(H), Q_1$ matrislerin çarpımı

$$PC(H)Q_1 = \begin{pmatrix} H_{k,1} & h'_n & H_{k,n-1} & H_{k,n-2} & \dots & H_{k,3} & H_{k,2} \\ 0 & h_n & h_{23} & h_{24} & \dots & h_{2(n-1)} & h_{2n} \\ 0 & 0 & N & & & 0 & \\ 0 & 0 & -M & N & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & -M & N & \\ 0 & 0 & & & & -M & N \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

$$h'_n = \sum_{j=1}^{n-1} H_{k,j+1} \left(\frac{M}{N}\right)^{n-(j+1)},$$

$$h_n = H_{k,1} - \frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \left[ \left( H_{k,i+2} - \frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}} \right) \left(\frac{M}{N}\right)^{n-(i+1)} \right]$$

$$h_{2j} = H_{k,n+3-j} - \frac{H_{k,2}H_{k,n+2-j}}{H_{k,1}}, \ (j = 3,4,\dots,n)$$

dir. Öte yandan $\det(P) = \det(Q_1) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\det\left(PC\left(H\right)Q_1\right)=\det\left(P\right)\det\left(C\left(H\right)\right)\det\left(Q_1\right)$$
$$=H_{k,1}N^{n-2}h_n$$
$$=H_{k,1}N^{n-2}\left[H_{k,1}-\frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}}+\sum_{i=1}^{n-2}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{M}{N}\right)^{n-(i+1)}\right]$$
$$=H_{k,1}N^{n-2}\left[H_{k,1}-H_{k,n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{M}{N}\right)^{n-(i+1)}\right]$$
$$=H_{k,1}N^{n-1}+H_{k,1}M^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{N}{M}\right)^{i-1}$$

elde edilir ki istenendir.■

Teorem 3.2.1'den faydalanılarak $(3.2.1)$ denklemi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için $F_n$ $n$. Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\det\left(C\left(F\right)\right)=\left(1-F_{n+1}\right)^{n-1}+F_n^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}F_i\left(\frac{1-F_{n+1}}{F_n}\right)^{i-1}$$

dir (Shen, 2011).

- $f\left(k\right)=g\left(k\right)=1,\ a=2,\ b=1$ için $L_n$ $n$. Lucas sayısı olmak üzere

$$\det\left(C\left(L\right)\right)=\left(1-L_{n+1}\right)^{n-1}+\left(L_n-2\right)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(L_{i+2}-3L_{i+1}\right)\left(\frac{1-L_{n+1}}{L_n-2}\right)^{i-1}$$

dir (Shen, 2011).

- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için $P_n$ $n$. Pell sayısı olmak üzere

$$\det\left(C\left(P\right)\right)=\left(1-P_{n+1}\right)^{n-1}+P_n^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}P_i\left(\frac{1-P_{n+1}}{P_n}\right)^{i-1}$$

dir.

- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0,\ b=1$ için $J_n$ $n$. Jacobsthal sayısı olmak üzere

$$\det\left(C\left(J\right)\right)=\left(1-J_{n+1}\right)^{n-1}+2^{n-1}J_n^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}J_i\left(\frac{1-J_{n+1}}{2J_n}\right)^{i-1}$$

dir (Bozkurt & Tam, 2012).

- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için $F_{k,n}$ $n$. $k$-Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\det\left(C\left(F_k\right)\right)=\left(1-F_{k,n+1}\right)^{n-1}+F_{k,n}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}F_{k,i}\left(\frac{1-F_{k,n+1}}{F_{k,n}}\right)^{i-1}$$

dir.

- $f(k)$, $g(k)$, $a$ ve $b$'ye uygun değerler verilirse, literatürde yer alan 2. mertebeden diğer özel sayı dizileri için circulant matrislerin detetminantları benzer şekilde elde edilir.

**Teorem 3.2.2** $C(H)$**,** $n\times n$ tipinde circulant matris olsun. $n>2$ için, $C(H)$ tersinir matristir.

**İspat.** Teorem 1.3.3.6'dan $C(H)$ matrisinin determinantı

$\det(C(H))=\prod_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}H_{k,j}w_m^{\;j-1}\right)$ olduğu göz önüne alınırsa Teorem 1.3.3.9'dan teoremi ispatlamak için $f(w^m)\neq 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$f(w^m)=\sum_{j=1}^{n}H_{k,j}(w^m)^{j-1}$$

ifadesinde $(2.1.7)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
f(w^m)&=\sum_{j=1}^{n}\frac{Xr_1^j-Yr_2^j}{r_1-r_2}(w^m)^{j-1}\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left(X\sum_{j=1}^{n}r_1^j(w^m)^{j-1}-Y\sum_{j=1}^{n}r_2^j(w^m)^{j-1}\right)\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left(X\frac{r_1\left(1-r_1^n\right)}{1-r_1w^m}-Y\frac{r_2\left(1-r_2^n\right)}{1-r_2w^m}\right)\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left(\frac{Xr_1\left(1-r_1^n\right)\left(1-r_2w^m\right)}{1-r_1w^m}-\frac{Yr_2\left(1-r_2^n\right)\left(1-r_1w^m\right)}{1-r_2w^m}\right)\\
&=\frac{H_{k,1}-H_{k,n+1}+g(k)w^m\left(H_{k,0}-H_{k,n}\right)}{1-\left(r_1+r_2\right)w^m+r_1r_2w^{2m}}\\
&=\frac{H_{k,1}-H_{k,n+1}+g(k)w^m\left(H_{k,0}-H_{k,n}\right)}{1-f(k)w^m-g(k)w^{2m}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $m=1,2,\ldots,n-1$ için $f(w^m)=0$ ise o zaman

$1-f(k)w^m-g(k)w^{2m}\neq 0$ olmak üzere

$$H_{k,1}-H_{k,n+1}+g(k)w^m\left(H_{k,0}-H_{k,n}\right)=0$$

dır. Burada

$$w^m=\frac{H_{k,n+1}-H_{k,1}}{g(k)(H_{k,0}-H_{k,n})}$$

ifadesi reel bir değer olduğundan

$$w^m = e^{\frac{2\pi i m}{n}} = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n}$$

eşitliğinde $\sin\frac{2\pi m}{n} = 0$ olmalıdır. Yani $0 < \frac{2\pi m}{n} < 2\pi$ için $w^m = -1$'dir. Ancak $w^m = x = -1,\ n > 2$ için, $H_{k,1} - H_{k,n+1} + g(k)\left(H_{k,0} - H_{k,n}\right)x = 0$ denkleminin bir kökü olmadığından $f(w^m) \neq 0$'dır. Teorem 1.3.3.9'dan ispat tamamlanır.■

**Teorem 3.2.3** $T = \left[t_{ij}\right]_{i,j=1}^{n-2}$, $(n-2)\times(n-2)$ tipinde alt üçgen matrisi olmak üzere

$$t_{ij} = \begin{cases} H_{k,1} - H_{k,n+1}, & i = j \\ g(k)\left(H_{k,0} - H_{k,n}\right), & i = j+1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.2.4}$$

olsun. O zaman $T$ matrisinin tersi

$$t'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left[g(k)\left(H_{k,n} - H_{k,0}\right)\right]^{i-j}}{\left(H_{k,1} - H_{k,n+1}\right)^{i-j+1}}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \tag{3.2.5}$$

dir.

**İspat.** İlk olarak $TT^{-1} = I_{n-2}$ olduğunu gösterelim. Bunun için de $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n-2} t_{ik}t'_{kj}$ olup,

$i < j$ olduğunda $c_{ij} = 0$,

$i = j$ için $c_{ii} = t_{ii}t'_{ii} = \left(H_{k,1} - H_{k,n+1}\right)\dfrac{1}{\left(H_{k,1} - H_{k,n+1}\right)} = 1,$

$i \geq j+1$ için,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n-2} t_{ik}t'_{kj} \\ &= t_{i(i-1)}t'_{(i-1)j} + t_{ii}t'_{ij} \\ &= g(k)(H_{k,0} - H_{k,n})\frac{(g(k)(H_{k,n} - H_{k,0}))^{i-j-1}}{(H_{k,1} - H_{k,n+1})^{i-j}} + \left(H_{k,1} - H_{k,n+1}\right)\frac{(g(k)(H_{k,n} - H_{k,0}))^{i-j}}{(H_{k,1} - H_{k,n+1})^{i-j+1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Benzer şekilde $T^{-1}T = I_{n-2}$ olduğu gösterilebilir.■

**Teorem 3.2.4** $j=1,2,\ldots,n-2$ için $S_n^{(j)}=\sum_{i=1}^{j}\frac{\left(H_{k,j+3-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,j+2-i}}{H_{k,1}}\right)M^{i-1}}{N^i}$,

$M=g(k)\left(H_{k,n}-H_{k,0}\right)$ ve $N=H_{k,1}-H_{k,n+1}$ olsun. $C(H)$,

$n\times n$ tipinde circulant matris olmak üzere $n>2$ için,

$$C^{-1}(H)=\left(\frac{1+f(k)S_n^{(n-2)}+g(k)S_n^{(n-3)}}{h_n},\frac{g(k)S_n^{(n-2)}-\frac{H_{k,2}}{H_{k,1}}}{h_n},-\frac{S_n^{(1)}}{h_n},-\frac{S_n^{(2)}-f(k)S_n^{(1)}}{h_n},\right.$$
$$\left.-\frac{S_n^{(3)}-f(k)S_n^{(2)}-g(k)S_n^{(1)}}{h_n},\ldots,-\frac{S_n^{(n-2)}-f(k)S_n^{(n-3)}-g(k)S_n^{(n-4)}}{h_n}\right) \quad (3.2.6)$$

dir.

**İspat.** Teoremi ispatlamak için, öncelikle aşağıda verilen $Q_2$ matrisini,

$$M=g(k)\left(H_{k,n}-H_{k,0}\right),\; N=H_{k,1}-H_{k,n+1},\; h_n'=\sum_{j=1}^{n-1}H_{k,j+1}\left(\frac{M}{N}\right)^{n-(j+1)},$$

$$h_n=H_{k,1}-\frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}}+\sum_{i=1}^{n-2}\left[\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{M}{N}\right)^{n-(i+1)}\right]$$ ve $j=3,4,\ldots,n$ için

$$h_{2j}=H_{k,n+3-j}-\frac{H_{k,2}H_{k,n+2-j}}{H_{k,1}}$$ olmak üzere

$$Q_2=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{h_n'}{H_{k,1}} & \frac{\frac{h_n'}{h_n}h_{23}-H_{k,n-1}}{H_{k,1}} & \frac{\frac{h_n'}{h_n}h_{24}-H_{k,n-2}}{H_{k,1}} & \cdots & \frac{\frac{h_n'}{h_n}h_{2n}-H_{k,2}}{H_{k,1}} \\ 0 & 1 & -\frac{h_{23}}{h_n} & -\frac{h_{24}}{h_n} & \cdots & -\frac{h_{2n}}{h_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

tanımlayalım. $(3.2.2)$, $(3.2.3)'$ deki matrisler ile $C(H)$ matrisini göz önüne alalım.

$U=\begin{pmatrix} H_{k,1} & 0 \\ 0 & h_n \end{pmatrix}$ ve $U\oplus T$, U ile T matrislerinin direkt toplamı olmak üzere,

$$PC(H)Q_1Q_2=\begin{pmatrix} H_{k,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M & N & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -M & N \end{pmatrix}=U\oplus T \qquad (3.2.8)$$

dir. $(3.2.8)$ eşitliğinde $Q_1Q_2=Q$ alınır ve $(3.2.8)$ eşitliğinin her iki yanının matris tersi alınırsa,

$C^{-1}(H)=Q\left(U^{-1}\oplus T^{-1}\right)P$

elde edilir. Öte yandan $C^{-1}(H)$, circulant matris olduğundan $C^{-1}(H)=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ şeklinde yazılabilir. Burada $Q$ matrisinin son satırının elemanları

$$\left(0,1,-\frac{h_{23}}{h_n},-\frac{h_{24}}{h_n},\dots,-\frac{h_{2n}}{h_n}\right) \qquad (3.2.9)$$

şeklindedir. Öte yandan

$$U^{-1}\oplus T^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{H_{k,1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{N^2} & \frac{1}{N} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{M^{n-4}}{N^{n-3}} & \frac{M^{n-5}}{N^{n-4}} & \dots & \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M^{n-3}}{N^{n-2}} & \frac{M^{n-4}}{N^{n-3}} & \dots & \frac{M}{N^2} & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \qquad (3.2.10)$$

dir. $Q\left(U^{-1}\oplus T^{-1}\right)$ matrisinin son satırlarının elemanları ise

$$a_{nj}=\begin{cases} 0, & j=1 \\ \frac{1}{h_n}, & j=2 \\ -\frac{1}{h_n}\sum_{i=j}^{n} h_{2i}\frac{M^{i-j}}{N^{i-j+1}}, & j\geq 3 \end{cases} \qquad (3.2.11)$$

şeklindedir. $(3.2.11)$' deki $Q\left(U^{-1}\oplus T^{-1}\right)$ matrisinin son satırı ile $P$ matrisi çarpılıpılırsa, $C^{-1}(H)$ circulant matrisinin son satırının elemanları,

$$x_2=-\frac{H_{k,2}}{h_nH_{k,1}}+\frac{g(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)M^{i-1}}{N^i}$$

$$x_3=-\frac{H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}}{h_nN}$$

$$x_4=-\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(H_{k,5-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,4-i}}{H_{k,1}}\right)M^{i-1}}{N^i}+\frac{f(k)}{h_n}\left(\frac{H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}}{N}\right)$$

$$x_5=-\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{3}\frac{(H_{k,6-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,5-i}}{H_{k,1}})M^{i-1}}{N^i}+\frac{f(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{(H_{k,5-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,4-i}}{H_{k,1}})M^{i-1}}{N^i}+\frac{g(k)}{h_n}\left(\frac{H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}}{N}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n=-\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(H_{k,n+1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}})M^{i-1}}{N^i}+\frac{f(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{(H_{k,n-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-1-i}}{H_{k,1}})M^{i-1}}{N^i}+\frac{g(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-4}\frac{(H_{k,n-1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-2-i}}{H_{k,1}})M^{i-1}}{N^i}$$

$$x_1=\frac{1}{h_n}+\frac{f(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(H_{k,n+1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}})M^{i-1}}{N^i}+\frac{g(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{(H_{k,n-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-1-i}}{H_{k,1}})M^{i-1}}{N^i}$$

şeklindedir. Son eşitliklerde $j=1,2,\ldots,n-2$ için

$$S_n^{(j)}=\sum_{i=1}^{j}\frac{\left(H_{k,j+3-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,j+2-i}}{H_{k,1}}\right)M^{i-1}}{N^i}$$ alınırsa,

$$C^{-1}\left(H\right)=\left(\frac{1+f(k)S_n^{(n-2)}+g(k)S_n^{(n-3)}}{h_n},\frac{g(k)S_n^{(n-2)}-\frac{H_{k,2}}{H_{k,1}}}{h_n},-\frac{S_n^{(1)}}{h_n},-\frac{S_n^{(2)}-f(k)S_n^{(1)}}{h_n},\right.$$
$$\left.-\frac{S_n^{(3)}-f(k)S_n^{(2)}-g(k)S_n^{(1)}}{h_n},\ldots,-\frac{S_n^{(n-2)}-f(k)S_n^{(n-3)}-g(k)S_n^{(n-4)}}{h_n}\right)$$

elde edilir ki istenendir.■

Teorem 3.2.4'den faydalanılarak $(3.2.6)$ denklemi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, elemanları Fibonacci sayıları olan circulant matrisin tersi, $f_n=F_1-F_n+\sum_{i=1}^{n-2}F_i\left(\frac{F_n}{F_1-F_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$ olmak üzere,

$$C^{-1}(F)=\frac{1}{f_n}\begin{pmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-2}F_{n-i}\frac{F_n^{i-1}}{\left(F_1-F_{n+1}\right)^i},-1+\sum_{i=1}^{n-2}F_{n-1-i}\frac{F_n^{i-1}}{\left(F_1-F_{n+1}\right)^i},-\frac{1}{F_1-F_{n+1}}, \\ -\frac{F_n}{\left(F_1-F_{n+1}\right)^2},-\frac{F_n^2}{\left(F_1-F_{n+1}\right)^3},\ldots,-\frac{F_n^{n-3}}{\left(F_1-F_{n+1}\right)^{n-2}} \end{pmatrix}$$

(Shen, 2011).

- $f(k)=g(k)=1,\ a=2,\ b=1$ için, elemanları Lucas sayıları olan circulant matrisin tersi, $l_n=L_1-3L_n+\sum_{i=1}^{n-2}\left(L_{i+2}-3L_{i+1}\right)\left(\frac{L_n-2}{L_1-L_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$ olmak üzere,

$$C^{-1}(L)=\frac{1}{l_n}\begin{pmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-2}\left(L_{n+2-i}-3L_{n+1-i}\right)\frac{\left(L_n-2\right)^{i-1}}{\left(L_1-L_{n+1}\right)^i},-3+\sum_{i=1}^{n-2}\left(L_{n+1-i}-3L_{n-i}\right)\frac{\left(L_n-2\right)^{i-1}}{\left(L_1-L_{n+1}\right)^i}, \\ \frac{5}{L_1-L_{n+1}},\frac{5\left(L_n-2\right)}{\left(L_1-L_{n+1}\right)^2},\frac{5\left(L_n-2\right)^2}{\left(L_1-L_{n+1}\right)^3},\ldots,\frac{5\left(L_n-2\right)^{n-3}}{\left(L_1-L_{n+1}\right)^{n-2}} \end{pmatrix}$$

(Shen, 2011).

- $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için elamanları Pell sayıları olan circulant matrisin tersi, $p_n=P_1-2P_n+\sum_{i=1}^{n-2}P_i\left(\frac{P_n}{P_1-P_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$ olmak üzere,

$$C^{-1}(P)=\frac{1}{p_n}\begin{pmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-2}P_{n-i}\frac{P_n^{i-1}}{\left(P_1-P_{n+1}\right)^i},-2+\sum_{i=1}^{n-2}P_{n-1-i}\frac{P_n^{i-1}}{\left(P_1-P_{n+1}\right)^i},-\frac{1}{\left(P_1-P_{n+1}\right)}, \\ -\frac{P_n}{\left(P_1-P_{n+1}\right)^2},-\frac{P_n^2}{\left(P_1-P_{n+1}\right)^3},\ldots,-\frac{P_n^{n-3}}{\left(P_1-P_{n+1}\right)^{n-2}} \end{pmatrix}.$$

- $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0,\ b=1$ için elemanları Jacobsthal sayıları olan circulant matrisin tersi, $u_n=J_1-J_n+2\sum_{i=1}^{n-2}J_i\left(\frac{2J_n}{J_1-J_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$ olmak üzere

$$C^{-1}(J)=\frac{1}{u_n}\begin{pmatrix} 1+2\sum_{i=1}^{n-2}J_{n-i}\frac{\left(2J_n\right)^{i-1}}{\left(J_1-J_{n+1}\right)^i},-1+4\sum_{i=1}^{n-2}J_{n-1-i}\frac{\left(2J_n\right)^{i-1}}{\left(J_1-J_{n+1}\right)^i},-\frac{2}{J_1-J_{n+1}}, \\ -\frac{2\left(2J_n\right)}{\left(J_1-J_{n+1}\right)^2},-\frac{2\left(2J_n\right)^2}{\left(J_1-J_{n+1}\right)^3},\ldots,-\frac{2\left(2J_n\right)^{n-3}}{\left(J_1-J_{n+1}\right)^{n-2}} \end{pmatrix}$$

(Bozkurt & Tam, 2012).

- $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için elemanları $k$-Fibonacci sayıları olan circulant matrisin tersi, $f_n^k=F_{k,1}-kF_{k,n}+\sum_{i=1}^{n-2}F_{k,i}\left(\frac{F_{k,n}}{F_{k,1}-F_{k,n+1}}\right)^{n-(i+1)}$ olmak üzere

$$C^{-1}\left(F^{k}\right)=\frac{1}{f_{n}^{k}}\begin{pmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-2}F_{k,n-i}\frac{F_{k,n}^{i-1}}{\left(F_{k,1}-F_{k,n+1}\right)^{i}},-k+\sum_{i=1}^{n-2}F_{k,n-1-i}\frac{F_{k,n}^{i-1}}{\left(F_{k,1}-F_{k,n+1}\right)^{i}},-\frac{1}{F_{k,1}-F_{k,n+1}}, \\ -\frac{F_{k,n}}{\left(F_{k,1}-F_{k,n+1}\right)^{2}},-\frac{F_{k,n}^{2}}{\left(F_{k,1}-F_{k,n+1}\right)^{3}},\ldots,-\frac{F_{k,n}^{n-3}}{\left(F_{k,1}-F_{k,n+1}\right)^{n-2}} \end{pmatrix}.$$

- $f(k)$, $g(k)$, $a$ ve $b$'ye uygun değerler verilirse, literatürde yer alan 2. mertebeden diğer özel sayı dizileri için circulant matrislerin tersleri benzer şekilde elde edilir.

## 3.3. Genelleştirilmiş *k*-Horadam Sayıları ile Tanımlı *r*-Circulant Matrisler

Şimdi, elemanları genelleştirilmiş $k$-Horadam dizisinin ardışık terimleri olacak şekilde $C_r(H)$ *r*-circulant matrisini tanımlayalım.

**Tanım 3.3.1** $H_{k,n}$, $n$. genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısı olsun. $i,j=1,2,\ldots,n$ için, $ij-$elemanı $c_{ij}=\begin{cases} H_{k,j-i}, & j\geq i \\ rH_{k,n+j-i}, & j<i \end{cases}$ olan $n\times n$ tipindeki $C_r\left(H\right)=\left(c_{ij}\right)$ matrisine *genelleştirilmiş k-Horadam sayıları ile tanımlı r-Circulant matris* denir ve

$$C_r(H)=\begin{pmatrix} H_{k,0} & H_{k,1} & H_{k,2} & \cdots & H_{k,n-1} \\ rH_{k,n-1} & H_{k,0} & H_{k,1} & \cdots & H_{k,n-2} \\ rH_{k,n-2} & rH_{k,n-1} & H_{k,0} & \cdots & H_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rH_{k,1} & rH_{k,2} & rH_{k,3} & \cdots & H_{k,0} \end{pmatrix} \qquad (3.3.1)$$

şeklinde gösterilir.

**Teorem 3.3.2** $C_r\left(H\right)$, $(3.3.1)$'de tanımlanan $n\times n$ tipinde $r$-circulant matris olsun. $r\in\mathbb{C}$, $S=\left(b-af(k)\right)^{2}-a^{2}-2XY\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^{n}}{1+g(k)}\right)$, $\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^{2}=\frac{H_{k,n}^{2}-g^{2}(k)H_{k,n-1}^{2}+S}{f^{2}(k)+2g(k)-g^{2}(k)-1}$

olmak üzere, $C_r\left(H\right)$ matrisinin spectral normunun alt ve üst sınırları

$$\begin{cases} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^{2}}\leq\left\|C_r\left(H\right)\right\|_{2}\leq\sqrt{\left(a^{2}\left(1-|r|^{2}\right)+|r|^{2}\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^{2}\right)\left(1-a^{2}+\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^{2}\right)}, & |r|\geq 1 \\ |r|\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^{2}}\leq\left\|C_r\left(H\right)\right\|_{2}\leq\sqrt{n\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^{2}}, & |r|<1 \end{cases}$$

şeklindedir.

**İspat** Frobenius normun tanımından,

$$\left\|C_r\left(H\right)\right\|_F^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\left(n-i\right)H_{k,i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i\left|r\right|^2 H_{k,i}^2$$

elde edilir. Eğer $\left|r\right| \geq 1$ ise, o zaman

$$\left\|C_r\left(H\right)\right\|_F^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1}\left(n-i\right)H_{k,i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} iH_{k,i}^2 = n\sum_{i=1}^{n-1} H_{k,i}^2 \qquad \left(3.3.2\right)$$

dir. Öte yandan $S = \left(b - af(k)\right)^2 - a^2 - 2XY\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right)$ olmak üzere $\left(3.3.2\right)$ eşitsizliğinde Teorem 2.2.4 göz önüne alınırsa,

$$\left\|C_r\left(H\right)\right\|_F^2 \geq n\left(\frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}\right) \Rightarrow \frac{\left\|C_r\left(H\right)\right\|_F}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{\frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}} \qquad \left(3.3.3\right)$$

bulunur. Öte yandan $\left(3.3.3\right)$ eşitsizliğinde, $\left(1.3.2.1\right)$ denklemi göz önüne alınırsa

$$\left\|C_r\left(H\right)\right\|_2 \geq \sqrt{\frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}}$$

elde edilir. Benzer olarak $\left|r\right| < 1$ için,

$$\begin{aligned}
\left\|C_r\left(H\right)\right\|_F^2 &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(n-i\right)H_{k,i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i\left|r\right|^2 H_{k,i}^2 \\
&\geq \sum_{i=0}^{n-1}\left(n-i\right)\left|r\right|^2 H_{k,i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i\left|r\right|^2 H_{k,i}^2 \\
&= n\left|r\right|^2 \sum_{i=1}^{n-1} H_{k,i}^2.
\end{aligned}$$

Yine Teorem 2.2.4 ve $\left(1.3.2.1\right)$ denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{\left\|C_r\left(H\right)\right\|_F}{\sqrt{n}} \geq \left|r\right|\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} H_{k,i}^2} \Rightarrow \left\|C_r\left(H\right)\right\|_2 \geq \left|r\right|\sqrt{\frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}}$$

bulunur.

Şimdi, $\left|r\right| \geq 1$ için, $C_r\left(H\right)$ matrisinin spectral normunun üst sınırını elde etmek için de $C_r\left(H\right) = B \circ C$ olacak şekilde $B$ ve $C$ matrislerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$B=\begin{pmatrix} H_{k,0} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ rH_{k,n-1} & H_{k,0} & 1 & \dots & 1 \\ rH_{k,n-2} & rH_{k,n-1} & H_{k,0} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rH_{k,1} & rH_{k,2} & rH_{k,3} & \dots & H_{k,0} \end{pmatrix} \quad ve \quad C=\begin{pmatrix} 1 & H_{k,1} & H_{k,2} & \dots & H_{k,n-1} \\ 1 & 1 & H_{k,1} & \dots & H_{k,n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & H_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$S=\left(b-af(k)\right)^2-a^2-2XY\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right)$ olmak üzere, $B$ matrisinin maximum satır uzunluk normu

$$r_1(B)=\max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2}=\sqrt{H_{k,0}^2+\left|r\right|^2\sum_{j=1}^{n-1}H_{k,j}^2}$$
$$=\sqrt{a^2\left(1-\left|r\right|^2\right)+\left|r\right|^2\frac{H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}}.$$

Öte yandan $C$ matrisinin maximum sütun uzunluk normu ise

$$c_1(C)=\max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|c_{ij}\right|^2}=\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}H_{k,i}^2}=\sqrt{1-a^2+\frac{H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}}$$

olur. Ayrıca $\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^2=\dfrac{H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}$ olmak üzere, Teorem 1.3.2.7 göz önüne alınırsa

$$\left\|C_r\left(H\right)\right\|_2\le r_1(B)c_1(C)=\sqrt{\left(a^2\left(1-\left|r\right|^2\right)+\left|r\right|^2\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^2\right)\left(1-a^2+\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^2\right)}$$

elde edilir.

Şimdi de, $\left|r\right|<1$ için, $C_r\left(H\right)$ matrisinin spectral normu için üst sınırı elde edelim. Bunun için de $C_r\left(H\right)=D\circ E$ olacak şekilde $D$ ve $E$ matrislerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & r & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad ve \quad E=\begin{pmatrix} H_{k,0} & H_{k,1} & H_{k,2} & \dots & H_{k,n-1} \\ H_{k,n-1} & H_{k,0} & H_{k,1} & \dots & H_{k,n-2} \\ H_{k,n-2} & H_{k,n-1} & H_{k,0} & \dots & H_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k,1} & H_{k,2} & H_{k,3} & & H_{k,0} \end{pmatrix}$$

$D$ matrisinin maximum satır uzunluk normu

$$r_1(D)=\max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|d_{ij}\right|^2}=\sqrt{n}$$

dir. $S=\left(b-af(k)\right)^2-a^2-2XY\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right)$ olmak üzere, $E$ matrisinin maximum sütun uzunluk normu ise

$$c_1(E)=\max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|e_{ij}\right|^2}=\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}^2}=\sqrt{\frac{H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}}$$

dir. Öte yandan Teorem 1.3.2.7 göz önüne alınırsa

$$\left\|C_r\left(H\right)\right\|_2\le r_1(D)c_1(E)=\sqrt{n\frac{H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1}},$$

elde edilir.■

**Teorem 3.3.3** $A=C_r\left(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\right)$, $n\times n$ tipinde $r$-circulant matris olsun. $A$ matrisin özdeğerleri

$$\lambda_j(A)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i r^{\frac{i}{n}}w^{-ij}$$

dır.

**İspat.** *A* *r*-circulant matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri, $Ay=\lambda y$ denkleminin ya da

$$\sum_{k=0}^{j-1}ra_{n-j+k}y_k+\sum_{k=j}^{n-1}a_{k-j}y_k=\lambda y_j;\ j=0,1,\ldots,n-1$$

fark denkleminin kökleridir. Burada toplamların sınırlarında değişiklik yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-j-1}a_k y_{k+j}+\sum_{k=n-j}^{n-1}ra_k y_{k-(n-j)}=\lambda y_j;\ j=0,1,\ldots,n-1 \tag{3.3.4}$$

elde edilir. $\left(3.3.4\right)$ denklemi sabit katsayılı lineer bir denklem olduğundan $y_k=r^{\frac{k}{n}}\rho^k$ $\left(3.3.4\right)$ sisteminin bir özel çözümüdür. O zaman $y_k=r^{\frac{k}{n}}\rho^k$ $\left(3.3.4\right)$ denklemin de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1-j}a_k r^{\frac{k}{n}}\rho^k+\rho^{-n}\sum_{k=n-j}^{n-1}a_k r^{\frac{k}{n}}\rho^k=\lambda$$

elde edilir. $\rho$ birimin *n.* dereceden primitif kökü olup, *A* circulant matrisin özdeğerleri

$$\lambda=\sum_{k=0}^{n-1}a_k r^{\frac{k}{n}}\rho^k$$

bulunur.■

**Teorem 3.3.4** $C_r(H)$, $n\times n$ tipinde $r$-circulant matris ve $w$, birimin $n$. dereceden primitif kökü ise, $C_r(H)$ matrisinin öz değerleri

$$\lambda_j(C_r(H))=\frac{rH_{k,n}-H_{k,0}+\left[g(k)rH_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right]r^{\frac{1}{n}}w^{-j}}{g(k)r^{\frac{2}{n}}w^{-2j}+f(k)r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1}.$$

**İspat.** Teorem 3.3.3'den $C_r(H)$ $r$-circulant matrisin özdeğerleri

$$\lambda_j\left(C_r(H)\right)=\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}r^{\frac{i}{n}}w^{-ji}$$

şeklindedir. Öte yandan genelleştirilmiş $k$-Horadam sayılarının Binet formülü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_j\left(C_r(H)\right)&=\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i}r^{\frac{i}{n}}w^{-ji}\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{Xr_1^i-Yr_2^i}{r_1-r_2}\right)r^{\frac{i}{n}}w^{-ji}\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)^i-Y\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)^i\right]\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left[\frac{X\left[\left(r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)^n-1\right]}{r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1}-\frac{Y\left[\left(r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)^n-1\right]}{r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1}\right]\\
&=\frac{1}{r_1-r_2}\left[\frac{\left(Xr_1^nr-X\right)\left(r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1\right)-\left(Yr_2^nr-Y\right)\left(r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1\right)}{\left(r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1\right)\left(r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1\right)}\right]\\
&=\frac{rH_{k,n}-H_{k,0}+\left[g(k)rH_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right]r^{\frac{1}{n}}w^{-j}}{g(k)r^{\frac{2}{n}}w^{-2j}+f(k)r^{\frac{1}{n}}w^{-j}-1}
\end{aligned}$$

bulunur.■

**Teorem 3.3.5** $C_r(H)$, $n\times n$ tipinde $r$-circulant matris ve $w$, birimin $n$. dereceden primitif kökü ise, $C_r(H)$ matrisinin determinantı

$$\det\left(C_r\left(H\right)\right)=\frac{\left(H_{k,0}-rH_{k,n}\right)^n-\left(g\left(k\right)rH_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)^n r}{\left(1-rr_1^n\right)\left(1-rr_2^n\right)}.$$

**İspat.** Teorem 3.3.4 göz önüne alınırsa $C_r\left(H\right)$, matrisinin determinantı

$$\det\left(C_r\left(H\right)\right)=\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j\left(C_r\left(H\right)\right)$$

$$=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{H_{k,0}-rH_{k,n}-\left(g(k)rH_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)r^{\frac{1}{n}}w^{-j}}{\left(1-r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)\left(1-r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)}$$

elde edilir. Teorem 1.3.3.5'de $x=H_{k,0}-rH_{k,n}$ ve

$y=\left(g\left(k\right)rH_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)r^{\frac{1}{n}}$ eşitlikleri yerine yazılır ve

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)\left(1-r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)=\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-r_1r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-r_2r^{\frac{1}{n}}w^{-j}\right)$$
$$=\left(1-rr_1^n\right)\left(1-rr_2^n\right)$$

eşitliği de dikkate alınırsa

$$\det\left(C_r\left(H\right)\right)=\frac{\left(H_{k,0}-rH_{k,n}\right)^n-\left(g\left(k\right)rH_{k,n-1}-H_{k,1}+f(k)H_{k,0}\right)^n r}{\left(1-rr_1^n\right)\left(1-rr_2^n\right)}$$

elde edilir.■

# 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

## 5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, ilk olarak genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi tanımlanmış, bu dizinin özellikleri incelenerek, bazıları determinant yardımıyla ispat edilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarının bazı kısmi toplamları için formüller elde edilmiştir. Genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisinin ürerteç fonksiyonu farklı yollar kullanılarak elde edilmiştir. Negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları tanımlanarak, pozitif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları ile arasındaki bağıntı verilmiştir. Son bölümde, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından seçilen circulant matrislerin öz değerleri, determinantları, normları ve tersleri gibi bazı özelliklerini incelenmiştir. Son olarak r-circulant matrisler tanımlanarak, bu matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırları, determinantları ve özdeğerleri hesaplanmıştır. Çalışmanın içeriğinden de görülmektedir ki, elde edilen bulgular literatürde yer alan 2. mertebeden özel sayı dizilerinin genellemeleridir.

## 5.2 Öneriler

Elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından seçilen Hankel ve Toeplitz matrisleri tanımlanarak bu matrislerin öz değer, determinant, norm gibi bazı özellikleri incelenebilir. Ayrıca negatif indisli genelleştirilmiş *k*-Horadam dizilerinin bazı özellikleri de incelenebilir.

**KAYNAKLAR**


Bozkurt, D., Tam, T., 2012, Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computations* 219, 544-551.

Box, G. E., Jenkins, G. M., 1970, *Times series analysis*, Forecasting and control, Holden-day, San Francisco.

Cerin, Z., Gianella, G. M., (2007), On sums of Pell numbers, *Accad. Sc. Torino - Atti Sci. Fis.* 141, 23-31.

Davis, P. J., 1979, *Circulant Matrices*, John Wiley and Sons, New York.

Er, M. C., 1984, Sums of Fibonacci numbers by matrix methods, *The Fibonacci Quarterly* 22(3), 204-207.

Falcon, S., Plaza A., 2007, On the Fibonacci *k*-numbers, *Chaos, Solitons and Fractals* 32, 1615-1624.

Falcon, S., Plaza A., 2009, On *k*-Fibonacci numbers of arithmetic indexes, *Applied Mathematics and Computation* 208, 180–185.

Falcon, S., 2011, On the *k*-Lucas numbers**,** *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* 6(21), 1039-1050.

Good, I. J., 1950, On the inversion of circulant matrices, *Biometrika*, 185-186.

Gray, R. M., 2002, Toeplitz and Circulant Matrices: A review http://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf. [Ziyaret Tarihi: 07 Kasım 2012]

Horadam, A. F., 1965, Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, *The Fibonacci Quarterly* 3, 161-176.

Horadam, A. F., 1965, Generating functions for powers of a certain generalised sequence of numbers, *Duke Mathematical Journal* 32(3), 437-446.

Horadam, A. F., 1971, Pell identities *The Fibonacci Quarterly* **9(3)**: 245–252, 263.

Horadam, A. F., 1994, Applications of modified Pell numbers to representations, *Ulam Quarterly* 3(1), 34-53.

Horadam, A. F., 1996, Jacobsthal representation numbers, *The Fibonacci Quarterly* 34, 40-54.

Horzum T., Kocer E. G., 2009, On some properties of Horadam polynomials, *International Mathematical Forum* 4(25), 1243-1252.

İpek, A., 2011, On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries, *Applied Mathematics and Computations* 217, 6011-6012.

Karner, H., Schneid, J., Ueberhuber, C.W., 2003, Spectral decomposition of real circulant matrices, *Linear Algebra and its Applications* 367, 301-311.

Kocer, E. G., 2007, Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Jacobstahal and Jacobsthal-Lucas numbers, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 36(2), 133-142.

Kocer, E. G., 2009, On the m-extension of the Fibonacci and Lucas *p*-numbers, *Chaos, Solitions & Fractals* 40, 1890-1906.

Koshy T., 2001, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, New York.

Kutlu O., 2011, Altın Oran: "Evrenin Matematiği", http://www.bilgicik.com/yazi/altin-oran-evrenin-matematigi/ [Ziyaret Tarihi: 07 Kasım 2012].

Lind, D. A., 1970, A Fibonacci circulant, *The Fibonacci Quarterly* 8(5), 449-455.

Lu, J., Wang, J., Feng, Y., 2010, The block diagonalization of circulant matrices over the quaternion field, *International Mathematical Forum* 5(25), 1227-1232.

Mansour, T., (2004), A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence, *Australasian Journal of Combinatorics* 30, 207-212.

Mathias, R., 1990, The spectral norm of a nonnegative matrix, *Linear Algebra and its Applications* 139, 269-284.

Mcllroy, M. D., 1992, Number theory in computer graphics, the unreasonable effectiveness of number theory (Orono, M.E., 1991), *Amer. Math. Soc. Providence,* RI, 105-121.

Shannon, A.G., Anderson, P.G., Horadam, A. F. , 2006, Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 37(7), 825-831.

Shen, S., 2010, On the bounds fort he norms of *r*-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computations* 216, 2891-2897.

Shen, S., Cen, J., 2010, On the spectral norms of *r*-circulant matrices with the *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences***,** 5(12), 569-578.

Shen, S., Cen, J., Hao, Y., 2011, On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computations* 217, 9790-9797.

Solak, S., 2005, On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computations* 160, 125-132.

Stakhov, A. P., 1977, *Introduction into algorithmic measurement theory*. Moscow: Publishing House ‘‘Soviet Radio’’[in Russian].

Taskara, N., Uslu, K., Gulec, H.H., 2010, On the properties of Lucas numbers with binomial coefficients, *Applied Mathematics Letters* 23, 68-72.

Uslu, K., Taskara, N., Kose, H., 2011, The generalized *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers, *Ars Combinatoria* 99, 25-32.

Uslu, K., Taskara, N., Uygun, S., 2011, The relations among *k*-Fibonacci, *k*-Lucas and generalized *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers and the spectral norms of the matrices of involving these numbers, *Ars Combinatoria* 102, 183-192.

Vajda S., 1989, *Fibonacci and Lucas and The Golden Section*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.

Yalciner, A., 2008, Spectral norms of some special matrices, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences,* 3(35), 1733-1738.

Yayanie, O, A note a generalized Fibonacci sequences, *Applied Mathematics and Computations* 217, 5603-5611.

Yazlik, Y., Taskara, N., 2012, Spectral norm, eigenvalues and determinant of circulant matrix involving generalized *k*-Horadam numbers, *Ars Combinatoria* 104, 505-512.

Yazlik, Y., Taskara, N., 2012, A note on generalized *k*-Horadam sequence, *Computers and Mathematics with Applications* 63, 36-41.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER


| | | |
|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | : | Yasin YAZLIK |
| **Uyruğu** | : | T.C. |
| **Doğum Yeri ve Tarihi** | : | KAYSERİ / 24.01.1984 |
| **Telefon** | : | 05058312970 |
| **Faks** | : | - |
| **e-mail** | : | yyazlik@selcuk.edu.tr |


## EĞİTİM

| **Derece** | **Adı** | **İlçe** | **İl** | **Bitirme Yılı** |
|---|---|---|---|---|
| **Lise** | Melikgazi(Süper) | Melikgazi | Kayseri | 2002 |
| **Üniversite** | Selçuk | Meram | Konya | 2007 |
| **Yüksek Lisans** | Selçuk | Meram | Konya | 2009 |
| **Doktora** | Selçuk | Selçuklu | Konya | 2013 |

## İŞ DENEYİMLERİ

| **Yıl** | **Kurum** | **Görevi** |
|---|---|---|
| 2007-2008 | Bilgi Eğitim Kurumları | Matematik Öğretmeni |
| 2008-2013 | Selçuk Üniversitesi | Araştırma Görevlisi |

**UZMANLIK ALANI: Uygulamalı Matematik**

**YABANCI DİLLER: İngilizce**

## YAYINLAR

1. **Y. Yazlik**, N. Taskara, 2012, “A note on generalized *k*-Horadam sequence”, *Computers and Mathematics with Applications* (ISI), 63, 36-41(Doktora tezinden yayınlanmıştır).

2. **Y. Yazlik** and N. Taskara, 2012, "Spectral norm, Eigenvalues and Determinant of Circulant Matrix involving the Generalized *k*-Horadam numbers"(ISI), *Ars Combinatoria* 104, 505-512 (Doktora tezinden yayınlanmıştır).

3. **Y. Yazlik,** E. Hatir, 2011, On the decomposition of $\delta-\beta-I-$Open set and continuity in the ideal topological space, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* 6, 381-391(Yüksek lisans tezinden yanlanmıştır).